OR

•运•筹•学•丛•书• 1

可靠性数学引论

曹晋华 程侃 著

科学出版社

运筹学丛书

可靠性数学引论

曹晋华　程　侃　著

科　学　出　版　社

1 9 8 6

内 容 简 介

本书简要介绍可靠性数学理论的基本概念和方法．内容包括常见寿命分布、不可修系统、可修系统、维修策略和可靠性寿命数据的统计分析．对于学习可靠性理论的读者，是一本较为理想的入门书．本书可作为高等院校理工科高年级学生和研究生的教学参考书，也可供有关研究人员和工程技术人员参考．

运筹学丛书
可靠性数学引论
曹晋华 程侃 著
责任编辑 杨贤英
科学出版社出版
北京朝阳门内大街137号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1986年1月第一版 开本：850×1168 1/32
1986年1月第一次印刷 印张：15 3/8
印数：0001—5,500 字数：405,000
统一书号：13031·3057
本社书号：4426·13—1
定价：4.30 元

序

可靠性理论是以产品的寿命特征作为主要研究对象的一门综合性和边缘性学科，它涉及到基础科学、技术科学和管理科学的许多领域．可靠性数学是可靠性理论的最重要的基础理论之一，近年来已发展成为应用概率、应用数理统计和运筹学的一个边缘分支学科．

在我国四个现代化的建设中，各行各业对产品可靠性问题愈来愈重视，迅速地推动了可靠性事业的发展．然而，由于过去可靠性的基础教育和理论研究十分薄弱，致使许多科技人员和管理人员对可靠性的基础知识了解较少，不能完全适应可靠性工作的需要．为此，我们编著了这本《可靠性数学引论》．

本书试图简要介绍可靠性数学的基础理论．在取材时，尽可能包括可靠性数学理论的基本内容、基本模型和方法．除了把文献中的结果加以统一整理外，还包含了一些新的尚未发表的结果．由于篇幅的限制，同时考虑读者的广泛性，不得不舍弃许多更深入的理论问题和某些虽然重要但较特殊的系统的讨论．

本书对可靠性的各种基本概念给出了严格的数学定义，对一些基本的结论和公式尽量给出数学证明．阅读本书只需具备微积分和初等概率论的基本知识．

本书大体上分为两部分，除第一章是基础性的以外，第二章至第八章主要讨论可靠性的概率模型，第九章至第十一章讨论可靠性的统计模型．具体安排如下：第一章介绍可靠性理论中常见的寿命分布．第二至第五章讨论不可修系统，其中第二章讨论基本的不可修系统，并介绍了简单的最优分配问题，第三、四、五章分别介绍分析大型系统的三种工具：网络、故障树和结构函数．第六、七章讨论马尔可夫型和非马尔可夫型的基本的可修系统．第八章

介绍基本的维修策略模型．最后三章初步介绍寿命数据的统计分析方法，其中第九章讨论指数模型，第十章讨论威布尔分布等其它分布类型和非参数方法，第十一章介绍可修系统故障数据的处理．书末列出了主要参考文献．

对于有志于从事可靠性理论研究的读者，这是一本较为合适的基础性的入门书．本书可作为理工科高年级学生和研究生的教学参考书． 对数学专业（概率统计和运筹学等专门化）的学生，本书可以作为可靠性数学的教材． 对非数学专业的学生，可以选择一些章节作为选修课教材．本书也可作为工程技术人员和数学工作者学习和了解可靠性基础理论的参考书．

本书的初稿曾以讲义的形式，多次为理工科学生和研究生开过课，也曾多次为高等院校教师和工程技术人员办过讲习班．本书是在讲义的基础上，广泛吸取许多读者的意见和建议，经过全面修改和补充而成的．在此，我们谨向广大读者表示深切的谢意．

作者衷心感谢徐光煇同志的鼓励和支持，他对本书的原稿提出过很多宝贵意见．

由于作者水平所限，错误在所难免，欢迎广大读者批评指正，以求改进．

作　者

1984年6月于中国科学院应用数学研究所

目　　录

引　言

§1. 可靠性数学理论的背景和研究方法

现代技术的不断进步，推动了可靠性理论迅速发展，也促成可靠性数学理论日趋完备.

可靠性数学理论大约起源于本世纪三十年代. 最早被研究的领域之一是机器维修问题[82],[66]. 另一个重要的研究工作是将更新论应用于更换问题[55],[30]. 此外，在三十年代威布尔 (Weibull)[80]、龚贝尔 (Gumbel)[44] 和爱泼斯坦 (Epstein)[37] 等研究了材料的疲劳寿命问题和有关的极值理论.

可靠性问题只是在第二次世界大战前后，才真正开始受到重视. 其基本原因之一是军事技术装备越来越复杂. 复杂化的目的在于使技术装备具有更高的性能. 但是装备越复杂，往往就越容易发生故障. 到了复杂化的程度严重影响设备可靠性时，设备复杂化也就失去了意义. 因此，复杂化和可靠性之间存在着尖锐的矛盾. 另一个基本原因，新的军事技术装备的研制过程是一场争时间争速度的竞赛. 但是研制周期又很长，经不起研制过程的重大反复. 这就需要有一整套科学的方法，将可靠性的考虑贯穿于研制、生产和使用维修的全过程. 因此复杂设备的可靠性成了相当严重而又迫切需要解决的问题. 从五十年代至今，可靠性理论这门新兴学科以惊人的速度发展着，各方面都已积累了丰富的经验. 可靠性理论的应用已从军事技术扩展到国民经济的许多领域. 随着可靠性理论的日趋完善，用到的数学工具也越来越深刻. 可靠性数学已成为可靠性理论的最重要的基础理论之一.

要提高产品的可靠性，需要在材料、设计、工艺、使用维修等多方面去努力. 因此可以说可靠性的改善主要是一个工程问题和管

理问题. 可靠性数学在其中所占的份量并不是很大的. 然而，作为一个必不可少的工具，可靠性数学在可靠性理论中有着特殊的地位. 可靠性理论是以产品的寿命特征作为其主要研究对象，这就离不开对产品寿命的定量分析和比较，从这种意义上来看，可以说，可靠性理论是一门定量的科学. 可靠性的许多基本概念的定义是用数学术语给出的，不理解这些基本概念的严格数学定义，往往会在实际工作中产生概念混乱. 同时，一个可靠性工作者只有熟悉可靠性理论中最基本的数学模型和数学方法，才有可能在工作中根据具体问题，提出既不脱离实际、又在数学上可能解决的合理的数学模型. 因此，可靠性数学与可靠性工程、可靠性管理等其它手段紧密配合，就能发挥其应有的作用.

一般来说，产品的寿命是一个非负随机变量. 研究产品寿命特征的主要数学工具是概率论. 也许有人会说，可靠性数学只是概率论的一个简单应用，不值得去特别地发展它. 美国的可靠性数学专家巴罗 (Barlow) 和普劳斯钦 (Proschan) 指出[19]: 这种目光是短浅的，就像有人说，概率论本身只是标准的数学理论的一个简单应用，而不值得去特别地发展它的情形一样. 可靠性问题有它本身的结构，且反过来刺激了概率论中一些新领域的发展. 因此，可靠性数学成了应用概率和应用数理统计的一个重要分支. 同时，在可靠性的研究中，又与决策问题和各种最优化问题有紧密的关系，这就决定可靠性数学又是运筹学的一个重要分支.

在解决可靠性问题中所用到的数学模型大体可分为两类: 概率模型和统计模型. 概率模型是指，从系统的结构及部件的寿命分布、修理时间分布等等有关的信息出发，来推断出与系统寿命有关的可靠性数量指标，进一步可讨论系统的最优设计、使用维修策略等等. 统计模型是指，从观察数据出发，对部件或系统的寿命等进行估计、检验等. 本书第九、十、十一章讨论的是统计模型，其它各章的绝大部分是讨论概率模型的.

§ 2. 评定产品可靠性的数量指标

粗糙地讲，由一些基本部件(其中也可以包括人)组成的完成某种指定功能的整体，称之为**系统**. 系统的概念是相对的. 例如一个核电站可以看成一个系统，其中的安全保护装置可以看成是它的一个部件. 但是，如果我们单独地研究安全保护装置，则可以把它看成是一个系统，它也是由某些部件组成的完成某种指定功能的整体. 在可修系统中，组成系统的部件不仅包括物，也可以包括人——修理工.

产品(部件或系统)丧失规定功能称为**失效**或**故障**. 通常，对不可修产品称失效，对可修产品则称故障. 在讨论具体问题时，往往难以明确加以区分. 因此，我们把“失效”和“故障”看成是同义词.

产品的寿命是与许多因素有关的. 例如，该产品所用的材料，设计和制造工艺过程中的各种情形，以及产品在贮存和使用时的环境条件等. 寿命也与产品需要完成的功能有关. 当产品丧失了规定的功能，即当产品失效，它的寿命也就终止. 显然对同一产品，在同样的环境条件下使用，由于规定的功能不同，产品的寿命将会不同.

我们通常用一个非负随机变量 X 来描述产品的寿命，X 相应的分布函数为

$$F(t)=P\{X\leqslant t\},\quad t\geqslant 0 \tag{1}$$

有了寿命分布 $F(t)$，我们就知道产品在时刻 t 以前都正常 (不失效)的概率，即产品在时刻 t 的生存概率

$$R(t)=P\{X>t\}=1-F(t)=\bar{F}(t) \tag{2}$$

其中 $\bar{F}(t)=1-F(t)$ 是本书中多次要用到的简写记号. (2)式的 $R(t)$ 称为该产品的**可靠度函数**或**可靠度**. 由公式(2)可知，$R(t)$ 是产品在时间 $[0,t]$ 内不失效的概率. 因此，可靠度也可定义为：产品在规定的条件下，在规定的时间内，完成规定功能的概

率. 对于一个给定的产品，规定的条件和规定的功能确定了产品寿命X这个随机变量，规定的时间就是公式(2)中的时间$[0, t]$. 公式(2)是这里可靠度定义的数学表述形式. 产品的**平均寿命**是

$$EX = \int_0^\infty t dF(t) \tag{3}$$

不可修产品的主要可靠性数量指标是可靠度及平均寿命（记为 MTTF). 假定时刻$t=0$产品开始正常工作，若X是它的寿命，则产品的运行随时间的进程如图 1 所示. 由于没有修理的因素，产品一旦失效便永远停留在失效状态. 此时，可靠度公式(2)及平均寿命公式(3)描述了不可修产品的可靠性特征.

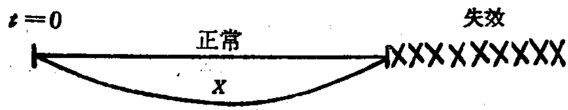

图1　不可修产品

可修产品的情形要复杂些. 由于有修理的因素，产品故障后可以予以修复. 此时产品的运行随时间的进程是正常与故障交替出现的. 如图 2 所示，其中X_i和Y_i分别表示第i个周期的开工时间 (up-time) 和停工时间 (down-time), $i=1, 2, \cdots$. 在开工时间内产品处于正常状态，在停工时间内产品处于故障状态.一般，$X_1, X_2, \cdots$或$Y_1, Y_2, \cdots$不一定是同分布的. 描述可修产品的可靠性数量指标主要有

1）首次故障前时间分布

产品**首次故障前时间X_1的分布**为

$$F_1(t) = P\{X_1 \leqslant t\} \tag{4}$$

首次故障前平均时间（记为 MTTFF）是

$$\text{MTTFF} = EX_1 = \int_0^\infty t dF_1(t) \tag{5}$$

对可修产品，我们也常常用可靠度的概念，它定义为

$$R(t) = P\{X_1 > t\} = \bar{F}_1(t) \tag{6}$$

它表示可修产品在$[0, t]$时间内都正常的概率，与前面可靠度的

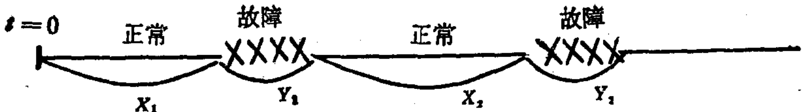

图 2　可修产品

一般定义一致.

如果一个可修产品一旦发生故障将要产生灾难性后果的情形，首次故障前时间分布及其均值是该产品最重要的可靠性数量指标.

2）可用度

对于一个只有正常和故障两种可能状态的可修产品，我们可以用一个二值函数来描述它. 对 $t \geqslant 0$,令

$$X(t) = \begin{cases} 1, & \text{若时刻 } t \text{ 产品正常} \\ 0, & \text{若时刻 } t \text{ 产品故障} \end{cases}$$

产品在时刻 t 的**瞬时可用度**定义为

$$A(t) = P\{X(t) = 1\} \tag{7}$$

即时刻 t 产品处于正常状态的概率. 瞬时可用度 $A(t)$ 只涉及时刻 t 产品是否正常,对 t 以前产品是否发生过故障并不关心.

在瞬时可用度 $A(t)$ 的基础上,进一步定义 $[0, t]$ 时间内**平均可用度**为

$$\tilde{A}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t A(u)du \tag{8}$$

若极限

$$\tilde{A} = \lim_{t \to \infty} \tilde{A}(t) \tag{9}$$

存在,则称 $\tilde{A}$ 为**极限平均可用度**. 而若极限

$$A = \lim_{t \to \infty} A(t) \tag{10}$$

存在,则称其为**稳态可用度**. 显然，若稳态可用度 A 存在，则极限平均可用度必存在,且有 $\tilde{A} = A$.

可用度是可修产品重要的可靠性指标之一. 在工程应用中特别感兴趣的是稳态可用度. 它表示产品经长期运行，大约有 A 的

时间比例处在正常状态.

3) $(0, t]$ 时间内产品故障次数的分布

可修产品随时间的进程是一串正常和故障交替出现的过程. 因此,对 $t>0$, 产品在 $(0,t]$ 时间内故障次数 $N(t)$ 是一个取非负整数值的随机变量. 产品在 $(0,t]$ 时间内**故障次数的分布**为

$$P_k(t)=P\{N(t)=k\},\ k=0,1,2,\cdots \tag{11}$$

产品在 $(0,t]$ 时间内**平均故障次数**为

$$M(t)=EN(t)=\sum_{k=1}^{\infty}kP_k(t) \tag{12}$$

当 $M(t)$ 微商存在时,称

$$m(t)=\frac{d}{dt}M(t) \tag{13}$$

为产品的**瞬时故障频度**. 在工程应用中,更感兴趣的是产品的**稳态故障频度**

$$M=\lim_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t} \tag{14}$$

如果极限存在的话.

$M(t)$ 和M也是重要的可靠性数量指标. 例如,在更换问题的研究中,它告诉我们大约需要准备多少个备件.

可修产品的可靠性数量指标还有很多. 例如,**平均开工时间**(MUT 或 MTBF)是

$$\mathrm{MUT}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i \tag{15}$$

平均停工时间为

$$\mathrm{MDT}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EY_i \tag{16}$$

平均周期是

$$\mathrm{MCT}=\mathrm{MUT}+\mathrm{MDT} \tag{17}$$

除了反映可修产品自身的可靠性数量指标外,有时,我们还需要反映修理设备(修理工)忙闲程度的有关指标: 修理设备忙的瞬

时概率

$$B(t)=P\{\text{时刻 } t \text{ 修理设备忙}\} \tag{18}$$

和修理设备忙的稳态概率

$$B=\lim_{t\to\infty}B(t)$$

若此极限存在．B 表示产品经长期运行大约有多长的时间比例修理设备是忙的．$B(t)$ 或 B 是反映修理能力的配备是否合理的一个数量指标．这些指标在形式上与瞬时可用度和稳态可用度一样，在求法上也类似．

对一个较为复杂的系统，瞬时可靠性数量指标往往不容易求到．在多数的场合，只能求出其相应的拉普拉斯变换（Laplace 变换，简记为 L 变换）或拉普拉斯-斯蒂尔吉斯变换（Laplace-Stieltjes 变换，简记为 LS 变换），它们一般不容易反演出来．但是有关的平均值或稳态指标通常比较容易得到．

第一章　常见的寿命分布

本章讨论常见的寿命分布，其中包括连续型的指数分布、伽玛分布、威布尔分布、极值分布、对数正态分布和截尾正态分布，离散型的二项分布、几何分布、负二项分布、普阿松分布和离散威布尔分布。此外，还介绍了二维指数分布，及寿命分布类的概念。

§1.　寿命分布和失效率函数

§1.1　剩余寿命分布

在引言中，我们已经引进了产品的寿命和寿命分布的概念。在那里公式(3)给出的平均寿命可以进一步写为

$$EX=\int_0^\infty \bar{F}(t)dt=\int_0^\infty R(t)dt \tag{1}$$

这是因为

$$\begin{aligned}EX&=\int_0^\infty t\,dF(t)=\int_0^\infty\int_0^t du\,dF(t)\\&=\int_0^\infty\int_u^\infty dF(t)du=\int_0^\infty[1-F(u)]du\end{aligned}$$

假定产品工作到时刻 t 仍然正常的条件下，用 $F_t(x)$ 表示产品的**剩余寿命分布**。于是有

$$F_t(x)=P\{X-t\leqslant x\,|\,X>t\}=\begin{cases}\dfrac{F(x+t)-F(t)}{1-F(t)}, & 当\ x\geqslant 0\\ 0, & 当\ x<0\end{cases} \tag{2}$$

或

$$\bar{F}_t(x)=\frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)},\ 当\ x\geqslant 0 \tag{3}$$

易验证，对固定的 $t\geqslant 0$，$F_t(x)$ 是关于 x 的一个通常的分布函数．用公式(1)，产品的**平均剩余寿命**为

$$
\begin{aligned}
m(t) &= E\{X-t|X>t\} = \int_0^\infty x\,dF_t(x) = \int_0^\infty \bar{F}_t(x)dx \\
&= \int_0^\infty \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}dx = \int_t^\infty \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)}dx \\
&= \frac{1}{\bar{F}(t)}\left\{\mu - \int_0^t \bar{F}(x)dx\right\} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

其中 $\mu = EX$ 为产品的平均寿命．

§1.2 失效率函数

为了讨论简单起见，在这里我们只对连续型的随机变量和离散型的随机变量，分别来定义失效率函数．

设产品的寿命为非负连续型随机变量 X，其分布函数为 $F(t)$，密度函数为 $f(t)$．定义

$$r(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)},\ 对\ t\in\{t: F(t)<1\} \qquad (5)$$

为随机变量 X 的**失效率函数**，简称**失效率**(或**故障率**)．

$r(t)$ 有如下的概率解释．若产品工作到时刻 t 仍然正常，则它在 $(t, t+\Delta t]$ 中失效的概率为

$$
\begin{aligned}
P\{X\leqslant t+\Delta t|X>t\} &= \frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{1-F(t)} \\
&\sim \frac{f(t)\Delta t}{\bar{F}(t)} = r(t)\Delta t \qquad (6)
\end{aligned}
$$

因此，当 Δt 很小时，$r(t)\Delta t$ 表示该产品在 t 以前正常工作的条件下，在 $(t, t+\Delta t]$ 中失效的概率．

$r(t)$ 还有另一个概率解释．让一批 N 个同型产品同时独立地工作．记 $n(t)$ 为产品在 $(0,t]$ 时间内的失效个数，显然它是一个非负整值随机变量．先令 $N\to\infty$，再令 $\Delta t\to 0$，以概率 1 有

$$\frac{n(t+\Delta t)-n(t)}{N-n(t)}\cdot\frac{1}{\Delta t}\to r(t) \qquad (7)$$