递归函数论

莫绍揆编著

上海科学技术出版社

递归函数論

莫紹揆 編著

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书闡述递归函数論的最基本內容，計分八章，即：五則函数、算子、初等函数集、原始递归函数集、一般递归函数集、递归生成的函数集、謂詞与集合、判定問題，第一章之前的緒論介紹了預备知識．全书以算子概念貫串始末，系統总結了这方面的理論．

全书叙述深入淺出、注意到对基本概念的讲深讲透和基本技巧的訓练．每节之末附有足量的习題，是递归函数論的較好的入門书，只須稍具数理邏輯知識和一定数学訓练的讀者即可看懂．

本书可供高等院校"递归函数論"課程作为教材或教学参考书，也可供有关人員自学与参考．

递 归 函 数 論

莫 紹 揆　編 著

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路 450 号）

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

上海市印刷四厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本 850×1156 1/32　印張 10 2/32　排版字数 248,000

1965 年11月第 1 版　1965 年11月第 1 次印刷

印数 1—1,900

統一书号 13119·674　定价(科六) 1.50 元

序

本书是根据作者几年来讲授递归函数論的讲义整理而成的.它基本上只是递归函数論的入門书，对于較为高深的部分幷未涉及,但比較淺近的內容則力求完备.

本书强調基本概念的澄清与基本技巧的掌握；特別需要指出的是:本书以算子概念作为貫串全书的一条綫索.

算子概念的重要性尽人皆知,在递归函数論中,作者认为,只当使用算子概念后，对函数的組成、函数集等概念才能較好地理解,“参数”的概念才获得更好的說明．因此,本书一开始便引进了一套旣是有系統又是很方便的有关算子的符号(除却这点外,本书基本上沒有使用新符号)．这套符号其实仍是慣用的符号．不过,通常的引入是零星的,不够系統,而这里特意系統地使用罢了．比如,关于极限的符号,最初使用“$x\to a$ 时 $f(x)\to l$”，后来才漸漸改为“$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$”；关于傅里叶变式的符号,最初使用“$F(f(x))$”,后来漸漸改用“$F(f(x),\ y)$”，以至“$F(f(x),\ x\to y)$”，如把最后一式改成“$\mathop{F}\limits_{x\to y} f(x)$”，那便是本书中所用的符号了．关于求导数及求积分的符号,目前数学中习慣使用的和本书的符号相差还远,但只要懂得本书中所用符号的精神，卽使不使用新符号也必然对这些概念有进一步的理解．在递归函数論中,有关的符号还不完备,因此及早使用算子的符号是有好处的.

利用算子概念后，对各类递归函数集及各种函数的組成将有进一步的理解．比如說,在这許多函数中,为什么人們特別重視初等函数、原始递归函数、一般递归函数这三种．在以前,这只能当作旣成事实来接受,利用算子概念后,至少得到了初步的回答.

关于基本技巧，本书强调了下列这些：找出一函数的組成过程，把一謂詞的特征函数写出，把一算子作用于一函数的結果写成显式，…….几年来的教学經驗表明，熟习了这些技巧后，无論閱讀遞归函数論方面的文章，或者从事这方面的研究工作，都会减少很多的困难.

本书沒有包括下列內容(它們本属于“遞归函数論”范疇的)：Turing 机器論，遞归算术，遞归分析. 对后两者，作者拟日后分别写书，另行詳細介紹. 至于 Turing 机器，宜在算法論中討論.

遞归函数論的应用是很广泛的，为帮助讀者在今后学习中掌握重点，下面大略介紹一下它的主要应用，当然，这是不詳尽的，而且也是叙述得不够严格的.

遞归函数論的应用首先在于“遞归过程”的研究. 我們是經常碰到遞归过程的，例如，从加法到乘法，从乘法到乘方，便是一种特殊的遞归过程(即所謂复迭式)；又如 $n!$, $\sum_{x=0}^{n} f(x)$ 等的計算也是遞归过程；数学归納法，乃至日常用語中的“如此类推”、“等等，一直下去”也都反映了遞归过程. 由此不难想象到遞归过程的使用是极为广泛的. 遞归函数論既以遞归过程作为自己的主要研究对象，故而遞归函数論在这有关方面是有巨大的应用的.

自从近代电子計算机使用以来，近似計算和程序設計便被广泛应用而发展了. 由于电子計算机的需要，近似計算特别着重迭代过程，在程序設計中最重要而最难掌握的是循环的編制，而迭代过程与循环却恰巧是标准的遞归过程. 此外，时序綫路中的內部状态、自动机中的反饋等等，也都反映遞归过程. 由于遞归函数論的研究，可以对这些遞归过程的性质有所了解；或者，更提供出一些新的更有力的或更簡单的遞归过程. 遞归函数論的研究成果自然将对这些学科有巨大的应用.

直到目前，遞归函数論的最重要应用在于对“能行性”的研究. 自从人們注意能行性以来，一直在找尽量多的能行性工具和能行

性的标准. 而最重要的能行性工具是原始递归式(最近才添入摹状式及半递归式),而"邱吉論題"又肯定了可能行計算的数論函数是和半递归(一般递归)函数等同的,因此无論能行性工具或能行性标准都在递归函数論中. 凡应用能行性的地方,都可以說是递归函数論应用的地方. 因此,递归函数論可应用于数理邏輯,澄清了数学基础中好些問題;又应用于算术,使算术(自然数論)出現一个新面貌;最近又应用于数学分析,出現了递归分析.

此外,我們不能不着重提一提递归函数論和数論的关系. 一般人认为数論是以自然数为其研究对象的,但作者却认为目前的数論是以整数为其研究对象的;因为如果沒有負整数,就沒有通常的减法,目前的数論是难以发展的. 真正以自然数为其研究对象的应該是递归函数論,而它的一分支,即递归算术(递归数論)便正是用递归函数論的方法来处理通常的数論問題,由于引用了一些新的观点,能够澄清了好些难題. 大家都知道自然数是数学中最重要最根本的研究对象之一,那么作为研究自然数的递归函数論,其重要性也是很明显的了.

在目前已出版的递归函数論的有关书籍中,几乎全是沒有习題的. 作者經过几年来的工作,已积累了若干习題,現特分列于各节之末. 这些习題有难有易,数量也不太少,对讀者說来是难以一次把它們做完的. 因此,讀者在学习时可酌量选一些,其余的留待进一步研究、复习之用.

本书是由讲义整理而成的,在整理过程中也添了一些新的內容,在整理和添新时很可能会出現錯誤,希望讀者不吝指正.

作者 1964 年 于南京

目 录

緒　論

§1　自然数集与数論函数

在递归函数論中，我們只以自然数(正整数及零)作为討論的对象．为什么要作这个限制呢？作了这个限制以后会不会使递归函数論的应用范圍大大縮小呢？我們先来解决这两个疑問．

递归函数論所使用的主要方法(卽下文的摹状式及递归式)是从自然数集的研究而产生的，直到目前为止，它只能使用到自然数集去；卽使推广，但推广后的集合本质上仍和自然数集相同．因此，最好把討論自始至終限于自然数集，以省却許多麻煩．这便是把討論对象限于自然数集的主要原因．

作了这个限制后，递归函数論的应用范圍会不会大大縮小呢？不会的！这可以从下列几点看出来：

第一，有了自然数以后，

整数可以看作自然数对，如 $+3=(3, 0)$，$-3=(0, 3)$；

有理数可以看作自然数的三元矢，如

$$+\frac{1}{2}=(1, 0, 2), \quad -\frac{1}{2}=(0, 1, 2);$$

实部虛部为有理数的复数可以看作自然数的六元矢，如

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i=(1, 0, 2, 0, 1, 3);$$

实数可以看作自然数叙列；

复数可以看作自然数叙列对(或看作一种特殊的自然数叙列)．

要把实数看作自然数叙列，可以采用下法：把每一实数先写成整数加正小数之形，再把小数部分展成二进制小数(有穷二进小数

可化成 111… 形)，这时，用叙列的首两项表示該实数的整数部分，第三项表示小数点与“1”之間“0”的个数，从第四项起，叙列的每项表示相邻两个“1”之間“0”的个数．例如，对于实数 $-2.2492=-3+0.7508$，把其正小数部分展成二进制便可写成

$$-3+0.11000000011010001\cdots,$$

故这实数可用自然数叙列

$$0,\ 3,\ 0,\ 0,\ 8,\ 0,\ 1,\ 3,\ \cdots$$

来表示；反之，自然数叙列

$$0,\ 2,\ 1,\ 4,\ 0,\ 2,\ 3,\ 0,\ 0,\ 1,\ \cdots$$

便表示下列的实数：

$$-2+0.0100001100100011101\cdots$$

写成十进制便是 $-2+0.2735\cdots$

这样一来，通常在数学中所討論的各种数，都可表成自然数組(自然数有限叙列)或自然数(无穷)叙列．这是一点也不足怪的，因为人們对各种数的认識，正是由自然数出发，一步一步地深入后才认識的．至于由实数或复数出发，进一步討論矢量、矩陣、超复数系等等，其推广过程更属显而易見．它們之可以化归到自然数序列(有穷或无穷)更是明显的事了．因此，即使递归函数論仅限于討論自然数集，但这一点也不妨碍它将来应用到数学各方面中去．

其次，各学科的研究过程及其結果，往往都可用符号(而且是有限个符号)来表示的，一門学科发展越久越成熟，则它所使用的符号体系便越能表达該学科的主要內容．应用符号来表示时，虽可以有种种式样(如各符号之間有高有低、有大有小；符号的排列亦有直綫形、曲綫形、平面形乃至立体形等等)，但我們恒可以都改用直綫形(即各符号并列成一行的形状)来表示．这样，如把各基本符号看作字母(必为有限个，可設为 k 个)，把一行并列的字母看作“字”，那末，各学科研究过程、对象及其結果都可表成“字”．如果我

們把这 k 个字母看作 k 进制中的 k 个基本数字，而把每个"字"看作一个 k 进制数字．这样，任何"字"便对应于一个自然数．既然各科的研究过程及結果可用"字"来表示，那末也就可以用自然数来表示了．由此看来，即使我們把研究范圍限于自然数，一点也不会影响递归函数論应用范圍的广泛性．

这里必須强調指出，我們絕对沒有輕視有理数以及实数，并沒有抹煞它們的独立性及其重要性，也沒有說在任何情况下均必須把有理数、实数、复数等依上述方式化归为自然数后才容許討論．我們只是說，由于递归函数論所使用的方法本质上最适用于自然数．因而，对递归函数論說来，最好只限于自然数，然后通过上述方法把递归函数論应用到有理数以及实数諸方面去．如果在别門学科（比如数学分析）中需要而且可以直接討論有理数及实数，那末当然可以直接討論而无須先化归为自然数．即使在递归函数論中，有时也可以直接討論有理数及实数的，这时我們也毫不迟疑地从事直接討論，不过，递归函数論本质上是限于自然数的．

凡以自然数集为定义域及值域的函数叫做**数論函数**．递归函数論所討論的数旣限于自然数，它所討論的函数也就限于数論函数了．因此，下文的所謂"数"便专指自然数，所謂"函数"便专指数論函数．至于推广函数"值域"为有理数或实数或复数，固未尝不可，但使用的方法与本书的方法相距太远，故我們不作这类推广．

习 題

1．試述"十进"小数与"二进"小数互化的法則，并将下列各数由一种进位制表示化为另一种进位制表示：

$$0.7182;\quad 0.1416;\quad 0.100111;\quad 0.00001.$$

2．試将下数列所表示的实数求出（誤差不超过 10^{-4}）：

(1) $0, 3, 0, 1, 0, 4, 1, 0, 8, 9, \cdots$;

(2) $5, 0, 40, 1, 0, \cdots$.

§2 函数与依变元

通常数学书中所說的“函数”，实际上兼指两个截然不同的概念，一是依变元(或因变元)，又一是由自变元而求依变元的“运算”．通常的数学书中对函数所下的定义是：

“若指定变元 x 的任何一个确定的值，相应地变元 y 便有确定的值，则变元 x 就叫做自变元，而变元 y 就叫做变元 x 的函数”．

照这里所定义的“函数”，便相应于上述第一个概念——依变元．但是，通常书里又有“反函数”的定义：

“若将 y 考虑作自变元，将 x 考虑作函数（即依变元)，则由关系 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 叫做已知函数 $f(x)$ 的反函数，而 $f(x)$ 叫做直接函数”．

照字面解釋，这个定义是很模糊的(初学者感到难懂也就在于此)，因为把 x 考虑作依变元从而确定一函数（依变元）$\varphi(y)$，这 $\varphi(y)$ 不正是 x 嗎？我們只能說 x（即 $\varphi(y)$）是 $f(x)$ 的“变元”，那能說 x 是 $f(x)$ 的“反函数”呢？若說“把变元 x 看作函数时，变元 x 便是函数 $f(x)$ 的反函数”，这不更令人莫明其妙嗎？这样定义的反函数，不但无法理解，而且絕非通常所引进的“反函数”的概念．事实上，上面这句話应該这样来理解：“如果运算 f 为由 x 求 y 的运算，即如果 $y=f(x)$，那末，由 y 求 x 的运算 φ（这时 $x=\varphi(y)$）便叫做运算 f 的反运算”．因此，在“反函数”概念中，所謂函数实指“运算”．如照通常书那样，把“函数”看作和“依变元”无别，那末“反函数”这名便很难理解了．反之，如果我們永远使用“反运算”一詞，则初学者必将容易理解得多．

“依变元”与“运算”既为两个截然不同的概念，当然应該加以区分．在通常数学用語中，只有下列各情形是区别得很清楚的：

"加"(运算) 与 "和"(依变元)

"减"(运算) 与 "差"(依变元)

"乘"(运算) 与 "积"(依变元)

"除"(运算) 与 "商"(依变元)

至于"自乘"(运算)与"方幂"(依变元),"开方"(运算)与"方根"(依变元)已經有混用的现象.自此以后,便不作区別了,不管"运算"或"依变元",都用同样的术語,使用同样的符号.以致初学者常常难于区別.

最奇怪的是下面这种现象.在高等数学中引进的符号都是就依变元而引进的,例如有关极限、积分的符号$\left(\lim\limits_{x\to a}、\int dx\right)$等等,但求导数的符号却有两套:一套是专門对依变元使用的,如$\frac{d}{dx}$、$\frac{\partial}{\partial x}$等,另一套是专門对函数关系使用的,如"$f'$"、"$f_1$"、"$f_2$"等(后两者通常写为"$f_x$"、"$f_y$",这却旣不是专对依变元使用,又不是专对函数关系使用,而是一种頗不合理的符号).但是,由于在高等数学中人們已經长期地把函数关系与依变元混用的緣故,竟然大量地出現把$\frac{d}{dx}$对函数关系使用而把"$'$"对依变元使用的现象,例如下列的式子在高等数学书或論文中絕不是稀有的:

$$\frac{df}{dx},\ \frac{\partial f}{\partial x}\quad \left(\text{把}\ \frac{d}{dx}\ \text{等对函数关系使用}\right),$$

$$(x^2+2x)'\quad (\text{把"}'\text{"对依变元使用}),$$

这种情况充分反映了目前在数学中对"依变元"与"函数关系"这两概念的混淆程度.

为什么会发生这样的混淆呢?对此作一些較詳細的探討.

設有函数关系f(一元)、g(二元)、h(三元),如果在它們的变元处分別填以一些表示数量的式子(可为常数,可含有变元),所得的結果当然是一些表示数量的式子,叫做这些函数关系的**填式**,也叫做这些函数关系当变元为这些数量时的**值**(尤其当填以常数

时更是这样称呼)．例如

$$f(3), \quad g(2, 4), \quad h(3, 1, 0)$$

都是填式,它們都是各函数关系在相应变元处的值;如果所填的数量含有变元,則填式便是一些依变元,例如

$$f(3+x), \quad g(x^2, x+y), \quad h(0, x, 4+y)$$

便是一些依变元．这些依变元当然与 f、g、h 有关,但由这些依变元并不能确定函数关系 f、g、h．如果我們限定各变元处必須填以变元本身(不填以复杂的式子),而且不同变元处填以不同的变元(甚至要求:第一变元处填以 x_1,第二变元处填以 x_2, $\cdots$),那末所得的填式(它們为依变元)便与原函数关系一一对应了,因此这个填式便特称之为原函数关系的**命名式**．例如

$$f(x_1), \quad g(x_1, x_2), \quad h(x_1, x_2, x_3)$$

便分別是函数关系 f、g、h 的命名式.

如果我們經常使用依变元,那末給出一函数关系后,我們永可改用它的命名式(这是依变元),这很容易作到;反之,如果我們經常使用函数关系,那末給出一依变元后,我們如想作出表示相应的函数关系的符号却不是很容易作到的．例如,与下列依变元相应的函数关系的符号却未曾作出:

$$x^2+2x+3, \quad g(x^2y, x+y).$$

要作出相应的函数关系的符号,只能采用下法:命

$$f(x)=x^2+2x+3, \quad \tilde{g}(x, y)=g(x^2y, x+y).$$

这样才能勉强得出表示相应函数关系的临时符号(f 及 $\tilde{g}$).

举例来說,如果我們使用 $\dfrac{d}{dx}$、$\dfrac{\partial}{\partial x}$(它們是对依变元使用的),要表示上两式的导数可立即写成

$$\frac{d}{dx}(x^2+2x+3), \quad \frac{\partial}{\partial x}g(x^2y, x+y).$$

但如果使用“$'$”及“f_1”等符号,我們必須依上法引入 f 及 $\tilde{g}$ 后才能使用,即

$$f'(x), \quad \tilde{g}_1(x, y)$$

表示上两式的导数．两相比較，自然以作用于依变元的符号更便于运用．

因此，在数学中几乎完全使用依变元而很少使用函数关系．卽使創造了好些表示函数关系的符号（如 sin、log 等），但使用时永远只使用它們的命名式（如 $\sin x$、$\log x$ 等），从未单独使用过 sin、log 这些符号（直到现在，恐怕还有人錯誤地认为：只有 $\sin x$、$\log x$ 才有意义，而 sin 与 log 是沒有意义的！）．如果眞的有人认为 sin、log 等只是沒有意义的符号，那末在数学界有函数关系与依变元相混淆的現象便更是不足怪了．

但是，只要讀者注意一下便可看到，$f(x, y)$ 一般有两种意义，其一是指 f 的某个值（未定值），亦卽 f 在 (x, y) 处的值，这是将 $f(x, y)$ 作为依变元而使用的，作这用法时在"$f(x, y)$"之前可添入"值"一字，对其中的变元可作代入；另一是指作为 x、y 的函数 $f(x,y)$，这时 $f(x, y)$ 是作为命名式而使用的，这时卽使把 $f(x, y)$ 改为 f 仍然可以．如果这时并未突出函数关系 f（例如，如果"$f(x, y)$"为"x^2+2x+y"），那末总可在它前面加上"函数"或加上"(x, y) 的函数"字样，对其中的变元絕不可作代入．試看下列各例：

(1) $(x^2+x)^2$ 大于 100．旣可說"值 $(x^2+x)^2$ 大于 100"，又可作代入得"$(20^2+20)^2$ 大于 100"，故指依变元．

(2) $(x^2+x)^2$ 为四次多項式．这里如对 x 作代入則意义全不同了，故指运算（說得詳細些应是：相应于 $(x^2+x)^2$ 的函数关系是四次多項式）．

(3) 加法服从交換律、結合律．这时"加法"当然指"运算"；通常又說：函数 $x+y$ 服从交換律、結合律，但絕不能說"值 $x+y$ 服从交換律"．

(4) 两正数的和必大于該两数．这里"和"显然指依变元，我們

絕不能說，“两正数的加大于該两数”，即使說“两正数相加”，也必須說“其和大于該两数”(因只能比較依变元与自变元的大小，不能比較函数关系与自变元的大小)．

通过以上各例，讀者可以明白依变元与函数关系的区别了．

当然，如果引入足够的函数关系符号，那末使用命名式来代替函数关系的方法是可以避免的．例如，对上面所列举的例子(2)、(3)，可有三种方法引入相应的函数关系．第一，我們可說：

(2) 命 $f(x)=(x^2+x)^2$，則 f 是四次多項式．

(3) “$+$”服从交換律(亦即加法服从交換律)．

第二，亦可仿数理邏輯中那样，引入記号“λ”，用“$\lambda xf(x)$”表示“由 x 而計算 $f(x)$ 的函数关系”，因此可以說

(2) $\lambda x(x^2+x)^2$ 为四次多項式．

(3) $\lambda xy(x+y)$ 服从交換律．

但这两种方法，終究沒有使用命名式那么方便(这也是数学中习惯于使用命名式的原因)．第三种方法見 §4 末段(第 16 頁)．

数理邏輯中常常强調函数关系的重要性，认为在通常数学书中，大量使用依变元符号而少引入函数关系的符号、大量就依变元討論而少就函数关系来討論，这是一种不够理想的现象．但作者认为，为便于初学者理解，以及使用方便起見，使用依变元均比使用函数关系要适当一些．因此，本书中仍然主要是使用依变元的符号、就依变元(函数)而討論．但是讀者必須牢記，在所使用的依变元中，有些是指未定値(这是眞正的依变元的用法)，有些是指命名式(这实际上是指运算了)，必須把两者严格分清．只有在能够严格分清后，我們才可以从通常的使用方式中获到好处而避免其缺点．

习 題

在下列各語句中，哪些含 x 的式子是指的依变元？哪些則指的运算(函数

关系)?

1. $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$; 当 $|r|<1$ 时是收斂的,当 $|r|\geqslant 1$ 时是发散的.

2. 当 $|r|<1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ 的值为 $\frac{1}{1-r}$.

3. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 是对 n 递增的; $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 是递增函数.

4. 因为 n^2+1 是递增函数,故 n^2+1 永大于 0.

§ 3 可直接定义的函数

定义一函数可有两种办法:直接法及派生法. 本节中討論直接法.

直接法又可分成三种:表列法、图示法及直接給出运算法则法.

第一,表列法. 这便是一一地列出自变元的值与相应的依变元的值,写成一表,用这表来确定該函数. 当自变元的变值只有有限多个时,表列法行得通,也最为直捷;但当自变元有无限多个变值时,这方法便行不通了. 本书所討論的函数旣以自然数集为其定义域,故本法是行不通的.

第二,图示法. 把自变元的变值作为横坐标,依变元的相应的值作为纵坐标,参照坐标系确定一点;把这样所得的一切点均繪出,得到一图;用这图来确定該函数. 这便是图示法. 当自变元的变域及函数的値域有界时,这方法是行得通的(但当变域是到处稠密时,这方法只能給出近似值而不能給出精确的值);当自变元的变域或函数的値域无界时,这方法便行不通. 本书所討論的变域旣为自然数集,故本法仍行不通.

第三,直接給出运算法则法. 这便是直接說出当給定自变元的变值时如何求出依变元的相应值的方法. 例如,对下列各函数便可使用这方法而定义:

(1) $\boldsymbol{I}x=x$(么函数):函数的值与自变元的相同.

(2) $\boldsymbol{I}_{mn}(x_1, \cdots, x_m)=x_n$(广义么函数):函数的值与第 n 个