贝叶斯
风险决策工程

言茂松 编著

清华大学出版社

贝叶斯风险决策工程

言茂松 编著

清华大学出版社

内 容 简 介

本书是为处理在不确定条件下的决策问题．讲述了处理这类问题的理论和方法．内容理论联系实际，编入大量例子，便于初学者理解概念和掌握方法，并介绍了贝叶斯决策的最新发展，有一定理论深度，其丰富的内容可满足不同层次读者的需要．它可广泛应用于商业经营、工业管理、工程技术、医疗诊断、环境保护、系统规划、科学实验、农业、生物学、物理学和社会学等领域．

本书分十二章，第一、二章是数学基础，第三—六章讲述Bayes推断，第七—十二章讲述Bayes决策．

可作系统工程、管理工程信息科学等专业的大学生和研究生教材或教学参考书，也可供从事决策分析的科技工作者使用．

贝叶斯风险决策工程

言茂松　编著

☆

清华大学出版社出版

北京　清华园

北京市通县向阳印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

☆

开本：787×1092 1/16　印张：17.25　字数：409 千字

1989年11月第1版　1989年11月第1次印刷

印数：0001-3000

ISBN 7-302-00492-7/F·28

定价：3.85 元

序

决策问题和控制问题一样，是一个具有普遍意义的课题；大到一个国策的制定，小到一个行动的选择，它可能在几乎所有的科学技术、经营管理等领域内出现。如何科学地制定一个好的决策，无疑在实际上和在理论上都有重要意义。在环境和事态完全确定的条件下制定一个好的决策，有时虽然也不是一件简单的事情，但是毕竟一些规划数学和运筹学已经为我们提供了比较好的知识和工具；然而大量的决策问题，需要我们在未来环境和事态捉摸不定的条件下，事先作出来，决策者必须承担一定的风险，这时贝叶斯推断和决策就很有用，它给出了处理这一大类问题的一个系统的理论和有效的方法。本书正是这样一本系统地，由浅入深地介绍这一理论和方法的好书。

贝叶斯推断和决策方法不是一个完全新的方法；在很多运筹学，系统学的书籍中或多或少有此一章，然而事实上它的内容要丰富得多；这本书的内容证实了这一点；例如共轭分布族问题、信息价值与预后验决策问题、贝叶斯风险函数和决策函数问题、二元决策的尼曼-皮尔逊定理等等。这本书的每一章都是那样充实，以致于使我感到系统地介绍给读者是非常必要的；书中还包括了很多不同类型的例子，这对于初学者很有好处，有助于理解其概念，掌握其方法，然而这本书又没有停留在概念和方法上，其中大约有四章有一定的理论深度，这对于那些不满足于掌握一般概念和方法的读者是一个提高。因此这本书可以满足不同层次读者的需要，大体上可以适用于有关专业大学生和低年级研究生的水平，也适用于从事实际工作的工程师和决策分析者自学。

该书作者在美国加州贝克莱大学期间把这一理论和方法应用到电力系统的数据处理中，随后又应用到元件可靠性的参数估计和电力系统长期发展规划等方面都取得了很好的效果。一般来讲，这一理论和方法只是一个工具，针对具体问题，恰如其分地应用这一理论和方法是至关重要的。相信会有更多的读者在阅读了这本书之后，结合他的问题用一用，并且会取得好结果。

我很高兴将这本书郑重推荐给中国读者，希望它能丰富您的知识，增长制定决策的才干。

Eelix F.Wu(吴复立)* 一九八七年一月于美国

---

*吴复立为美国加州贝克利大学(UCB)电机与计算机科学系教授，曾任美国电力研究院(EPRI)顾问、美国加州太平洋煤气电力公司(PG&E)顾问、美国电子电气工程学会电路与系统汇刊(IEEE Trans. CAS)副总编辑。

前　言

生活中有大量的决策问题。如果你稍加思考就会发现除了少数无意识的动作之外，几乎你天天都在作决策，当然大多数的决策并不很重要，诸如今天带不带伞，是乘汽车还是骑自行车等等，除非它涉及某些特殊因素，有些决策是比较直截了当的，无需作特别的思考。然而有一些决策却不是那么简单明了，有时一个错误的决策可能造成严重的后果，这时一个决策方法和理论是很有用的。这类情况广泛出现在商业经营，工业管理，工程技术，科学实验，医疗诊断，系统规划，环境保护，农业科学，物理学，生物学以及社会学等等几乎所有的领域。

你会发现这一类决策有两个特点：一是它涉及未来不很确定的因素，你必须在信息不完全的条件下事先作出选择。为了作出一个好的决策，你应当利用一切可以利用的信息，减少未来事物的不确定性。这就是概率学的Bayes推断原理，它反映了成人的一类学习过程。二是你必须对你的决策所引起的后果承担责任，或者说你所承担的'风险'要最小，或者你所获得的'效益'要最大，而这些概念应当可以严格用统计学的语言加以描述，换言之，它涉及在统计学意义上的优化问题。由于这两个特点，这一类决策有时称作"统计学最优决策"，又称作"风险决策"。而作者更喜欢用"Bayes决策"这一名称，因为Bayes方法已经成为这一领域内人所共知的专用术语。更确切地说，这一方法和理论是：基于Bayes推断的统计学最优决策的方法和理论。

Bayes一词源出于18世纪英国的一个牧师Tomas Bayes，他首先发现了这个原理，然而随后它被错误地滥用了，以致于声名扫地。这个原理成为一个正式的方法和理论应当归功于Bruno de Finetti，Leonard J. Savaga还有其他人。而Bayes理论成为今天的样子却是1950年以后的事情。由于Bayes理论一开始就和统计最优决策相联系，因此它首先在商业和社会科学中获得很大好处，而在物理学中也有很好的记录，美国的两个商业学院的教授们曾对发展和推广这一方法和理论作出过贡献，特别是60年代和70年代的Howard Raiffa和Robert Schlaifer还有Harold Jeffreys，I. J. Good以及Dennis V. Lindley曾作过大量有意义的工作，从而建立了一个统一的理论体系和方法论。它具有一般性，它的概念和方法可以用到几乎所有的领域的各个方面，因此随后在工程技术、管理科学、系统运筹、医疗诊断等等方面崭露头角，"决策论"将会和"控制论"、"信息论"一样成为现代的信息和系统科学中一个重要分支，并且在某些方面与控制论和信息论是相通的，例如Bayes随机最优控制，Bayes最优估计就是三者交叉面上的两个例子。

按照Bayes统计学的观点，为了制定一个好的决策，应当利用所有能够获得的信息，包括样本信息和先于采样的所有信息，其中包括来自经验、直觉、判断的主观知识。按照Bayes统计学的观点，这些主观的知识同样是可贵的知识财富，应当正式地引入到统计推断和决策中去，而这正是经典统计学所不予考虑的。因此在这个意义上，

Bayes统计学可以看作是经典统计学的扩展，事实上经典统计学中的估计问题，假设检验问题都可以用Bayes推断和决策的观点来处理。而在没有任何先验知识的情况下它们就退化为经典统计学的处理方法。

这本书取名为《贝叶斯风险决策工程》，这表明它不是一本数学书(不是经典统计学的续篇)，而是一本重视物理概念、实际应用、和系统介绍这一方法论的教材和专著。对象是在各行各业中广大的决策分析者和决策者，以及他们的后备军——大学生和研究生。因此本书从大量的说明性例题出发建立一系列基本概念和方法，然后再给予严格的陈述和证明。这些例题涉及质量控制、钻油井问题、人材评估、医疗诊断、市场分析、生产管理、商业经营、参数估计等等。这些例题还有可能激起你用一用的兴趣，最后的归纳和提高也是有意义的，它会使你领悟到更深一层的道理，使得你用起来更放心，更主动，并为进一步的学习和研究打下基础。

本书的结构是这样组织的，除了第一、二章的数学准备外，本书可以划分为两大部分，即Bayes推断：第三至六章和Bayes决策：第七至十二章。每一部分又有两个水平，即大学本科生水平(第三、四章和第七至十章)和研究生水平（第五、六章和第十一、十二章）。如果对大学本科生或实际工作者教学，可以跨过并省去理论性较强的第五、六章和第十一、十二章，不会影响全书的系统性，而且可以在一个短学期(10周)中讲授，如果对研究生教学，讲授全部内容，用一个长学期(18周)较为合适。

学习本书只要有工科大学本科生的一般数学基础就可以了，如果学过概率学和数理统计等课程就更好。

本书是作者1981—1983年在美国加州贝克利大学(U. C, Berkeley)进修以及随后的研究和教学的成果。应当衷心感谢Felix F, Wu教授的鼓励和帮助，此外，还应当感谢清华大学校长高景德教授的推荐和支持。

言茂松　一九八七年

目　录

第一章　概 率 基 础

本书的主题是研究如何在不确定性条件下，制定一个最好的决策。而概率是不确定性的量化和数学语言，因此不难理解，概率学知识是本书的主要数学基础。

决策分析者面对的选择，往往要在未来事态不确定的条件下制定；而未来事态的不确定性往往意味着某种“机会”、“可能性”、或者“风险”等等；而这些“机会”、“可能性”、或者“风险”也许是不会大量重复出现的事件，甚至它只可能出现一次，古典概率的频率解释并不适用，因此有必要对概率的意义作新的解释，即概率的主观解释。

不论对概率作什么解释，概率的基本规律和性质是一样的。为了顺利阅读本书各章作好准备，这一章对有关概率的基本定义，规律和性质作一回顾。这些都是最低限度的基础知识，读者如果已经具备了这些基本知识，完全可以不阅读这一章，而直接从第三章开始，而不会遇到重大困难，这样可以节省您的时间。

1-1　不确定性的概率量测及其基本规律

概率学是数学中的一个分支，它建立在若干基本公理的基础上，在给出概率学的基本公理之前，有必要对某些定义和符号作些介绍。在一个涉及不确定性的问题中，我们不知道真实的情况，然而我们可以在一定条件下进行‘试验’；我们可以想象有不同的可能‘输出’，任何可能输出的集合被称作为一个‘事件’，一个事件不可能再分解为一系列小的事件，称作‘基本事件’，反之称作‘混合事件’；例如，‘价格是20元’这一事件是一个基本事件，那么‘价格大于20元’的事件就是一个混合事件，它可以分解为‘价格是21元’，‘价格是22元’，等等很多其他的基本事件。在研究不确定性问题时，人们感兴趣的‘事件空间’或‘样本空间’，它定义为所有可能基本事件的集合；例如你关心某一特定小时内顾客进入某一商店的人数，‘两个顾客进入’、‘五个顾客进入’等等是基本事件，而‘至少两个顾客进入’和‘不多于五个顾客进入’是组合事件；事件空间包括了所有可能的基本事件，它可以表示为零或任意正整数。应当指出：事件空间或样本空间可以有不同的定义，例如在以上例子中，假如你想区别男顾客和女顾客，那么这个事件空间或样本空间可以定义为包括了所有男顾客和女顾客的各种组合。又如“四个男的、三个女的顾客进入商店”和五个男的、两个女的进入商店“是两个不同的基本事件，则事件空间或样本空间是由顾客数和男女顾客的不同组合构成。可见事件空间或样本空间的定义取决于你所关心的特定问题。

事件或样本空间的概念是建立概率理论的基础，在应用概率理论时要仔细地定义一个事件或样本空间，应当仔细地辨识所有事件可能的输出集合。不同事件之间的关系可以用集合论来描述，一个集合定义为一些事物的总体，概率理论中的集合是在一个不确定的情况下，某些可能输出的总体。所谓‘不确定情况’习惯上看作是一个‘试验’，并

且要指明其条件 .

概率理论中的事件及其关系可以用集合论中的示意图来表述。如图 1-1 所示，用长方形表示事件或样本空间，并用 S 记述；用圆或椭圆表示事件或样本，并用 E 记述。用集合论的符号也能表示事件空间和事件，用一个大括号包围了该集合中的所有元素：如集合{0,1,2,3,4}表示'少于五人进入商店'的事件E；而集合{0,1,2,3,……}表示了不区别性别进入商店的事件或样本空间S。注意，基本事件也是一个集合，只不过由一个元素组成而已，例如"两个顾客进入商店"这一基本事件可以表示为集合{2}。有的时候给出一定的条件，例如"中午11点到12点少于5人进入商店"的事件为集合{0,1,2,3,4|中午11点到12点}，垂直线以右注明某条件。应当指出的是，任何集合都附带有特定条件，只不过有时在你关心的问题中不重要而省去，事实上详细注明所有条件，有时不仅不必要，而且不可能。

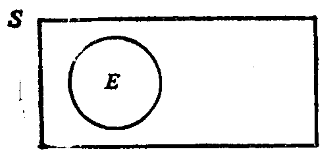

图 1-1 事件空间S和事件E

仔细定义了事件或样本空间之后，如果它涉及不确定性，下一步就是要考虑涉及事件或样本空间的概率。有关概率理论都要基于某些公理，这些公理可以叙述如下：

1. 事件的概率记以 $P(E)$，它一定是非负的。
2. 假如 S 记作全部可能的事件的集合，即样本空间，则 S 的概率 $P(S)=1$。
3. 假如两个事件 E_1 和 E_2 是互斥的，即两事件不可能同时出现，则两个事件中任何一个出现的概率是各个概率 $P(E_1)$和 $P(E_2)$之和，即有概率的加法公理。

$$P(E_1 \text{ or } E_2)=P(E_1)+P(E_2) \tag{1-1}$$

这一公理可以应用于 n 个互斥事件。

$$P(E_1 \text{ or } E_2 \text{ or} \cdots \text{or } E_n)=P(E_1)+P(E_2)+\cdots+P(E_n) \tag{1-2}$$

4. 假如两个事件 E_1 和 E_2 是独立的，即两事件的出现互不相关，则两事件同时出现的概率是各个概率 $P(E_1)$和 $P(E_2)$之积，即有概率的乘法公理。

$$P(E_1 \text{ and } E_2)=P(E_1)\times P(E_2) \tag{1-3}$$

这一公理可推广到 n 个互相独立事件

$$P(E_1 \text{and } E_2 \text{ and} \cdots \text{and } E_n)=P(E_1)P(E_2)\cdots P(E_n) \tag{1-4}$$

事实上，第4条公理可以由条件概率关系导出，并作更完整的描述，这将在 1-4节中讨论。

藉助于示意图，可以对上述公理作一些解释，如图 1-2 所示，公理 1 表示事件E的几何图形面积不能为负，公理 2 表示矩形S的面积为 1 . 公理 3 表示两个不重叠的图形，E_1 和 E_2 的面积等于他们各个面积之和。

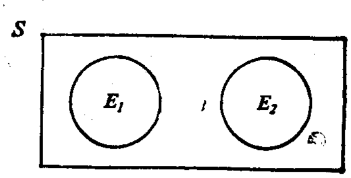

图 1-2 公理 1-3 的解释

用集合论的术语，事件(E_1 or E_2)被称作 E_1 和 E_2 的和集，并记以($E_1 \cup E_2$)；事件(E_1 and E_2)被称作 E_1 和 E_2 的交集，并记以($E_1 \cap E_2$)。假如 E_1 定义为"大于20元小于25元的价格事件"，E_2定义为"大于22元的价格事件"，则 E_1 和 E_2 的和集($E_1 \cup E_2$)是'大于20元的价格事件'；而 E_1 和 E_2 的交集($E_1 \cap E_2$)是'大于22元小于25元'的

价格事件，由于 E_1 和 E_2 这两个事件即不是互斥的，也不是独立的，因此公理 3 ， 4 不适用。

利用上述公理一些概率和计算公式可以很容易导出来，一个事件 E 的概率 $P(E)$ 是一个 0 到 1 之间的一个数，假如 E_1 是 E_2 的一个子集，记以 $E_1 \subset E_2$，则必有

$$P(E_1) \leqslant P(E_2) \tag{1-5}$$

它也可以用示意图，图 1-3 表示之。例如一个足球队以 4 分的成绩赢得比赛的概率小于以任何得分赢得比赛的概率，因为前一事件是后一事件的子集。

假如 E 的补集记以 $\bar{E}$(有时记以 E^c)，它定义为 E 不出现的事件，则其补集的概率必有

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E) \tag{1-6}$$

它也可用示意图 1-4 表示，例如一天中下雨(E)的概率是 1/3，则不下雨($\bar{E}$)的概率必为2/3。

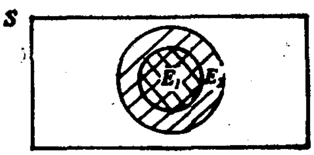

图 1-3　式(1-5)的解释

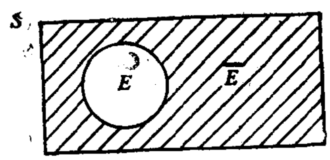

图 1-4　补集的概率解释

假如两事件 E_1 和 E_2 不是互斥的，则至少有一事件出现的概率，即两事件的和集的概率，等于他们各自的概率之和减去两事件同时出现的概率，即两事件的交集的概率，即

$$P(E_1 or E_2 or \text{两者}) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 and E_2) \tag{1-7}$$

或者

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \tag{1-8}$$

这个规律也可以用示意图 1-5 表示，注意到两事件 E_1 和 E_2 不互斥意味着两圆有相交部分，E_1 和 E_2 的和集 $(E_1 \cup E_2)$ 的概率 $P(E_1 \cup E_2)$ 相应于两圆外缘包围的面积，E_1 和 E_2 各自的概率 $P(E_1)$ 和 $P(E_2)$ 相应于各自圆的面积，如果用两个圆的面积和表示之，必须减去一个重叠部分的面积，而重叠部分面积等于两事件交集的概率 $P(E_1 \cap E_2)$。假如 E_1 和 E_2 是互斥的，则示意图上没有重叠部分，这一规律就简化为公理 3 的式(1-1)。例如，假如从一个洗得很好的扑克牌中抽出一张，令 E_1 是梅花牌的事件，又令 E_2 是 A 牌的事件，则抽出或是梅花或是 A 牌，包括梅花 A 的概率是

$$P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$
$$= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52}$$

注意到这两个事件不是互斥的，其中被减去的1/52是为了回避梅花 A 被两次计算。

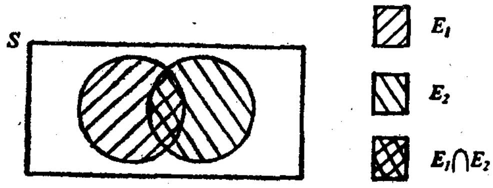

图 1-5　不互斥事件的概率计算，式(1-8)

很容易将上述概率规律扩展到多于两个关心的事件情况，例如你关心三个事件 E_1，

E_2，E_3出现的概率以及它们的任何组合事件的概率。例如E_1，E_2，E_3至少有一个出现的概率即其和集的概率$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$，其计算规律为

$$
\begin{aligned}
P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = & P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)-P(E_1 \cap E_2) \\
& -P(E_1 \cap E_3)-P(E_2 \cap E_3) \\
& +P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)
\end{aligned}
\tag{1-9}
$$

其中$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$是三个事件的交集，即三个事件同时出现的概率。这个规律表示在图1-6上，注意到$E_1 \cap E_2$、$E_1 \cap E_3$和$E_2 \cap E_3$的交集面积被减去了以回避重复计算，又因为三个交集的面积被加了三次(一次是E_1的，一次是E_2的，一次是E_3的)，同时又被减了三次(每次是一对交集中的一个)，这样三事件的重叠部分$E_1 \cap E_2 \cap E_3$的面积被抵消了，因此又必须加上中心这个三者重叠部分，这就是式(1-9)中最后一项的由来。

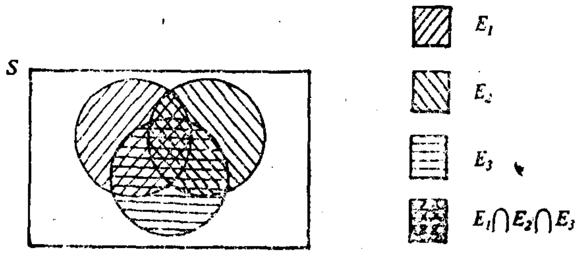

图 1-6 三个不互斥事件的概率计算，式(1-9)

概率的基本规律在概率计算中非常有用，它可以从某些已知的概率去计算其他的概率。这里只是介绍决策理论及其应用所需要的最基本的概率知识，而不是概率理论的各个方面，在这方面有大量的教科书和参考书可以利用。然而涉及决策理论，条件概率及其性质有特殊意义，我们将在1-4节专门讨论它，在讨论之前有必要对概率的古典解释(即频率解释)和主观解释作一个讨论。

1-2 概率的频率解释

概率理论是一个数学系统，它的一系列数学运算规律，都是建立在概率的基本概念和基本公理之上的。而这些基本概念和公理又是基于概率本身的客观背景和解释，概率的解释不是唯一的，概率的频率解释和主观解释不是仅有的两个解释，但是却是最重要的两个解释。

由于在概率理论发展的历史过程中，最初是与博奕即赌博相联系的，它涉及某种机率，人们在大量重复试验中发现存在某种数量上的规律性，例如轮盘赌，摇一个骰子，玩扑克牌等等。这些背景实际上假设允许在相同条件下作多次重复试验和观察，并且还假设基本事件在多次重复过程中是等似然的。很自然，当试验次数足够多时，概率可以用某一事件出现的频率来近似。这个解释在很多情况下已经足够了，例如一个质量检验员，可以从一个生产过程中检验1000个等似然的产品，并从中得到产品的合格率，用它近似这个生产过程的合格产品这一事件的概率。一个医疗保健统计者，可以从某一地区几万名等似然人的健康记录中得到发生某种疾病这一事件的发病率，并用它近似这一地区发生某种疾病的概率，等等。

归纳起来，假如基本事件有相等的似然，则一个事件E的概率可用在样本空间S中出现事件E的频率来解释，当样本空间S中的基本事件总数足够大时，这个频率近似于事件E的概率。

$$P(E) \simeq \frac{\text{出现}E\text{的基本事件的数目}n_E}{\text{在}S\text{中基本事件的总数}n} \tag{1-10}$$

这个概率的解释称作概率的频率解释，有时又称作概率的古典解释，应当强调它有三个基本假设：(1)基本事件是等似然的 (2)每次试验是独立的 (3)大样本空间，以保证大量重复试验的频率近似于它的概率。

在大多数不确定情况，没有理由假设基本事件是等似然的，这时概率的频率解释不很适当，但是我们还是应用这个解释，因为有一个重要的概率学的定理，即'大数定理'，这个定理告诉我们，假如一系列独立试验，譬如扔一个骰子，在同样条件下被重复多次，任何一个事件出现的频率就是其似然，并接近于这个事件的概率，这个定理还指出，当重复的次数增加时，其频率愈接近于它的概率。正式地说，假如独立试验重复的次数为n，又假如在n次重复试验中E事件出现的次数记以r，则

$$P\left[\left|\frac{r}{n}-P(E)\right| \geqslant \varepsilon\right] \to 0, \text{ 当 } n \to \infty \tag{1-11}$$

其中ε是任意小的正数，它表明当n增加时，频率r/n愈来愈趋近于概率$P(E)$，例如重复扔一个对称的骰子，出现5个点都朝上的事件的频率，当扔的次数增加时，它愈来愈接近于1/6。

大数定理是统计学中一个重要的定理，在概率的频率解释中，大数定理告诉我们，在相同条件下，只要重复的次数n足够大，我们就可以放心地用其频率近似其概率，而无须顾及基本事件是否等似然。

有趣的是，频率也满足上一节所述的概率的四个基本公理。首先，显然频率不可能是负的，其次完全的样本空间的频率必为1，第三，假如两个事件是互斥的，则两个事件的和集的频率等于各个事件频率的和，最后，假如两个事件是独立的，则两个事件的交集的频率等于各个事件频率之积。虽然频率只是概率的一个近似，然而它都精确地满足上述四个基本公理。

概率的频率解释似乎是直观而又合理的，并且看上去是带有经验性的。假如一个不确定情况被重复一个很大的次数，一个事件出现的频率应该反映它的概率，多数人是把这个现象作为一个'平均规律'来接受的。试验的次数是不重要的，只要它足够地多，频率不可能完全等于其概率，但是只要它们足够地接近就可以了。

应当指出，概率的频率解释只是一个数学概念的物理解释，在多数实际情况下，它并不能提供确定概率的现实方法，因为它要求在同一条件下作长长一系列重复试验，并以合理的精度去逼近其概率，这种操作方法在很多情况下代价很高，很费时间，甚至有时是不可能的。有一类事件根本不可能重复，然而可以在你的'思想试验'中重复，这时概率的频率解释仍然可以应用，但是并不提供一个现实的、确定概率值的方法。

1-3 概率的主观解释

如上所述，古典的概率解释之所以首先藉助于频率的解释，那是因为在概率学的发展历史上，最初与博奕即赌博相联系，这个背景实际上就是一个大数量的重复试验，由

此抽象出概率的数学概念及其一系列运算规律，从而建立了一整套数学系统，即经典的概率学和统计学，在现实生活中很多问题得到了满意的解答。例如上一节例举的某生产过程的产品合格率的统计，一个地区某疾病的发病率的统计等等，因为它们都是可以多次重复试验的事件。

然而在概率学发展的近代历史中，它与决策理论相联系．很多决策问题要在未来事件不确定的条件下作出，这种不确定性，应该而且可以用概率的语言定量描述。很多重大决策问题中的重大事件，不仅在过去没有大量重复出现过，而且在未来也不可能大量重复，它只能反映统计者和决策者的某种'判断''信念''机会'和'风险'，它不完全是客观的，其中包含了统计者和决策者个人的主观特性：不同的统计者和决策者可能有不同的概率描述，从而可能有不同的决策，这种情况，概率的频率解释就不够用了，从而发展了概率的主观解释，让我们进一步阐述这个新的观念。

在现实生活中，很多频率概念不能藉助于频率的解释，甚至日常常用的概率术语完全没有频率的内涵。例如"明天有2/3的可能性要下雨"，或者"我只有1/10的把握通过这项考试"，或者"老王有一半的机会赢得冠军"，或者"这架民航飞机出现空难的风险是万分之一"等等，这里所举的'可能性'，'把握'、'机会'、'风险'都是一种概率陈述，而且它的意义是清楚的，人所共知的，也是日常生活经常可听到的，但是很难把它们看作是在同样的条件下一次又一次重复试验的输出结果，并作概率的频率解释．问题是这些情况是不能在同样条件下被重复的，甚至可能是绝无仅有的，这架民航机或许还没有飞行到一万次，也没有出现过一次空难，更不能事先重复一万次，然而万分之一出现空难的概率却是始终存在的。这类事件或许在类似情况下，出现过某些信息，并且是现成的，但是作为观测频率形式的信息，特别是在同一条件下重复试验的信息是没有的。例如你可以有过去有关雨情的气象条件，如季节、温度，压力、风向、风力和湿度等，但是把过去的这些条件严格等同于今天和明天的条件是很值得怀疑的。又譬如过去你可能有参加这项考试的经历，但是即将参加的这项考试，它的考官可能更换了，题目的难易情况是难以捉摸的，参加的考生也变了，其竞争性也不一样了，同样，过去的条件不能完全等同于即将参加的考试，等等。所有这类概率的陈述，都涉及谈话者的某种'相信程度'，它不依赖于长期大量试验的频率解释，但是它依赖于谈论者的主观的，个人的判断。概率的主观解释或个人解释被解释为特定个人(广义的)对于不确定事件的'置信度'的数量判断，这种置信度的数量判断，不需要大量重复试验，却能很好地分配一个概率给那些非重复性事件上，然而其中包含了个人的主观判断和特性。

概率的主观解释完全可以容纳概率的频率解释，例如扔一个骰子，从一个暗袋中抽取色球等等。任何一个这样的概率也都可以解释为某个人对这一事件出现的置信度，虽然这些例子都是可以在相同条件下多次重复试验。概率的频率解释和主观解释在这些例子中是一致的，换言之，概率的主观解释不论是不可重复的还是可以重复的情况都是有意义的。由于这个主观解释允许一个人考虑某个个别情况而不需要大量试验，在这个意义上，概率的主观解释即是概念性的，也是提供了一种确定概率的现实方法；而频率解释只是概念性的，在大多数情况不能提供一个确定概率的现实方法。上述下雨、考试、赢球和空难的概率就是几个实际例子。应用概率的主观解释评定先验概率分布的方法将

在第三、四、五章中介绍。

在某种意义上，主观解释可以考虑为古典概率频率解释的一个扩展，正如你曾看到的，古典概率的频率解释基于大数定律，而大数定律的证明中，一个重要的假设是多次重复的试验必须是独立的，也就是任何一次试验的输出结果对于其他任何一次试验是没有影响的；另一个假设是要求每次试验是在同样的条件下进行；假如概率用频率式(1-10)来定义，则还需要假设关心的基本事件是等似然的。在这些假设前提下古典概率的频率解释才成立。然而承认这些假设前提本身也是一个主观的。假如他能接受这些主观的假设前提，那么他也可以接受概率的主观解释，如同用频率解释去定义一个概率一样，假如他掌握某些特殊信息，他的主观概率评定值可以不同于由频率解释获得的概率评定值。由于主观概率允许描述非重复事件，并容纳了个人的主观判断，从这个意义上讲，主观概率可以考虑为古典的一个扩展。

假如你关心某个汽车司机在下一个年度内发生车祸的概率，从你已有的历史数据来看，在我国某一年龄层中的司机发生一次或多于一次车祸的频率是一年里100人中有12人，假如你感到你所关心的这个司机正是这个年龄组中的，你很乐意分配概率0.12给这一事件(注意到这是一个主观判断)，即下一年这个司机发生车祸这一事件，然而你可能感到这个司机是比较莽撞的，则你主观地判断，应当分配概率0.20给这一司机，或许你还可以查看各国的历史记录，其频率值不尽相同，也可以调查一下他所开的汽车性能等等，虽然这些资料是很有价值的，然而最终的概率分配是主观的，因此概率的主观解释可以认为是频率解释的扩展，而主观解释可以用于任何不确定情况，而不论是否可以重复，在统计推断和决策问题中，多数情况都是不可重复的，这个主观解释十分有用。

1-4 概率的条件性质

在概率理论中，条件概率的概念及其运算规律是很重要的，Bayes 推断以及基于Bayes推断的Bayes 决策在某种意义上讲，正是利用条件概率的某些性质，因此条件概率在这个领域内有特别重要的意义。

首先要说明的是，任何概率陈述都是有条件的，几乎没有例外，即便最简单的扔骰子问题也是有条件的，6个面出现的概率都是1/6，那是在骰子是对称的条件下才成立。假如记E为出现点数为5的事件，记H为骰子对称的事件，则完整的描述应当是$P(E|H)=1/6$。在很多情况由于条件H‘不言而谕’，或者由于在运算过程中自始至终不变化，为了节省符号的书写而省去，例如$P(E)=1/6$。

然而在很多情况下条件事件不能省去。例如你关心某商品的销售概率，但是它条件于登不登广告这另一个事件。又譬如你关心某种疾病的发病概率，但是它条件于男人和女人这另一个事件等等。因此你所关心的事件记以E，条件事件记以H，则其概率应表示为$P(E|H)$。

条件事件可以不止一个，例如你关心某商品的销售概率不仅仅条件于登不登广告，而且条件于另一竞争对手是否将同类产品投入市场。又譬如你关心的某种疾病发病概率，不仅仅条件于男人和女人，而且条件于地区A和B等等。因此你所关心的事件的概率应