函数论基础

[德] W. 托奇克 著

杨应辰 熊振翔 张理京 译

人民教育出版社

内 容 提 要

本书为柏林 Humboldt 大学教材，内容有复数，复值函数，Taylor 展开，幂级数，留数理论，Riemann 数球，正则函数的几何特性，函数论与拓扑学的关系，函数论研究的展望等．本书的特点在于把函数论与拓扑学联系起来．本书可供综合大学与师范学院作参考书之用．

函 数 论 基 础

[德] W. 托奇克 著

杨应辰 熊振翔 张理京 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 7.25 字数 170,000

1981 年 1 月第 1 版 1982年 1 月第 1 次印刷

印数 00,001—13,000

书号 13012·0577 定价 0.65 元

序　言

这是(复变)函数论的一本入门书. 函数论是在很多方面发展得非常深入的一门数学理论,它的基础则是复(函数)微分法理论. 函数论中最重要的定理之一是 Cauchy 积分定理. 这定理告诉我们, 若复值函数 $f(z)$ 在其定义域上每点处按复数意义是可微的, 则 $f(z)$ 在一闭曲线上的复值曲线积分等于零. 但这一命题只有在对定义域的结构作某些假定后才能成立. 因此函数论与平面拓扑就有密切关系. 我们可以利用这一联系, 使函数论一开始就建立在运用拓扑定理的基础之上. 可放在函数论之首的这样一个定理就是 Jordan 曲线定理. 这定理用于函数论是很方便的,因在单连通域概念中集总了一切所谓拓扑上的难点, 而在定义单连通域时又需用 Jordan 曲线定理. 这种做法的一个缺点是它使复函分析中能同实函分析做类比的许多地方没有了. 据我所知, Saks 和 Zygmund 是最早指出这一情况的人, 并在他们的书 [56] 中不用 Jordan 曲线定理来建立函数论. 此后 L. Ahlfors[1] 重新提出这一思想. R. Nevalina 和 V. Paatero 在[48]中给出用初等变形建立函数论的讲法,以避开不必要的拓扑难点. A. Dinghas[15] 用星形域概念作出了决定性的简化. 如 Dinghas 所指出的,我们可通过星形域概念的考察, 把函数论中的局部性概念与整体性概念严格区分开来. 他以此证明, 局部性理论用纯分析方法就足以胜任, 而只有在涉及整体性问题时才需要用拓扑观点. 事实证明, 当我们大力运用幂级数方法来建立函数论时, Dinghas 的星形域概念才又显得非常有效. 这在本书中也是如此. Dinghas 教授表

示赞同我写这样一本教科书的计划，这对我是很大的鼓舞.

我们在第一章里引入复数，把它们作为平面上的点. 此外要讲复数序列及复平面的一般点集(域、星形域).

第二章讲一个复变量 z 的复值函数 $w=f(z)$. 这种函数可看作是从 z 平面到 w 平面的映射. 若一个函数 $f(z)$ 在复数意义上可微($f'(z)\neq 0$)，则此种映射保持曲线间的角不变. 除复数可微概念外，第二章里还引入了复曲线(定)积分和原函数概念. 若 $f(z)$ 有一原函数，则此原函数与复曲线积分之间，也有一元实值函数情形下原函数(不定积分)与定积分之间的关系(微积分基本定理). 本章的基本结果在于证明了在 $f(z)$ 的定义域 G 为星形域且 $f(z)$ 在 G 上是正则的情形下，$f(z)$ 就有一个原函数.

第三章根据这个结果，证明一个在 G 上正则的函数 $w=f(z)$ 对应于开圆 $|z-z_0|<r$ 内 z 的 w 值，若 $|z-z_0|\leqslant r$ 完全属于 G，则可用圆周 $|z-z_0|=r$ 上的一个复曲线积分来表示(Cauchy 积分公式). 由此可得出正则函数在定义域内一圆上的幂级数展式. 作为附带的结果，还得出所谓代数学基本定理：若 $p(z)$ 是 z 的一个(复系数)多项式，则至少存在一个零值点，即存在一个(复的) z_0 使 $p(z_0)=0$.

对于第三章所推出的正则函数的幂级数展式，我们在第四章里证明它的逆定理：一个幂级数 $\sum\limits_{\mu=0}^{\infty} a_\mu (z-z_0)^\mu$ 在其收敛域内总表示一个正则函数(若幂级数不仅仅在一点 $z=z_0$ 处收敛，则它在整个复平面上或一圆 $|z-z_0|<R$ 上收敛. 在第二种情形下，它在 $|z-z_0|>R$ 的任一点处都不可能收敛). 从幂级数在其收敛圆上的正则性定理可推出重要的结论：每个正则函数具有任意高阶的连续导函数. 此外还可得出导函数在一圆内点 z 处的 Cauchy 积分表达式，还有 Weierstraß 收敛定理(即一致收敛的正则函数序

列的极限函数也是正则的)也可从一个幂级数的正则性推出.

正则函数幂级数展式的一个推论是关于正则函数取一个 w_0 值的方式: 若 $f(z)$ 在整个定义域上不恒等于 w_0, 则在使 $f(z_0)=w_0$ 的点 z_0 的周围存在整个的(小)圆 $|z-z_0|<\delta$, 使 $f(z)$ 在其上除 z_0 处取 w_0 值外不再取此值. 这就又表明: 不恒等于常数的正则函数的 w_0 值点不可能在定义域内有聚点. 进而又可推出极大原理: 不恒等于常数的正则函数的模, 不可能在定义域内取得相对极大值.

第五章里讲一正则函数 $w=f(z)$ 的孤立奇点理论. 若一孤立奇点 z_0 并非可去奇点(否则在适当定义 $f(z_0)$ 之后可使扩大了定义范围的函数 $f(z)$ 在 z_0 的整个邻域上是正则的), 则 $f(z)$ 只可能有如下两种性态: 或者是, 当 z 位于围绕 z_0 的足够小的圆内时, $w=f(z)$ 的值位于 w 平面上原点为心的任意大的圆周之外(此时 z_0 叫极点); 或者是, $w=f(z)$ 在 z_0 的每个邻域内能任意接近于每个复数值(此时 z_0 叫本性奇点). 又根据留数的定义证明了留数定理. 这就是: 沿闭曲线 γ_0 的一个复曲线积分, 可用奇点处的留数和 γ_0 绕奇点的匝数来表示. 一闭曲线 γ_0 绕不在 γ_0 上的一点 γ_* 的匝数就是 γ_0 绕 γ_* 多少圈的圈数. 留数定理的一个特例就是以任意闭曲线代替圆时的 Cauchy 积分公式.

孤立奇点理论可用来研究正则函数在 z 值离原点($z=0$)足够远时的性态. 为此需要扩大复平面, 增加一个"非本义"复数 $z=\infty$, 这就是第六章中所要讲的事. $z=\infty$ 这个新的复数通过 $Z=\dfrac{1}{z}$ 就变为 $Z=0$. 这样, 就可把函数 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的性态归结为 $f\left(\dfrac{1}{Z}\right)$ 在 $Z=0$ 的性态. 凡在(包括 $z=\infty$)整个复平面上除(有限个)极点外为正则的那些函数必然是 z 的有理函数. 从孤立奇

点理论还可立即推出有理函数能分解为部分分数.

最后在第七章里讲一个定理：当 w 通过正则函数 $w=f(z)$ 与 z 相对应时，诸 w 之间的位置与诸 z 之间的位置彼此有什么关系.

前七章整个形成函数论的方法部分. 第八章与最末一章则是搞理论问题的：建立函数论与拓扑学的关系. 那里我们要讲使 Cauchy 积分定理成立的那种区域的拓扑结构.

本书是以我在柏林 Humboldt 大学多次讲授的函数论 I 讲义为基础而写成的. 它是在德国科学院纯数学研究所特别是在 Naas 教授的敦促下整理出来的(下略).

作者 Wolfgang Tutschke

1967 秋于柏林.

目　录

1. 复　　数

1.1　定义与性质

设 $a, b, c, \cdots$为实数. C为一切有序实数偶所成的集. 于是C中的两个数偶$[a, b]$与$[c, d]$当且仅当$a=c$且$b=d$时为相等[1]. 兹指出，可以在下述意义上把数偶$[a, b]$本身看作数:

1. C中两种联结的定义.

对于每两个数偶$[a, b]$及$[c, d]$按下列方式唯一地赋予一个和与一个积:

$$[a, b]+[c, d]=[a+c, b+d],$$

$$[a, b]\cdot[c, d]=[ac-bd, bc+ad],$$

这就是C中的加法与乘法. 这样选定和与积的定义，是为了对于实数成立的一切运算法则对于数偶$[a, b]$的运算仍然成立.

2. 交换律:

据加法定义，$[a, b]+[c, d]=[a+c, b+d]$，另一方面，$[c, d]+[a, b]=[c+a, d+b]$. 回忆实数的加法交换律与上述数偶相等的定义，可知$[a+c, b+d]=[c+a, d+b]$. 于是得

$$[a, b]+[c, d]=[c, d]+[a, b],$$

即，加法交换律成立. 再者，比较

$$[a, b]\cdot[c, d]=[ac-bd, bc+ad]$$

---

1) 注意，这样在C里定义的相等关系自然是自反的、对称的，并且是传递的，即，$[a, b]=[a, b]$，由$[a, b]=[c, d]$可得$[c, d]=[a, b]$，并且由$[a, b]=[c, d]$及$[c, d]=[e, f]$可得$[a, b]=[e, f]$.

与

$$[c, d]\cdot[a, b]=[ca-db, da+cb],$$

并回忆实数的乘法交换律，可知在C中乘法交换律也成立：

$$[a, b]\cdot[c, d]=[c, d]\cdot[a, b].$$

3. 结合律：

由

$$([a, b]+[c, d])+[e, f]=[(a+c)+e, (b+d)+f]$$

与

$$[a, b]+([c, d]+[e, f])=[a+(c+e), b+(d+f)],$$

因为实数的加法是可结合的，比较这两个等式的右端即得

$$([a, b]+[c, d])+[e, f]=[a, b]+([c, d]+[e, f]);$$

此即C中的加法结合律。

通过计算而得[1]

$$([a, b]\cdot[c, d])\cdot[e, f]=[ace-bde-bcf-adf,$$
$$bce+ade+acf-bdf].$$

当把$[a, b]\cdot([c, d]\cdot[e, f])$乘出时，恰又得到这个表达式，从而证实了乘法结合律：

$$([a, b]\cdot[c, d])\cdot[e, f]=[a, b]\cdot([c, d]\cdot[e, f]).$$

4. 分配律[2]：

按

$$[a, b]\cdot([c, d]+[e, f])=[a(c+e)-b(d+f),$$
$$b(c+e)+a(d+f)]$$

与

$$[a, b]\cdot[c, d]+[a, b]\cdot[e, f]=[(ac-bd)+(ae-bf),$$
$$(bc+ad)+(be+af)],$$

1）因为实数的乘法是可结合的，$a(bc)=(ab)c$，故可写 $a(bc)=(ab)c=abc$.

2）因为乘法是可交换的，故无需区别两个分配律.

且由实数的加乘分配律，显然可知在 C 中加乘分配律也成立.

5. 中性元：

由加法的定义立即得到

$$[a, b]+[0, 0]=[a+0, b+0]=[a, b].$$

故 $[0, 0]$ 为加法的中性元. 相应地由乘法定义得

$$[a, b]\cdot[1, 0]=[a\cdot 1-b\cdot 0, b\cdot 1+a\cdot 0]=[a, b],$$

这表明 $[1, 0]$ 是乘法的中性元[1].

6. 逆运算：

加法的逆运算的意思就是，对于给定的偶 $[a, b]$ 与 $[c, d]$ 要确定一个偶 $[x, y]$，使得

$$[a, b]+[x, y]=[c, d]$$

成立. 据 C 中加法的定义与相等的定义，得到方程组

$$\begin{cases} a+x=c, \\ b+y=d. \end{cases}$$

这个方程组恒有唯一的解：$x=c-a$，$y=d-b$. 由此可知减法——加法的逆运算——可自由地进行而且其结果是唯一的，即

$$[x, y]=[c-a, d-b].$$

除法——乘法的逆运算——就是要确定 $[x, y]$，使对于给定的 $[a, b]$ 和 $[c, d]$ 下列等式成立：

$$[a, b]\cdot[x, y]=[c, d].$$

由于 $[a, b]\cdot[x, y]=[ax-by, bx+ay]$，据 C 中相等的定义可知

$$\begin{cases} ax-by=c, \\ bx+ay=d. \end{cases}$$

除了当 $[a, b]$ 为偶 $[0, 0]$ 之外，这个方程组的系数行列式等于正数 a^2+b^2. 因此，只要 $[a, b]\neq[0, 0]$，这个方程组恒有唯一的解. 所

1) 即单位元——译者.

以，除了不能用$[0,0]$作为除数之外，除法也是可以自由进行的，而且是唯一的．特例，当$[c,d]=[0,0]$时，$[x,y]=[0,0]$．若$[a,b]=[0,0]$，则对于一切$[x,y]$皆得

$$[a,b]\cdot[x,y]=[0,0]\cdot[x,y]=[0,0].$$

于是，当$[c,d]\neq[0,0]$时，方程

$$[0,0]\cdot[x,y]=[c,d]$$

无解，而当$[c,d]=[0,0]$时，任一个偶$[x,y]$皆适合此方程．

总之：

加、减、乘、除（但不许用$[0,0]$除）在C[1]中是可以得到唯一结果的运算．

C中的元$[a, b]$称为复数．我们用单个的字母z作为表示一个复数的符号．

现在特别来考虑形为$[a, 0]$的复数．由加法与乘法的定义得到

$$[a,0]+[c,0]=[a+c,0],$$
$$[a,0]\cdot[c,0]=[ac-0\cdot 0,0\cdot c+a\cdot 0]=[ac,0].$$

由此可知，我们可以象计算实数一样去计算形为$[a,0]$的复数[2]．于是，我们可以把偶$[a,0]$与实数a等同起来．由此，我们可以赋予式子$a+[c,d]$与$a\cdot[c,d]$以如下的意义：

$$a+[c,d]=[a,0]+[c,d]=[a+c,d],$$
$$a\cdot[c,d]=[a,0]\cdot[c,d]=[ac-0\cdot d,0\cdot c+ad]$$
$$=[ac,ad].$$

按后一规则可知，恒可将复数$z=[a,b]$写成如下的形式：

$$z=[a,b]=[a,0]+[0,b]=a\cdot[1,0]+b\cdot[0,1].$$

1）按代数中的名称，C是一个交换体（即“域”——译者）．

2）用代数的语言来说，C中的形为$[a,0]$的偶构成一个子域，它与实数域是同构的．

[1, 0]与实数 1 等同. 为了简便，用 i 表示偶[0, 1]. 据此，z 可写成下列“标准”式

$$z=[a,b]=a+bi.$$

称 a 为 z 的实部，b 为 z 的虚部. 此事可用符号记为

$$a=\mathrm{Re}[z],\, b=\mathrm{Im}[z].$$

形为$[0,b]=b\cdot i$ 的复数称为纯虚数，i 称为虚单位. 虚单位的最重要的性质是

$$\begin{aligned} i^2=i\cdot i=[0,1]\cdot[0,1]&=[0\cdot 0-1\cdot 1, 1\cdot 0+0\cdot 1]\\ &=[-1,0]=-1. \end{aligned}$$

于是, 复数 $z=i$ 是代数方程 $z^2+1=0$ 的解[1)].

复数的标准式便于复数的实际演算:

$$\begin{aligned} (a+b\cdot i)\pm(c+d\cdot i)&=[a,b]\pm[c,d]=[a\pm c, b\pm d]\\ &=(a\pm c)+(b\pm d)\cdot i, \end{aligned}$$

即, 在进行复数的相加(相减)时, 可分别将它们的实部与虚部各自相加(相减).

对于两个复数的积, 我们首先得到

$$\begin{aligned} (a+b\cdot i)\cdot(c+d\cdot i)&=[a,b]\cdot[c,d]\\ &=[ac-bd, bc+ad]=(ac-bd)+(bc+ad)\cdot i. \end{aligned}$$

这不是别的而正是我们把 $a+b\cdot i$ 与 $c+d\cdot i$ 逐项相乘并考虑到 $i^2=-1$ 所得的结果; 这时所得为

$$\begin{aligned} (a+b\cdot i)(c+d\cdot i)&=ac+ad\cdot i+bc\cdot i+bd\cdot i^2\\ &=ac-bd+(ad+bc)\cdot i. \end{aligned}$$

除法自然可以归结于乘法. 设

---

1) 同样可证, $z=-i$ 也是 $z^2+1=0$ 的解. 后边将用函数论的方法证明, 每个方程 $\sum\limits_{\mu} a_\mu z^\mu=0$ (a_μ 为复数)至少有一个复数解(代数学基本定理). 因此每个复系数多项式可以写成一次因次的积.

$$\frac{a+b\cdot i}{c+d\cdot i}=Z,\quad c+d\cdot i\neq 0,$$

意即

$$a+b\cdot i=Z\cdot(c+d\cdot i).$$

用任何复数 $e+f\cdot i$ 乘此方程的两端，其结果仍相等，故

$$(a+b\cdot i)(e+f\cdot i)=Z\cdot[(c+d\cdot i)(e+f\cdot i)].$$

若 $e+f\cdot i\neq 0$，则 $[(c+d\cdot i)(e+f\cdot i)]\neq 0$[1]，且可将最后这个方程改写为

$$Z=\frac{(a+b\cdot i)(e+f\cdot i)}{(c+d\cdot i)(e+f\cdot i)}.$$

这表明，可以用任一个异于零的复数 $e+f\cdot i$ 去分别乘复数商的分子与分母. 现在特别地用 $c-d\cdot i$ 来分别乘 $Z=\frac{a+b\cdot i}{c+d\cdot i}$ 的分子与分母，则得

$$Z=\frac{(a+b\cdot i)(c-d\cdot i)}{(c+d\cdot i)(c-d\cdot i)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)\cdot i}{c^2+d^2}.$$

再一次用$\frac{1}{c^2+d^2}$去分别乘分子与分母，最后得到

$$Z=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\cdot i.$$

由此可知：若分母为 $c+d\cdot i$ 而以 $c-d\cdot i$ 分别乘其分子与分母，则所得分母将为实数. 对于 $z=c+d\cdot i$，称 $\bar{z}=c-d\cdot i$ 为 z 的**共轭复数**. 恒有 $z+\bar{z}=2c$, $z-\bar{z}=2d\cdot i$，以及

$$c=\mathrm{Re}[z]=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),$$

$$d=\mathrm{Im}[z]=\frac{1}{2i}(z-\bar{z}).$$

---

1) 两个不为零的复数的积恒$\neq 0$. 因若$[a,b]\cdot[x,y]=[0,0]$且$[a,b]\neq[0,0]$，则(参看… 3 页第 6 节)$x=0$, $y=0$. 这就表明：若两个复数的积为零，则至少有一个因子必等于零.

由共轭复数的定义立即得到

$$\overline{(\bar{z})}=z,$$

即，两次的复共轭变换之后又回到原来的复数.

由 $z=c+d\cdot i$ 得到$\frac{1}{z}=\frac{c}{c^2+d^2}-\frac{d}{c^2+d^2}\cdot i$, 以及

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{c}{c^2+d^2}+\frac{d}{c^2+d^2}\cdot i.$$

另一方面，$\bar{z}=c-d\cdot i$, 则

$$\frac{1}{\bar{z}}=\frac{c}{c^2+d^2}+\frac{d}{c^2+d^2}\cdot i.$$

比较此二结果，则得一个运算法则

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\bar{z}}.$$

若 $z_1=c_1+d_1\cdot i$, $z_2=c_2+d_2\cdot i$, 则 $z_1+z_2=(c_1+c_2)+(d_1+d_2)\cdot i$, 故$\overline{(z_1+z_2)}=(c_1+c_2)-(d_1+d_2)\cdot i$. 另一方面，$\bar{z}_1=c_1-d_1\cdot i$, $\bar{z}_2=c_2-d_2\cdot i$, 故 $\bar{z}_1+\bar{z}_2=(c_1+c_2)-(d_1+d_2)\cdot i$. 由此得到

$$\overline{(z_1+z_2)}=\bar{z}_1+\bar{z}_2.$$

最后，通过相应的运算还可证实下列法则:

$$\overline{(z_1\cdot z_2)}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2.$$

例

$$(3+4i)+(5-2i)=(3+5)+(4-2)i=8+2i.$$

$$(3+4i)-(5-2i)=(3-5)+(4-(-2))i=-2+6i.$$

$$(3+4i)\cdot(5-2i)=(3\cdot5-4\cdot(-2))+(4\cdot5+3\cdot(-2))i$$
$$=23+14i.$$

$$\frac{3+4i}{5-2i}=\frac{(3+4i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)}=\frac{(15-8)+(20+6)i}{25+4}$$
$$=\frac{7+26i}{29}=\frac{7}{29}+\frac{26}{29}i.$$

1.2 复平面

在一个平面上建立一个直角 xy-坐标系(右绕系). 于是每个复数 z 对应于以

$$x=\mathrm{Re}[z],\quad y=\mathrm{Im}[z]$$

为坐标的点(图 1). 这样一来, 就得到了复数与平面上的点之间的一一对应. 如此, 则可用一个复数来描写平面上一个点的位置. 例如, 原点 O 相应于复数 $z=0$. 这个平面本身称为复平面. 除了直角坐标系之外, 还采用一个极坐标系, 其中心位于直角坐标系的原点上. r 为由原点 O 至点 z 的距离; φ 为极角, 即正半 x 轴按反时针方向旋转达到射线 Oz 所经过的角(图 1). r 称为复数 z 的模, 用符号表示为 $r=|z|$. 对于每个复数 $z\neq0$, 其极角 φ 除了差一个 2π 的任意整数倍外是唯一确定的, 并称之为复数 z 的辐角, 用符号表示为 $\varphi=\arg z$.

按正弦函数与余弦函数的定义可知

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cdot\cos\varphi,\\ y&=r\cdot\sin\varphi.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

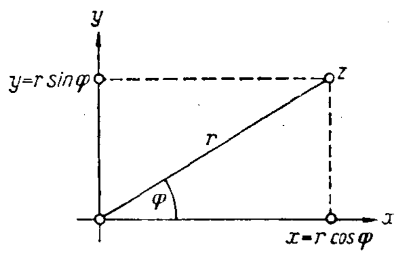

图 1

由此得到

$$z=x+y\cdot i=r(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi).$$

这个表达式称为复数的三角式. 模等于 1 的复数称为幺模的复数, 其形为 $z=\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi$. 一切幺模复数皆位于以 $z=0$ 为中心而以 1 为半径的圆周上. 由(1)得出

$$\tan\varphi=\frac{y}{z}=\frac{\mathrm{Im}[z]}{\mathrm{Re}[z]}\text{及}\quad r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

另一方面

$$\bar{z}=r(\cos\varphi-i\cdot\sin\varphi),\tag{2}$$

由此得到 $z\cdot\bar{z}=r^2$. 对于 $r=|z|$ 还有表达式

$$|z|^2=z\cdot\bar{z}.$$

因为 $\sin\varphi$ 与 $\cos\varphi$ 的模不超过 1，由(1)还可对于复数 z 的实部 $x=\mathrm{Re}[z]$ 与虚部 $y=\mathrm{Im}[z]$ 得出下列估计：

$$|\mathrm{Re}[z]|\leqq|z|,\quad |\mathrm{Im}[z]|\leqq|z|.\tag{3}$$

公式(2)还可写成

$$\bar{z}=r(\cos(-\varphi)+i\cdot\sin(-\varphi)).$$

这也是共轭复数 $\bar{z}$ 的三角式. 还有

$$|\bar{z}|=|z|\ \text{与}\ \arg\bar{z}\equiv-\arg z(\mathrm{mod}2\pi)^{1)}.$$

根据正弦与余弦函数的加法定理，对于两个复数 $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\cdot\sin\varphi_1)$ 与 $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\cdot\sin\varphi_2)$ 的积有下列公式：

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=r_1\cdot r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)\\&\quad+i\cdot(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2))\\&=r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2)).\end{aligned}$$

由此得

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,\quad \arg(z_1\cdot z_2)\equiv\arg z_1+\arg z_2(\mathrm{mod}2\pi).$$

特例

$$|z^2|=|z|^2,\quad \arg(z^2)\equiv2\cdot\arg z(\mathrm{mod}2\pi).$$

由归纳法知对于自然数 n 恒有

$$|z^n|=|z|^n,\quad \arg(z^n)\equiv n\cdot\arg z(\mathrm{mod}2\pi).$$

据此可得 Moivre 定理[2)]：令 $z=r(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$，则

---

1) "$\cdots\equiv\cdots(\mathrm{mod}2\pi)$"表示同余符号$\equiv$左右两边的数可以有形为 $k\cdot2\pi$ 的数量之差，这里 k 是一个整数.

2) 或称 de Moivre 公式，由

$$[r(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)]^n=r^n(\cos(n\varphi)+i\cdot\sin(n\varphi))$$

消去 r^n，即是三角学中常提到的德莫弗公式

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)$$——译者注.