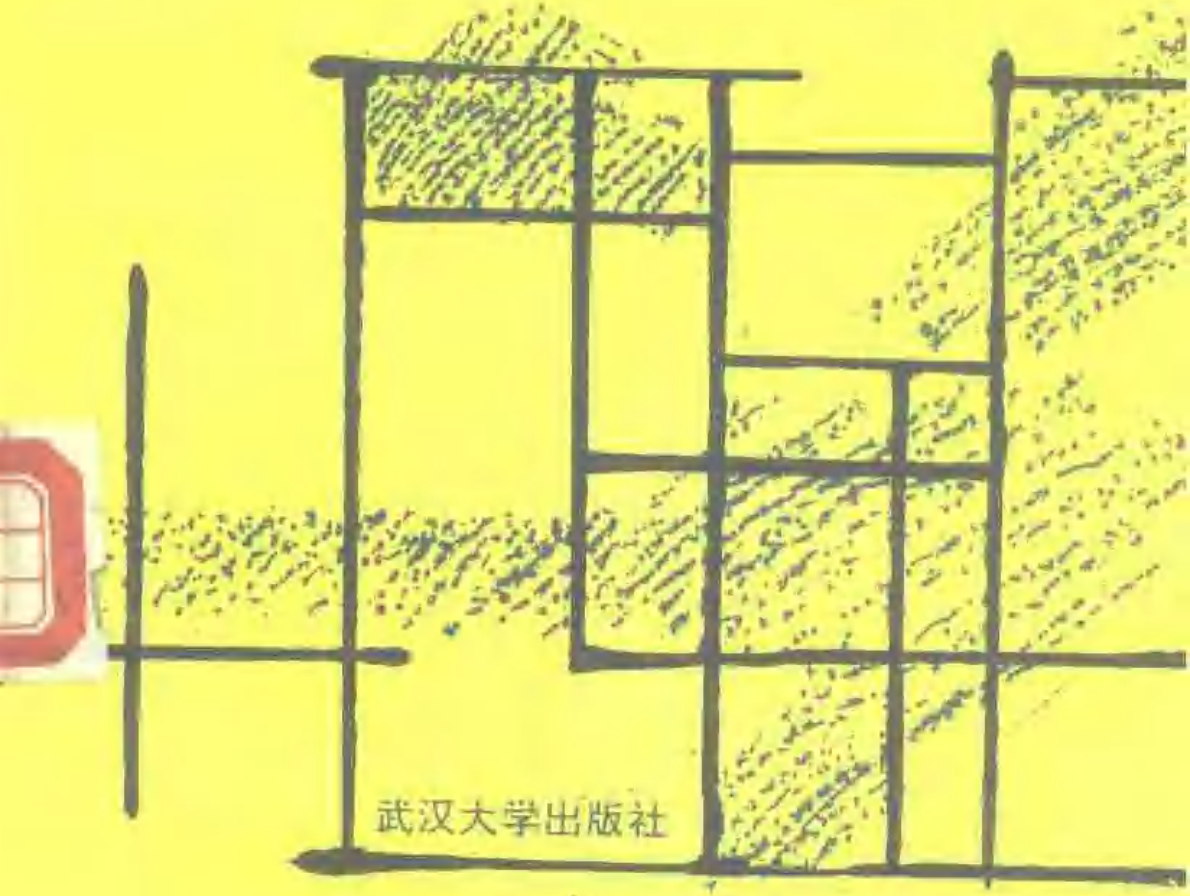
积分及概率·
傅立叶分析及谱分析

[法] P.马里亚万 G.勒塔克 著
余家荣 等译



武汉大学出版社

积分及概率·傅立叶分析及谱分析

教　程

〔法〕 P. 马里亚万　著

习题及解答

〔法〕 L. 勒塔克

余家荣等　译

武汉大学出版社

1993

(鄂)新登字 09 号

INTÉGRATION ET PROBABILITÉS
ANALYSE DE FOURIER ET ANALYSE SPECTRALE
COURS
P.MALLIAVIN
EXERCICES
G.LETAC

积分及概率·傅立叶分析及谱分析

教　程

© P.马里亚万　著

余家荣　肖修治　译

习题及解答

© G.勒塔克　著

孙道椿　译

*

武汉大学出版社出版发行

(430072　武昌　珞珈山)

武汉大学印刷厂印刷

*

850×1168　1/32　16.625印张　434千字

1993 年 7 月第 1 版　1993 年 7 月第 1 次印刷

印数：1—500

ISBN 7-307-01551-x/O·130

定价：9.30 元

《大学高年级纯粹数学丛书》的
分析教程引言

数学分析给出极限和无穷小运算的一组法则：变数代换的法则、交换极限次序的法则、积分号下求导的法则等等。然而我们若把分析归结为这种形式运算，就要失去这门学科的主要目的以及运算本身的意义。

从十八世纪开始，级数就用来定义新的函数。按照现代的说法，分析提出适当的完备空间中的问题，并证明存在定理。当存在性的结果由唯一性定理明确时，此时且仅在此时，近似解才有意义；近似解的数值计算法则往往是从分析中已有的方法得出的。

力学系统的运行服从最小作用原理。更一般地，由分析可定义值得注意的函数：即可用来求出自然中泛函的极小值的函数。这种极值函数的性质可由有关泛函的变分方程导出。

物理中初等的守恒律不能描述复杂的现象。然而在守恒律的描述中使用无穷小可导出偏微分方程。分析学证明了这些方程的解在大范围的存在及其性质，从而提供了从无穷小过渡到大范围的一种工具。

对有限 n 个事件的概率的计算往往等价于组合问题。当 n 趋近于无穷时，出现了简单极限法则。在那原来只有成批的错综复杂、令人生厌的数字罗列的地方，取极限就可出现在分析学计算方法中可以接受的正规函数。

本教程将阐明上述观点。它是供大学三、四年级学生学习

的，分为下列四卷，每卷一百到两百页：拓扑及泛函；积分，概率，傅立叶分析及谱分析；微分学，变分学与控制理论；复分析。每卷都将写成可以独立学习的一本书。

P。马里亚万
（P。Malliavin）

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

《大学高年级纯粹数学丛书》的
代 数 教 程 引 言

代数真的不是一门独立的学科，而是整个数学的基础和工具；它近年来的迅速发展正是由数学中其他学科的需要引出和导致的。

L. 克隆内克尔（1861），
全集，第5卷，第387页。

对于代数在当代数学中所占地位愈来愈重要这一众所周知的现象，即分析、几何和拓扑的所谓“代数化”，克隆内克尔（Kronecker）（所有时代中最卓越的代数学家之一）的意见看来与之似相矛盾。实际上，在代数研究能给予决定性支援的其他数学分支的影响下，代数学家善于转变他们的研究工作。——这正是代数所占重要地位的由来。一个典型的历史例证是线性和多重线性代数的发展：为了使之成为泛函分析的基本工具，这门学科首先必须从十九世纪困扰它的行列式和矩阵的一堆杂乱计算中解脱出来。同样我们知道，交换代数是由于下列两件事产生的：一件是狄德金(Dedekind)和韦贝尔(Weber)证明了数论和代数曲线论中的基本定理，另一件是希尔伯特(Hilbert)发现了可使不变式论从所陷入的无休止的计算中解救出来。这门学科从1920年开始的飞跃发展伴随着以它为基础的代数几何和解析几何从同

一时期开始的飞跃发展。

本代数教程是在克隆内克尔的精神下编写的，它不含有在数学其他分支中没有应用的纯粹代数的一个定义或结果，而且我们已经尽可能注意使学生们了解这一点。对于讲线性和多重线性代数的第一卷，这一点不成问题，因为它涉及的可以说是任何数学家的为“每天的食粮”，而无论他所研究的是数论、泛函分析、微分几何、代数拓扑或量子力学。

另外两卷分成三章，其中分别讲群论和代数数论的两章已经主要是讲代数的应用。讲交换代数中初等部分的第三章以数论和代数几何作为主要的应用领域。由于这种理论水平较高，本教程正文及习题中不可能有较多部分涉及到它；但是当不需要引进太多新概念时，我们总力图指出理论中许多纯粹代数概念“在几何上”与什么相对应。

J. 迪厄多内

（J. Dieudonné）

序

我们要讲勒贝格理论在现代分析中的种种发展：抽象积分，拉东测度，傅立叶分析，希尔伯特谱分析，索博列夫空间，伪微分算子，概率，鞅，求导理论。

为了在本书中能作出完整的证明，我们采用了公理化的叙述方法；所引入概念的意义，只有在读者读到例子时才会清楚。第一章中所讲的抽象积分就是这样，只有等到第二章才可看到公理化理论的一个有价值的例子：勒贝格积分。现在在拓扑学的教学中，公理化的方法是常用的，因此在积分论中，这种方法不会造成更多的困难。

另一方面，对于每个理论，我们尽力使它依赖于已经讲过的理论中的结果。这样对照可以节省篇幅，可以提供应用一般定理的有意义的例子，并且还可以表明所讲的整个课题的统一性。例如，拉东—尼科丁定理不是在第一章末尾讲的，而是在第四章末尾，作为鞅理论的一个例子讲的；于是我们得到几乎处处收敛的更强的结果。同样，条件概率是应用下列结果讲的：(i)拉东测度理论；(ii)一个一般的同构定理；它表明，只存在着一个无原子的可分测度空间的模型，即对 R 赋予勒贝格测度。最后，在抽象希尔伯特空间上酉算子的谱理论是从描述测度的傅立叶级数的博赫纳定理导出的。

在下面的目录中，读者可以看到前后讲述的详细内容。要想学到某些结果，不难部分地阅读本书。为了便于部分阅读，在第 8 页里可看到各节蕴含关系的图解，书末还补充了一个名词索

引。最后，初次阅读时可能跳过的部分，是用小字排印的。

想学概率论的读者，主要只读第一及第四章；想学傅立叶分析的，可主要只读第一及第三章；按照学偏微分方程或谱分析的设想，第三章的读法也可不同。

记号□记在每个证明的末尾。

记 号 索 引

集合记号：

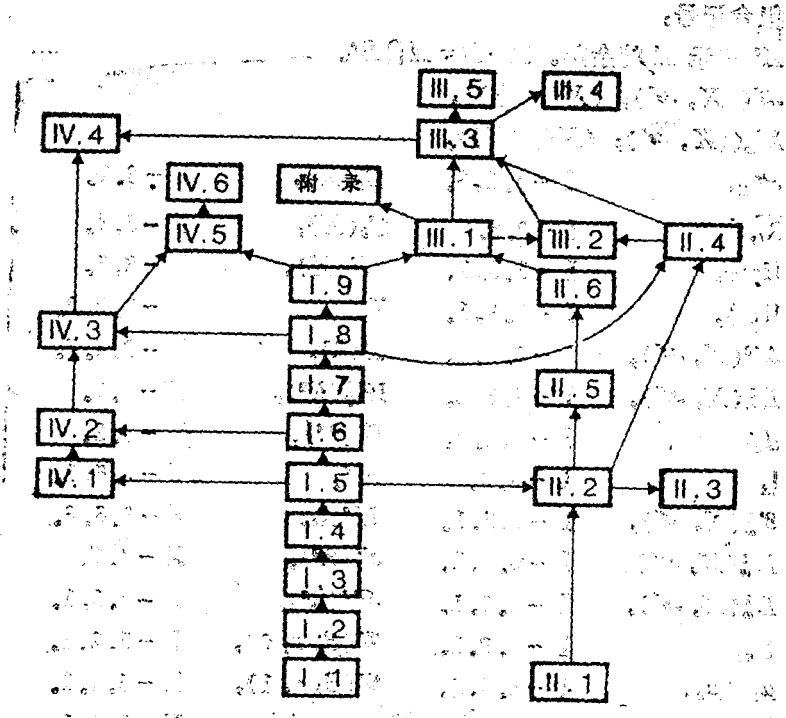
A^c 表示 A 的余集。$A-B=A\cap B^c$。

$\mathscr{M}((X,\mathscr{A});(X',\mathscr{A}'))$,

$M_a((X,\mathscr{A});(X',\mathscr{A}'))$,

$\mathscr{B}_X$,	I −1.2.3.	$C_0(X)$,	I −6.1.
$\overline{\mathrm{R}}$,	I −2.6.	$C_b(X)$,	I −6.4.
lim↑,	I −1.3.1.	$M'(X)$,	I −6.5.
lim↓,	I −1.3.1.	T,	I −1.2.2.
$\mathscr{L}^0(X,\mathscr{A})$,	I −2.4.4.	$A(\mathrm{R})$,	I −2.4.7.
$L_a^0(X,\mathscr{A})$,	I −4.3.3.	$W_p^1(R^n)$,	I −3.1.
d_a,	I −5.2.5.	$\mathscr{D}(\mathrm{R}^n)$,	I −3.2.
I_A	I −6.3.	H^s,	I −3.5.1.
$\mathscr{E}_a^1(X,\mathscr{A})$,	I −6.5.1.	$H^s{}_{loc}$,	I −3.5.6.
$E_a^1(X,\mathscr{A})$,	I −6.5.1.	$\mathscr{S}(\mathrm{R}^n)$,	I −4.1.
$L_a^1(X,\mathscr{A})$,	I −6.6.1.	$\mathscr{S}'(\mathrm{R}^n)$,	I −4.3.1.
T_a,	I −7.3.1.	$\mathscr{C}(\beta,r,0)$,	I −5.2.1.
$\mu_1\otimes\mu_2$,	I −8.4.2.	$\mathscr{C}(\beta,r,1)$,	I −5.4.1.
L^p,	I −9.	v. a.,	IV −1.6.1.
$C_E(X)$,	II −2.	E,	IV −1.7.0.
$M^+(X)$,	II −5.3.6.	$E^{\mathscr{B}}$,	IV −2.1.2.
$M(X)$,	II −5.3.6.	$\varphi_X(t)$,	IV −4.1.

各节蕴含关系图解



此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

法国数学丛书

武汉大学中法数学教学及研究中心编辑

G. 肖盖，J.-P. 卡昂纳及 P. 马里亚万先生协助编辑

Bibliothèque Mathématique Française

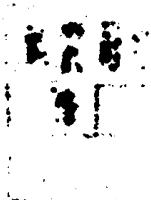
Redigée par le Centre sino-français
de l'Enseignement et de la Recherche Mathématiques
de l'Université de Wuhan
Avec le concours de
MM. G. Choquet, J.-P. Kahane et P. Malliavin

《法国数学丛书》缘起

根据中法文化交流协定，从1980年起，武汉大学在数学领域中一直进行中法之间的交流活动，先后建立了中法数学试验班及中法数学教学及研究中心。这项交流的目的是汲取法国的经验，推进我国数学专业教学改革及研究工作。现在这项工作已经取得了可喜的成果。为了向我国有关同志介绍法国经验，在我国及法国的一些同行的赞助下，我们决定出版《法国数学丛书》，选译法国的一些教材和专著。我们希望这套丛书能在我国数学专业教学改革及数学研究中发挥一些作用。

中法数学教学及研究中心*

1987年11月



* 这中心从1988年起改称中法数学及计算机科学中心。

积分及概率·傅立叶分析及谱分析

〔法〕P.马里亚万　著

余家荣　肖修治　译

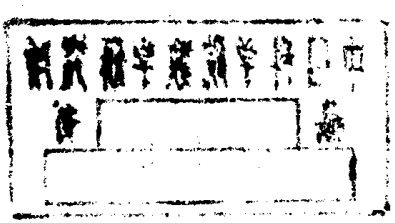
内 容 提 要

本书从法国 J. Dieudonné 及 P. Malliavih 院士所主编的大学高年级纯粹数学丛书中译出，包含有关教程及习题集。教程是 P. Malliavin 根据他在巴黎第六大学所授课程编写的，分为四章。他所授积分课程内容包含第一、二章以及第三章或第四章。积分部分是按泛函观点讲述的；傅立叶分析与谱分析以及概率部分包含了有关领域的基本内容。讲述精炼严谨。习题集是 G. Letac 配合教程编写的，包含题解。其中每道题往往由步步深入的一些小题组成，富于启发性。法国数学习题及考试题往往采用这种类型的题目。

出 版 说 明

本书译自 J. 迪厄多内和 P. 马里亚万两位院士主编的《大学高年级纯粹数学丛书》中的两卷，即《积分及概率·傅立叶分析及谱分析》的教程与习题及解答。教程部分是根据 P. 马里亚万在巴黎第六大学所授《积分》这一一学期的课程编写的。他讲授该课程时，其教材有时包含本教程的第一、二、三章，有时包含第一、二、四章。习题及解答部分是 G. 勒塔克配合教程编写的。其中每道题都由步步深入的一些小题组成。法国数学的习题及考题往往采用这样的模式。现在也译出来一并奉献给乐于涉猎它的读者，以期他们能从中获得某些借鉴或启示。

教程的第一、二章，第三、四章与习题及解答分别由肖修治、余家荣和孙道椿译出。



目　录

绪　论

第一章　可测空间和可积函数

1.　种族……（5）

布尔代数．种族的生成．博勒尔种族．积种族．单调类．

2.　可测空间……（10）

可测映射．可测性和连续性．可测映射的简单极限是可测的．

3.　测度……（20）

测度空间．有限可加性．可数可加性．凸性不等式．关于单调序列的测度的连续性．

4.　零测度集……（25）

几乎必然性质．可测映射类的空间 M_μ．

5.　M_μ 上的收敛性……（28）

几乎处处收敛性．M_μ 上的测度收敛的距离．在完备度量空间中取值的可测映射的空间 M_μ 是完备的．

6.　可积函数空间 L^1……（36）

初等函数．有限布尔代数．可积的初等函数向量空间 E_μ^1．L_μ^1 定义为 E_μ^1 的完备化．积分是 L_μ^1 上的正线性泛函[1]．

7.　积分号下取极限……（50）

L_μ^1 是完备的．关于级数的勒贝格定理．关于增加序列的法图-皮波-勒维定理．可测函数的可积性准则．勒贝格控制

1）原文为 forme linéaire，意为线性型，现按习惯译为线性泛函。——译者注

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com