有限元素法续讲

李大潜等编

科学出版社

内 容 简 介

本书是《有限元素法选讲》一书的续篇. 共九章: 第一章至第三章由浅入深地介绍在应力分析中常用的等参数元素方法以及与其有关的高斯积分法; 第四章着重讲述处理空心柱形杆扭转问题的有限元素法，其中包含作者的一部分研究成果; 第五章介绍板、壳应力分析的有限元素法; 第六章介绍求解大型线代数方程组的方法; 第七章介绍进行塑性应力分析的有限元素法; 第八、九章介绍求解弹性体振动问题的有限元素法。

本书可供从事机械和建筑结构强度分析的工程技术人员、计算工作者使用，也可供高等院校有关专业师生参考。

有 限 元 素 法 续 讲

李 大 潜 等 编

科 学 出 版 社 出 版
北京朝阳门内大街 137 号

河北新华印刷一厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

1979 年 9 月第一版　开本: 787×1092 1/32
1979 年 9 月第一次印刷　印张: 13 7/8
印数: 0001—27,600　字数: 316,000

统一书号: 13031·1052
本社书号: 1477·13—1

定价: 1.40 元

前　言

本书是前书《有限元素法选讲》(科学出版社, 1976) 的续篇，是在前书初步介绍了有限元素法基本思想的基础上，为适应广大工程技术人员及应用数学工作者对深入掌握、推广与应用有限元素法的迫切需要而编写的. 初稿曾在 1977 年上半年用作一机部有限元素法短训班的教材，收到了良好的效果. 这次，又在此基础上进行了补充和修订.

本书正文共分九章. 其中第一至三章，由浅入深地介绍在应力分析中常用的等参数元素方法以及与其有关的高斯积分法. 第四章著重讲述处理空心柱形杆扭转问题的有限元素法，其中包含了我们自己对处理“等值面边值问题”的一部分研究成果. 第五章介绍板、壳应力分析的有限元素法. 第六章介绍求解大型线代数方程组的方法，希望能用较小的机器来求解较大型的课题. 第七章介绍进行弹塑性应力分析的有限元素法. 第八、九章介绍求解弹性体振动问题的有限元素法，其中在求矩阵特征值及特征向量的方法中包含了一些较新的内容. 在正文之后，还附有十个附录，提供了与正文有关的一些标准程序，供实际工作者选择使用或参考. 在编写中，我们力图使本书既能切合实际的需要，易于为广大读者学习或使用，同时又比较详细地介绍一些必需具备的数学知识，帮助读者掌握较好的数学基础.

本书是集体劳动的成果. 其中第一至四章及附录三由李大潜同志编写，第五、八章(包括第九章 §2) 及附录一、二、八、十由李瑞遐同志编写，第六章由沈玮熙同志编写，第七章及附

录五至七由谭永基同志编写，第九章及附录四、九由郑宋穆同志编写．全书由李大潜同志负责修改定稿．

在本书的编写及修订过程中，我们曾得到我校及不少协作单位和兄弟院校的同志们的鼓励和帮助，上海市内燃机研究所王奇新同志并为我们绘制了全部插图，在此一并表示深切的谢意．我们并热忱地期望读者对本书的缺点或错误提出宝贵的批评意见．

编　者

一九七七年十二月廿八日

目　录

第一章　二维等参数元素

§1　三角形线性元素

在用有限元素法求解二维问题(包括平面问题及轴对称问题)时，最简便可行的方法是：将求解区域进行三角形有限元素分割，取三角形元素的顶点为节点，在每个三角形元素上利用三个顶点上的函数值进行线性插值，并在此基础上将所考察的泛函离散化，最后引出有限元素法的计算格式而求解．详细的做法已在前书《有限元素法选讲》中作了介绍，不再复述．象这样的元素，称为三角形线性元素．

在计算实践中可以发现，采用三角形线性元素是比较方便的，且能比较灵活地适应不规则的几何形状，因而仍不失为是一种简便有效的方法．但是，由于采用的是线性插值，精度往往不够理想．例如，在应力分析问题中，它在每个元素中的应力和应变都是常数，因而，特别在应力集中的部位，产生的误差较大；有时即使在应力集中的范围内配置极为密集的元素，仍然不能较好地反映应力集中的趋势，不能给出应力集中因子的比较正确的数值．

为了提高计算的精度，目前比较多地采用等参数元素，并取得了较好的效果．根据“由浅入深”的原则，下面我们从已熟悉的三角形线性元素讲起，逐步引入等参数元素的概念和方法．本章介绍二维的等参数元素，下章介绍三维的等参数元素．对于在应用等参数元素时所采用的高斯求积法将在第三章中叙述．

我们已知，在任一三角形元素 $e(i, j, m)$ 上(图 1.1)，利

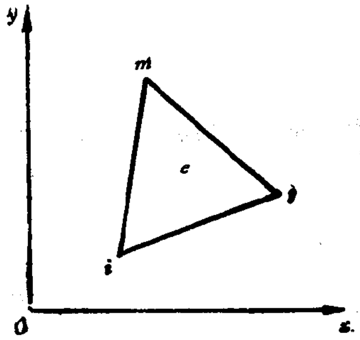

图 1.1

用函数 u 在三节点 i, j, m 上的函数值 u_i, u_j, u_m 进行线性插值，其插值函数可写为

$$u=\sum_{i,j,m} N_i(x, y)u_i, \tag{1.1}$$

其中

$$N_i(x, y)=\frac{1}{2\Delta_e}(a_i+b_ix+c_iy) \text{ 等}, \tag{1.2}$$

而

$$\begin{cases} a_i=x_jy_m-x_my_j, \\ b_i=y_j-y_m, \\ c_i=x_m-x_j. \end{cases} \tag{1.3}$$

其余循环定义；又

$$\Delta_e=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(b_ic_j-b_jc_i) \tag{1.4}$$

为元素 e 的面积.

我们看到，在线性插值公式 (1.1) 中，节点函数值 u_i 前面的系数 $N_i(x, y)$ 等具有下面的性质：

(1) $N_i(x, y)$ 等是 x, y 的线性函数，和插值函数具有同样的类型. 这对保证(1.1)式是线性插值公式自然是必须的.

(2) $N_i(x, y)$ 在节点 i, 其值为 1; 在其余节点 j 和 m,

其值为 0. 对 N_j, N_m 有类似的关系式. 即有

$$\begin{cases} N_i(x_i, y_i)=1,\ N_i(x_j, y_j)=N_i(x_m, y_m)=0, \\ N_j(x_j, y_j)=1,\ N_j(x_i, y_i)=N_j(x_m, y_m)=0, \\ N_m(x_m, y_m)=1,\ N_m(x_i, y_i)=N_m(x_j, y_j)=0. \end{cases} \tag{1.5}$$

已知 $N_i(x, y)$ 等函数可以表示点 $p(x, y)$ 的面积坐标, 即若记三角形 p, j, m 的面积为 Δ_i 等(图 1.2), 就有

$$N_i(x, y)=\frac{\Delta_i}{\Delta_e}\text{ 等}, \tag{1.6}$$

由此立刻可以得到 (1.5) 式.

显然 (1.5) 式对保证插值函数 (1.1) 在节点 i, j, m 能取给定的值 u_i, u_j, u_m 来说是必须的.

在插值公式中, 节点未知量 u_i 前面的系数 $N_i(x, y)$ 等是一些点坐标的函数, 但它们只和元素的形状、节点的配置及插值的方式有关, 而和节点未知量无关, 故今后我们统一称其为形状函数或形状因子.

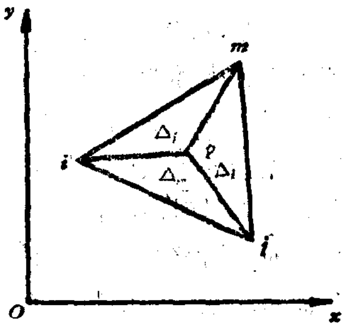

图 1.2

容易看到, 利用前述的性质 (1) 及性质 (2), 可以完全决定这些形状函数的具体形式, 即重新推得 (1.2).

我们已知, 线性插值公式 (1.1) 在二相邻三角形元素的公共边上一定满足相容性条件, 即在公共边上能保证插值函数的连续性. 由于 (1.1) 是线性插值公式, 将它用于线性函数是精确成立的. 因此有等式

$$\begin{cases} x=\sum\limits_{i,j,m} N_i(x, y)x_i, \\ y=\sum\limits_{i,j,m} N_i(x, y)y_i \end{cases} \tag{1.7}$$

及

$$1=\sum_{i,j,m}N_i(x,\ y). \tag{1.8}$$

它们保证在每个元素上能通过适当选取节点未知量的数值，使插值函数精确地满足任意给定的线性函数．由于在应力分析问题中，线性的位移对应于常数的应变，因此这也表明在每个元素上能通过插值精确地构造出常应变的解，通常称为“常应变准则”．这对保证用有限元素法求解应力分析问题的收敛性是必要的．

我们看到，(1.7) 式是用节点的位置坐标值来表示位置坐标变量的表达式，而表达式中节点位置坐标值前面的系数同样是前述的形状函数．

于是，在每一个元素上，未知函数利用其节点值的插值公式和位置坐标变量利用其节点值的表达式具有完全相同的形式．它们都用同样个数的相应的节点值作为参数，并且具有完全相同的形状函数作为这些节点值前面的系数．当参数取节点未知量时，就得到未知函数的插值公式；当参数取节点坐标值时，就得到位置坐标的表达公式．这样，对三角形线性元素而言，在未知函数插值公式与位置坐标表达式之间有这样一个协调的对应关系．以后可以看到，这就是等参数元素的基本特征．因此，三角形线性元素本身就是一种最简单的等参数元素，而以后的一些等参数元素实际上可看成是从它发展而来的．

§2 矩形双线性元素

为了提高三角形线性元素的精度，当然也可以通过在其上增加节点并相应地提高插值多项式的次数的办法，构造三角形二次元素、三角形三次元素等．但为今后便于推广到三维的情形，我们将不沿着这一思路进行，而转入考察四边形元素．

先考察规则区域的情况，这时可划分为矩形元素. 考察任一矩形元素. 不失一般性，可设它是边长为 2 的正方形元素，而坐标原点取在其中心处，如图 1.3. 因为对于中心在 (x_0, y_0)，边长为 $2a$，$2b$ 的矩形元素，通过简单的坐标变换

$$\begin{cases} x'=\dfrac{x-x_0}{a}, \\ y'=\dfrac{y-y_0}{b} \end{cases}$$

就可以化为此种情形.

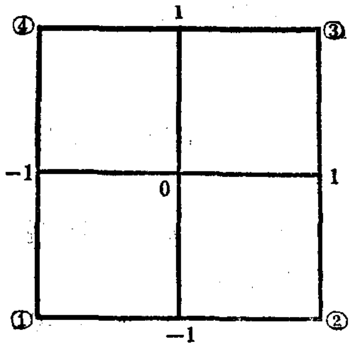

图 1.3

取此正方形元素的四个顶点为节点，记为 1, 2, 3, 4, 其上节点函数值分别记为 u_1, u_2, u_3, u_4.

针对元素的特点，我们采用双线性插值，即取插值函数的形式为：

$$u=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y+\alpha_4 xy, \tag{2.1}$$

其中 α_1, α_2, α_3, α_4 为待定常数，其值应由节点上的函数值 u_i $(i=1, 2, 3, 4)$ 所唯一决定.

我们看到，插值函数(2.1)的特点是：固定 x，它是 y 的线性函数；固定 y，它是 x 的线性函数，故称其为**双线性函数**. 而这样的元素，就称为**矩形双线性元素**. 由于(2.1)比线性插值公式多了含 xy 的一项，精度可望有一定的提高.

现在我们来写出插值函数的具体形式. 同样，它也应可写为节点变量值与相应的形状函数的乘积：

$$u=\sum_{i=1}^{4} N_i(x, y) u_i, \tag{2.2}$$

其中形状函数 $N_i(x, y)$ $(i=1, 2, 3, 4)$ 仍应满足下述的两个要求：

(1) $N_i(x, y)$ 是与插值函数同样类型的双线性函数;

(2) $N_i(x, y)$ 在节点 i, 其值为1; 在其余节点 $j \neq i$, 其值为0. 即

$$N_i(x_i, y_i)=1; \quad N_i(x_j, y_j)=0, \\ (j \neq i,\ j=1, 2, 3, 4). \tag{2.3}$$

我们不难利用这两个要求来决定形状函数 $N_i(x, y)\,(i=1, 2, 3, 4)$.

以 $N_1(x, y)$ 为例来说明. 它在节点 2, 3, 4 应为 0. 注意到直线 $\overline{23}$, $\overline{34}$ 分别通过这些节点, 而其方程分别为

$$x-1=0 \quad 及 \quad y-1=0.$$

因此, 函数 $(x-1)(y-1)$ 在节点 2, 3, 4 为 0, 且为双线性函数. 于是可取

$$N_1(x, y)=C(x-1)(y-1),$$

而常数 C 可由 $N_1(x, y)$ 在节点 $1(-1, -1)$ 应取值为 1 的条件, 来决定, 从而 $C=\frac{1}{4}$. 于是得到

$$N_1(x, y)=\frac{(1-x)(1-y)}{4}.$$

类似的方法可求得 N_2, N_3, N_4. 最后得到

$$\begin{cases} N_1(x, y)=\dfrac{(1-x)(1-y)}{4}, \\ N_2(x, y)=\dfrac{(1+x)(1-y)}{4}, \\ N_3(x, y)=\dfrac{(1+x)(1+y)}{4}, \\ N_4(x, y)=\dfrac{(1-x)(1+y)}{4}. \end{cases} \tag{2.4}$$

注意到节点 i 的坐标 (x_i, y_i) 分别为

$$\begin{cases} (x_1, y_1)=(-1, -1), & (x_2, y_2)=(1, -1), \\ (x_3, y_3)=(1, 1), & (x_4, y_4)=(-1, 1), \end{cases} \tag{2.5}$$

就可将 (2.4) 式写为统一的形式

$$N_i(x, y)=\frac{(1+x_i x)(1+y_i y)}{4}, \quad (i=1, 2, 3, 4). \tag{2.6}$$

在决定了形状函数 $N_i(x, y)$ 后，插值公式 (2.2) 也就完全确定.

由于采用的是双线性插值，在矩形元素的每一边($x=\pm1$ 或 $y=\pm1$) 上，插值函数分别是 y 或 x 的线性函数，在其上插值函数之值，完全由此边上两节点的函数值所唯一决定. 因此，如此构造的插值函数在相邻二矩形元素的公共边上，只要在公共节点上有同样的值，均能保证连续性的要求，即满足相容性条件.

这种双线性插值，对于任何双线性函数，特别对于任何线性函数都是精确成立的. 于是下列等式必定成立:

$$\begin{cases} x=\sum_{i=1}^{4} N_i(x, y)x_i, \\ y=\sum_{i=1}^{4} N_i(x, y)y_i \end{cases} \tag{2.7}$$

及

$$1=\sum_{i=1}^{4} N_i(x, y). \tag{2.8}$$

因此，和三角形线性元素一样，这里未知函数的插值公式 (2.2) 和位置坐标的表达式 (2.7) 具有相同的形式. 它们同样依赖于节点上的相应变量值，有相同的形状函数. 因此，矩形双线性元素也是一种等参数元素. 同时，它也满足保证收敛性的“常应变准则”.

在用位移法求解应力分析问题时，对位移 u 及 v 要同时采用上述的插值方式. 这样，由于插值函数中包含 xy 项，在元素上的应力与应变将不再是常数，而是呈线性变化的，精度比三角形线性元素要好一些. 但在不同元素间应力与应变仍将是不连续的.

§3 四节点四边形等参数元素

1. 四节点四边形等参数元素

前节所述的矩形双线性元素只能适用于规则区域. 对于不规则的区域, 必须用任意四边形元素来代替矩形元素进行有限元素分割.

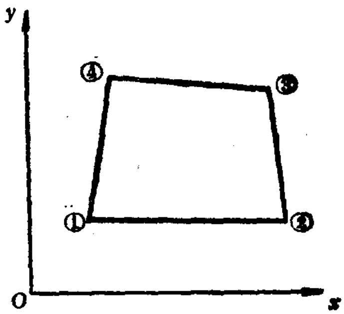

图 1.4

任取一个任意四边形元素 1, 2, 3, 4, 如图 1.4, 取其四顶点为节点, 其坐标分别记为 $(x_i, y_i)(i=1, 2, 3, 4)$.

很容易看出, 在任意四边形元素的情形, 采用前述的双线性插值公式(2, 1)一般将不能满足相容性条件. 事实上, 在元素的不平行于坐标轴的任一边上, 由于此边方程可写为

$$y=kx+b \quad (k\neq 0)$$

的形式, 其上的插值函数(2.1)将具有二次函数

$$u=Ax^2+Bx+C$$

的形状, 而不再是线性变化的. 因此, 在此边上插值函数之值将不能由其上二节点的函数值所唯一决定, 从而在相邻二元素的公共边上将不能保证插值函数为连续, 即相容性条件得不到满足.

由于相容性条件对保证位移的连续性是必要的, 因此, 我们不能直接在四节点任意四边形元素上采用双线性插值的方式来构造插值函数. 但是, 在矩形元素的情况, 这却是可行的. 因此, 我们必须创造必要的条件, 促成事物的转化, 将任意四边形元素设法变到矩形元素去. 而这就必须引入一个相应的坐标变换. 下面可以看到, 在一般的等参数元素方法中,

都离不开一个相应的坐标变换. 这种坐标变换已成为有限元素法研究中的一个不可分割的组成部分.

我们希望通过一个自变量 (x, y) 到新自变量 (ξ, η) 的坐标变换，使上述元素化为 (ξ, η) 平面上以原点为中心、边长为2的正方形区域，而 (x, y) 平面上的节点1, 2, 3, 4分别对应于 (ξ, η) 平面上的节点1, 2, 3, 4, 如图1.5. 这个坐标变换不是对整个求解区域进行的，而是对每一个元素分别进行的. 故今后称 (x, y) 为整体坐标，它适用于所有元素，即适用于整个求解区域; 而称 (ξ, η) 为局部坐标，它只适用于每一个元素. 我们要在每一个元素上，考察整体坐标 (x, y) 与局部坐标 (ξ, η) 之间满足上述要求的坐标变换.

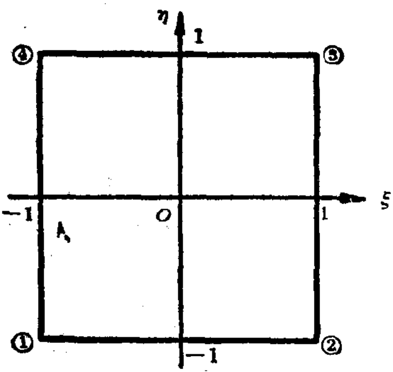

图 1.5

为了得到这个坐标变换，只要指出图1.4的任意四边形元素和图1.5的矩形元素之间点的一一对应关系，并使有关的节点相互对应就可以了. 因此，这个坐标变换可以用如下的方法来直观地得到: 如图1.6, 对整体坐标下的元素，将各对边的等分点用直线连接，并规定它与局部坐标下元素相应对边的相应等

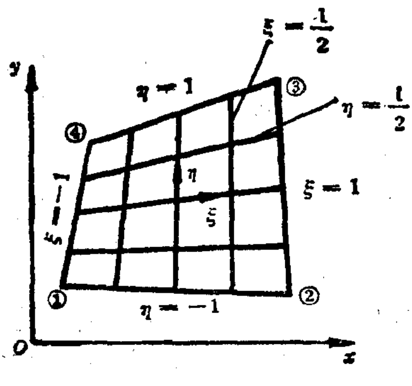

图 1.6

分点的连线相对应，就得到了这样的一一对应关系，即确定了相应的坐标变换。这也说明了这样的坐标变换是的确存在的。

要具体写出这个坐标变换的解析表达式，目前看来自然还不是很方便的。现在暂时把它放在一边，而转过来先考察通过如此变换后，插值函数应该具有怎样的形式，然后再回到坐标变换的具体表达式上来。

由于在局部坐标 (ξ, η) 下的元素是上节考虑过的矩形元素，而在其四节点上的函数值应是原先整体坐标下的节点变量值 $u_i(i=1, 2, 3, 4)$，于是由 (2.2) 式可得局部坐标 (ξ, η) 下的插值函数为

$$u=\sum_{i=1}^{4} N_i(\xi, \eta) u_i, \tag{3.1}$$

其中形状函数

$$N_i(\xi, \eta)=\frac{(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)}{4} \quad (i=1, 2, 3, 4), \tag{3.2}$$

而 (ξ_i, η_i) 为节点 i 的局部坐标：

$$\begin{aligned} &(\xi_1, \eta_1)=(-1, -1), \quad (\xi_2, \eta_2)=(1, -1), \\ &(\xi_3, \eta_3)=(1, 1), \quad (\xi_4, \eta_4)=(-1, 1). \end{aligned} \tag{3.3}$$

且由(2.7)，(2.8)式，此时下列等式成立

$$\left\{\begin{aligned} \xi &=\sum_{i=1}^{4} N_i(\xi, \eta) \xi_i, \\ \eta &=\sum_{i=1}^{4} N_i(\xi, \eta) \eta_i \end{aligned}\right. \tag{3.4}$$

及

$$1=\sum_{i=1}^{4} N_i(\xi, \eta), \tag{3.5}$$

称为在局部坐标下满足“常应变准则”.

由于 (3.1) 式是 ξ, η 的双线性函数，在元素的每一边上它是 ξ (或 η) 的线性函数，其值由此边上二节点的变量值所完全决定；因此，在局部坐标下插值函数满足相容性条件。