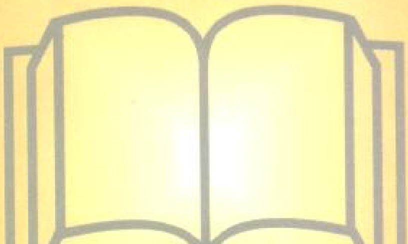
GAODENG SHUXUE XITIKE JIANGYI

高等数学习题课讲义

任传荣 等编



天 津 大 学 出 版 社

高等数学习题课讲义

任传荣　张　青　廖一原
韩　雁　石新华

天津大学出版社

内 容 提 要

本书是为高等数学课程而编写的习题课教材，它有利于学生全面、系统地掌握高等数学的概念、理论和方法．全书共分 12 章，每章有基本概念和主要结论、例题和练习题三部分．所举例题均有较强的综合性，难易搭配适中，并配有一定量的练习题（计算题给出答案）．各章自成系统，可单独阅读．

本书既可作为教学参考书，也可作为学习高等数学的大学生以及科技工作者的学习参考书．

图书在版编目（CIP）数据

高教数学习题课讲义/任传荣等编．—天津：天津大学出版社，1999.5

ISBN 7-5618-1020-2

Ⅰ．高…　Ⅱ．任…　Ⅲ．高等数学-高等学校-解题　Ⅳ．O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 22002 号

出　版　天津大学出版社（电话：022—27403647）
出版人　杨风和
地　址　天津市卫津路 92 号天津大学内（邮编：300072）
印　刷　河北省昌黎县印刷总厂
发　行　新华书店天津发行所
开　本　850mm×1168mm　1/32
印　张　11.25
字　数　293 千
版　次　1998 年 10 月第 1 版
印　次　1999 年 6 月第 2 次
印　数　4 001—9 000
定　价　17.00 元

前　言

高等数学是工科院校一门

限于编者水平，书中不当之处在所难免，恳请读者批评指正.

编者
1998年7月

目　录

第一章　函数与极限

学习目的与要求　理解函数、极限和连续这三个高等数学中的基本概念，其中极限的概念及其运算是本章的重点与难点. 掌握极限的运算法则和两个极限存在准则，以及基本初等函数的性质及其图形，要了解间断点的概念和闭区间上连续函数的性质.

函　　数

一、基本概念和主要结论

1. 函数的定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是已知数集，如果对于每一个数 $x \in D$，变量 y 按照一定的对应规律 f，总有唯一确定的数值与它对应，则称 y 是 x 的函数. 记作 $y=f(x)$，数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量. 数集 $W=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

2. 函数的图形

已知函数 $y=f(x)$，定义域为 D，称平面点集：$C=\{(x,y) \mid y=f(x), x \in D\}$ 为函数 $y=f(x)$ 的图形.

3. 函数的几种特性

(1)有界性　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，数集 $I \subset D$，如果存在正数 M，使得对于一切的 $x \in I$ 都有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在数集 I 上有界.

(2)单调性　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$，如果对于任意的 x_1、$x_2 \in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或

$f(x_1)>f(x_2)$)则称函数 $y=f(x)$在区间 I 上是单调增加(或减少)的.

(3)周期性　设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,如果存在一个不为零的数 T,使得对于一切 $x\in D$,有$(x+T)\in D$,且$f(x+T)=f(x)$恒成立,则称函数$f(x)$为周期函数,T 称为$f(x)$的周期.通常我们说函数的周期是指最小正周期.

(4)奇偶性　设函数 $y=f(x)$的定义域 D 关于原点对称,如果对于任意的 $x\in D$,$f(-x)=f(x)$恒成立,则称函数$f(x)$为偶函数.如果对于任意的 $x\in D$,$f(-x)=-f(x)$恒成立,则称函数$f(x)$为奇函数.

4.反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,值域为 W.如果对应关系是一对一的,即若 $x_1\neq x_2$,$x_1,x_2\in D$,则 $f(x_1)\neq f(x_2)$,于是对于任意的 $y\in W$,有唯一确定的 $x\in D$ 与之对应,使得 $y=f(x)$,这样在 W 上定义了一个新的函数,称为函数 $f(x)$的反函数.记作 $x=\varphi(y)$(或 $x=f^{-1}(y)$).

5.复合函数

设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_1,函数 $u=\varphi(x)$的定义域为 D_2,值域为 W_2,并且 $W_2\subset D_1$,由此对于任意的 $x\in D_2$ 有唯一确定的$\varphi(x)=u\in W_2\subset D_1$,于是对此 $u\in D_1$ 有唯一确定的 $y=f(u)$,这样确定的新函数 $y=f[\varphi(x)]$,$x\in D_2$,称为由 $y=f(u)$及 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数.

6.初等函数

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数,统称为基本初等函数.凡是由基本初等函数,经过有限次的四则运算或有限次的复合所构成,并可用一个式子表示的函数,称为初等函数.

二、例题

判断题

1. 若函数 $f(x)$与 $g(x)$均为周期函数，则 $f(x)+g(x)$必为周期函数. （$\checkmark$）

事实上，设 T_1、T_2 分别为函数 $f(x)$和 $g(x)$的周期，T 为 T_1 与 T_2 的最小公倍数，则 T 必为$f(x)+g(x)$的周期.

2. 周期函数一定有最小正周期. （$\times$）

例如，函数 $f(x)=1, x\in(-\infty,+\infty)$为周期函数，但无最小正周期.

3. 若函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $f[f(x)]=x$. （$\times$）

事实上，$f[f(x)]=\begin{cases} x, & x\neq 0; \\ \text{无定义}, & x=0. \end{cases}$

4. 设函数 $f(u)=\arcsin u, u=\varphi(x)=2+x^2$，则 $f[\varphi(x)]$一定为 x 的复合函数. （$\times$）

事实上，两个函数不能复合.

5. 若函数 $f(u)$为偶函数，$u=\varphi(x)$为奇函数，则 $f[\varphi(x)]\cdot\varphi(x)$一定为奇函数. （$\checkmark$）

事实上，$f[\varphi(-x)]\cdot\varphi(-x)=-f[\varphi(x)]\cdot\varphi(x)$.

6. 设 $f(x)$与 $g(x)$均为(a,b)上的无界函数，则 $f(x)\cdot g(x)$一定为(a,b)上的无界函数. （$\times$）

例如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上为无界函数，$g(x)=x$ 在$(0,+\infty)$上也为无界函数，但 $f(x)\cdot g(x)=1$ 为$(0,+\infty)$上的有界函数.

7. 设 $f(x)=2\ln x, g(x)=\ln x^2$，则 $f(x)$与 $g(x)$相同. （$\times$）

事实上,$f(x)$与 $g(x)$的定义域不同.

8.设 $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$,$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$,则 $f(x)$与$g(x)$相同. (√)

事实上,$f(x)$与 $g(x)$的定义域相同,并且对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$均有$\sqrt[3]{x^4-x^3}=x\sqrt[3]{x-1}$.

计算与证明题

例 1. 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}(x>0)$,求(1)$f[f(x)]$,(2)$f(x)$的反函数.

解:(1) $f[f(x)]=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}}=\dfrac{x/\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+(x^2/1+x^2)}}=$

$$\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}(x>0).$$

(2)令 $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,两边平方有

$$y^2=\frac{x^2}{1+x^2}.$$

从而有 $x=\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$或 $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,$(0<x<1)$.

例 2. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$,$g(x)=\dfrac{1}{x}$,求 $f[g(x)]$及 $g[f(x)]$.

解:$f[g(x)]=\dfrac{1-g(x)}{1+g(x)}=\dfrac{x-1}{x+1}$,$(x\neq 0,x\neq -1)$.

$$g[f(x)]=\frac{1}{f(x)}=\frac{1+x}{1-x},(x\neq 1,x\neq -1).$$

例 3. 设函数 $f(x)$在$(-l,+l)$内有定义,试证

$F_1(x)=f(x)+f(-x)$,$F_2(x)=f(x)-f(-x)$分别为偶

函数和奇函数.

证: 因为 $F_1(-x)=f(-x)+f[-(-x)]$

$$=f(-x)+f(x)=F_1(x),$$

$$F_2(-x)=f(-x)-f[-(-x)]=f(-x)-f(x)$$

$$=-F_2(x).$$

所以它们分别为偶函数和奇函数.

例 4. 证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$内无界.

证: 对于任意给定的正数 M,取 $n=[M]+1$,此时$\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ $\in(0,1)$,则有

$$f\left(\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right)=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=2n\pi+\frac{\pi}{2}>M.$$

所以,$f(x)$在$(0,1)$内无界.

例 5. 证明任意有理数均为 Dirichlet 函数的周期.

证: 根据 Dirichlet 函数的定义,

$$D(x)=\begin{cases}1, x\text{ 为有理数;}\\0, x\text{ 为无理数.}\end{cases}$$

设 r 为任意给定的有理数,于是当 x 为有理数时,$r+x$ 也为有理数,当 x 为无理数时,$r+x$ 也为无理数,于是

$$D(x+r)=\begin{cases}1, x\text{ 为有理数;}\\0, x\text{ 为无理数.}\end{cases}$$

从而,$D(x+r)=D(x)$.

例 6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1;\\0, & |x|=1;\\-1, & |x|>1.\end{cases}$ $\quad g(x)=e^x$.

求 $f[g(x)]$及 $g[f(x)]$.

解:

$$f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases}1, & |e^x|<1\\ 0, & |e^x|=1\\ -1, & |e^x|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & e^x<1\\ 0, & e^x=1\\ -1, & e^x>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & x<0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x>0.\end{cases}$$

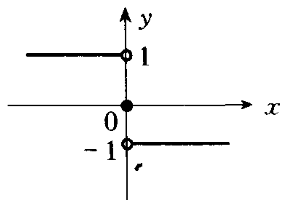


图 1-1

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e^1, |x|<1\\ e^0, |x|=1\\ e^{-1}, |x|>1\end{cases}=\begin{cases}e, & |x|<1;\\ 1, & |x|=1;\\ \dfrac{1}{e}, |x|>1.\end{cases}$$

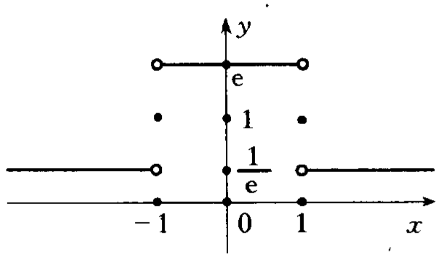


图 1-2

三、练习题 1-1

1. 设 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, $g(x)=\dfrac{1}{1+x}$, 求 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$

的定义域.

2. 如果 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f_n(x)=\underbrace{f(f(\cdots f}_{n重}(x)))$.

3. 求函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的反函数.

4. 下列各对函数是否是同一个函数.

(1) $y=\sqrt{x}, x\geqslant 0$；$S=\sqrt{t}, t\geqslant 0$.

(2) $y=\arcsin x, 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$；$y=\arcsin x, 0\leqslant x\leqslant 1$.

(3) $y=|x|, -\infty\leqslant x\leqslant+\infty$；$y=x\cdot\operatorname{sgn}x, -\infty<x<+\infty$.

5. 设 $f(x), g(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期函数，周期分别为 T_1, T_2. 证明 $f(x)\cdot g(x)$ 也是周期函数.

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x, x\leqslant 1;\\ x^2+2, x>1.\end{cases}$ 求 $f(x-a)$.

极限与连续函数

一、基本概念和主要结论

1. 数列极限的定义

已知数列 $\{x_n\}$，如果对于任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，使得对于适合 $n>N$ 的一切 x_n，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 恒成立，则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a. 记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，如果数列的极限不存在，则称数列是发散的.

2. 函数极限的定义

(1) 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限的定义

如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 X，使得对于适合不等式 $|x|>X$ 的一切 x，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)$

$-A|<\varepsilon$，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$. 类似地，当 $x\to+\infty(x\to-\infty)$ 时，只须将上述定义中的 $|x|>X$，改为 $x>X(x<-X)$ 便得

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(A)=A(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A)$ 的定义.

(2)当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限的定义

如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得对于适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x，对应的函数值 $f(x)$，都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

(3)单侧极限

左极限　记号 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A$（或 $f(x_0-0)=A$）表示 $x<x_0$ 且 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限. 此时称 A 为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限.

右极限　记号 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A$（或 $f(x_0+0)=A$）表示 $x>x_0$ 且 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限，此时称 A 为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的右极限.

显然，函数 $f(x)$ 在 x_0 处极限存在的充分必要条件是：函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右极限存在并且相等.

3. 无穷小与无穷大的定义

(1)无穷小

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$），则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小.

(2)无穷大

如果对于任意给定的正数 M，总存在正数 δ（或正数 X），使得对于适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$（或 $|x|>X$）的一切 x，恒有