

GAODENG SHUXUE XITIKE JIANGYI

高等数学习题课讲义

任传荣 等编



天津大学出版社

高等数学习题课讲义

任传荣 张 青 廖一原
韩 雁 石新华

天津大学出版社

内 容 提 要

本书是为高等数学课程而编写的习题课教材,它有利于学生全面、系统地掌握高等数学的概念、理论和方法.全书共分 12 章,每章有基本概念和主要结论、例题和练习题三部分.所举例题均有较强的综合性,难易搭配适中,并配有一定量的练习题(计算题给出答案).各章自成系统,可单独阅读.

本书既可作为教学参考书,也可作为学习高等数学的大学生以及科技工作者的学习参考书.

图书在版编目 (CIP) 数据

2V75/03

高教数学习题课讲义/任传荣等编. —天津:天津大学出版社, 1999. 5

ISBN 7-5618-1020-2

I. 高… I. 任… III. 高等数学-高等学校-解题 IV. O
13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 22002 号

出 版 天津大学出版社 (电话: 022—27403647)
出版人 杨风和
地 址 天津市卫津路 92 号天津大学内 (邮编: 300072)
印 刷 河北省昌黎县印刷总厂
发 行 新华书店天津发行所
开 本 850mm×1168mm 1/32
印 张 11.25
字 数 293 千
版 次 1998 年 10 月第 1 版
印 次 1999 年 6 月第 2 次
印 数 4 001—9 000
定 价 17.00 元

前 言

高维数据科学导论

限于编者水平，书中不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

编者

1998 年 7 月

目 录

第一章 函数与极限	(1)
函数	(1)
一、基本概念和主要结论	(1)
二、例题	(3)
三、练习题 1-1	(6)
极限与连续函数	(7)
一、基本概念和主要结论	(7)
二、例题	(12)
三、练习题 1-2	(18)
答案	(19)
第二章 导数与微分	(21)
一、基本概念和主要结论	(21)
二、例题	(25)
三、练习题 2-1	(32)
答案	(33)
第三章 中值定理与导数的应用	(34)
中值定理与洛必达法则	(34)
一、基本概念和主要结论	(34)
二、例题	(37)
三、练习题 3-1	(44)
导数的应用	(45)
一、基本概念和主要结论	(45)
二、例题	(48)
三、练习题 3-2	(59)

答案	(59)
第四章 不定积分	(61)
一、基本概念和主要结论	(61)
二、例题	(63)
三、练习题 4-1	(89)
答案	(90)
第五章 定积分	(92)
一、基本概念和主要结论	(92)
二、例题	(99)
三、练习题 5-1	(121)
答案	(123)
第六章 定积分的应用	(124)
一、基本概念和主要结论	(124)
二、例题	(125)
三、练习题 6-1	(142)
答案	(143)
第七章 向量代数与空间解析几何	(145)
向量代数	(145)
一、基本概念和主要结论	(145)
二、例题	(148)
三、练习题 7-1	(153)
空间解析几何	(153)
一、基本概念和主要结论	(153)
二、例题	(157)
三、练习题 7-2	(166)
答案	(167)
第八章 多元函数的微分法及其应用	(168)
多元函数微分法	(168)

一、基本概念和主要结论	(168)
二、例题	(173)
三、练习题 8-1	(185)
多元函数微分法的应用	(186)
一、基本概念和主要结论	(186)
二、例题	(190)
三、练习题 8-2	(197)
答案	(197)
第九章 重积分	(199)
一、基本概念和主要结论	(199)
二、例题	(205)
三、练习题 9-1	(221)
答案	(222)
第十章 曲线积分和曲面积分	(223)
曲线积分	(223)
一、基本概念和主要结论	(223)
二、例题	(227)
三、练习题 10-1	(246)
曲面积分	(247)
一、基本概念和主要结论	(247)
二、例题	(253)
三、练习题 10-2	(270)
答案	(271)
第十一章 无穷级数	(272)
数项级数	(272)
一、基本概念和主要结论	(272)
二、例题	(276)
三、练习题 11-1	(285)

幂级数·····	(287)
一、基本概念和主要结论·····	(287)
二、例题·····	(291)
三、练习题 11-2·····	(303)
付立叶级数·····	(304)
一、基本概念和主要结论·····	(304)
二、例题·····	(309)
答案·····	(322)
第十二章 微分方程·····	(324)
一阶方程与可降阶的高阶方程·····	(324)
一、基本概念和主要结论·····	(324)
二、例题·····	(328)
三、练习题 12-1·····	(340)
二阶常系数线性方程·····	(343)
一、基本概念和主要结论·····	(343)
二、例题·····	(345)
三、练习题 12-2·····	(350)
答案·····	(350)

第一章 函数与极限

学习目的与要求 理解函数、极限和连续这三个高等数学中的基本概念,其中极限的概念及其运算是本章的重点与难点.掌握极限的运算法则和两个极限存在准则,以及基本初等函数的性质及其图形,要了解间断点的概念和闭区间上连续函数的性质.

函 数

一、基本概念和主要结论

1. 函数的定义

设 x 和 y 是两个变量, D 是已知数集, 如果对于每一个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定的对应规律 f , 总有唯一确定的数值与它对应, 则称 y 是 x 的函数. 记作 $y = f(x)$, 数集 D 叫做这个函数的定义域, x 叫做自变量, y 叫做因变量. 数集 $W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

2. 函数的图形

已知函数 $y = f(x)$, 定义域为 D , 称平面点集: $C = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$ 为函数 $y = f(x)$ 的图形.

3. 函数的几种特性

(1) 有界性 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $I \subset D$, 如果存在正数 M , 使得对于一切的 $x \in I$ 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在数集 I 上有界.

(2) 单调性 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$, 如果对于任意的 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或

$f(x_1) > f(x_2)$) 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上是单调增加 (或减少) 的.

(3) 周期性 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个不为零的数 T , 使得对于一切 $x \in D$, 有 $(x + T) \in D$, 且 $f(x + T) = f(x)$ 恒成立, 则称函数 $f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常我们说函数的周期是指最小正周期.

(4) 奇偶性 设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 如果对于任意的 $x \in D$, $f(-x) = f(x)$ 恒成立, 则称函数 $f(x)$ 为偶函数. 如果对于任意的 $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$ 恒成立, 则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

4. 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 W . 如果对应关系是一一对应的, 即若 $x_1 \neq x_2, x_1, x_2 \in D$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 于是对于任意的 $y \in W$, 有唯一确定的 $x \in D$ 与之对应, 使得 $y = f(x)$, 这样在 W 上定义了一个新的函数, 称为函数 $f(x)$ 的反函数. 记作 $x = \varphi(y)$ (或 $x = f^{-1}(y)$).

5. 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1 , 函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 D_2 , 值域为 W_2 , 并且 $W_2 \subset D_1$, 由此对于任意的 $x \in D_2$ 有唯一确定的 $\varphi(x) = u \in W_2 \subset D_1$, 于是对此 $u \in D_1$ 有唯一确定的 $y = f(u)$, 这样确定的新函数 $y = f[\varphi(x)], x \in D_2$, 称为由 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数.

6. 初等函数

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数, 统称为基本初等函数. 凡是由基本初等函数, 经过有限次的四则运算或有限次的复合所构成, 并可用一个式子表示的函数, 称为初等函数.

二、例题

判断题

1. 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为周期函数, 则 $f(x) + g(x)$ 必为周期函数. (✓)

事实上, 设 T_1, T_2 分别为函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的周期, T 为 T_1 与 T_2 的最小公倍数, 则 T 必为 $f(x) + g(x)$ 的周期.

2. 周期函数一定有最小正周期. (✗)

例如, 函数 $f(x) = 1, x \in (-\infty, +\infty)$ 为周期函数, 但无最小正周期.

3. 若函数 $f(x) = \frac{1}{x}$, 则 $f[f(x)] = x$. (✗)

事实上, $f[f(x)] = \begin{cases} x, & x \neq 0; \\ \text{无定义}, & x = 0. \end{cases}$

4. 设函数 $f(u) = \arcsin u, u = \varphi(x) = 2 + x^2$, 则 $f[\varphi(x)]$ 一定为 x 的复合函数. (✗)

事实上, 两个函数不能复合.

5. 若函数 $f(u)$ 为偶函数, $u = \varphi(x)$ 为奇函数, 则 $f[\varphi(x)] \cdot \varphi(x)$ 一定为奇函数. (✓)

事实上, $f[\varphi(-x)] \cdot \varphi(-x) = -f[\varphi(x)] \cdot \varphi(x)$.

6. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为 (a, b) 上的无界函数, 则 $f(x) \cdot g(x)$ 一定为 (a, b) 上的无界函数. (✗)

例如, 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上为无界函数, $g(x) = x$ 在 $(0, +\infty)$ 上也为无界函数, 但 $f(x) \cdot g(x) = 1$ 为 $(0, +\infty)$ 上的有界函数.

7. 设 $f(x) = 2\ln x, g(x) = \ln x^2$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同. (✗)

事实上, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同.

8. 设 $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$, $g(x) = x \sqrt[3]{x-1}$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同. (✓)

事实上, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域相同, 并且对于任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$ 均有 $\sqrt[3]{x^4 - x^3} = x \sqrt[3]{x-1}$.

计算与证明题

例 1. 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ($x > 0$), 求 (1) $f[f(x)]$, (2) $f(x)$ 的反函数.

$$\text{解: (1) } f[f(x)] = \frac{f(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}} = \frac{x/\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+(x^2/1+x^2)}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} \quad (x > 0).$$

(2) 令 $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 两边平方有

$$y^2 = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

从而有 $x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ 或 $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, ($0 < x < 1$).

例 2. 设 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$, 求 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$.

解: $f[g(x)] = \frac{1-g(x)}{1+g(x)} = \frac{x-1}{x+1}$, ($x \neq 0, x \neq -1$).

$$g[f(x)] = \frac{1}{f(x)} = \frac{1+x}{1-x}, \quad (x \neq 1, x \neq -1).$$

例 3. 设函数 $f(x)$ 在 $(-l, +l)$ 内有定义, 试证

$F_1(x) = f(x) + f(-x)$, $F_2(x) = f(x) - f(-x)$ 分别为偶

函数和奇函数.

$$\begin{aligned}\text{证: 因为 } F_1(-x) &= f(-x) + f[-(-x)] \\ &= f(-x) + f(x) = F_1(x), \\ F_2(-x) &= f(-x) - f[-(-x)] = f(-x) - f(x) \\ &= -F_2(x).\end{aligned}$$

所以它们分别为偶函数和奇函数.

例 4. 证明函数 $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界.

证: 对于任意给定的正数 M , 取 $n = [M] + 1$, 此时 $\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$

$\in (0, 1)$, 则有

$$f\left(\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right) = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2n\pi + \frac{\pi}{2} > M.$$

所以, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内无界.

例 5. 证明任意有理数均为 Dirichlet 函数的周期.

证: 根据 Dirichlet 函数的定义,

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数;} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

设 r 为任意给定的有理数, 于是当 x 为有理数时, $r+x$ 也为有理数, 当 x 为无理数时, $r+x$ 也为无理数, 于是

$$D(x+r) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数;} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

从而, $D(x+r) = D(x)$.

$$\text{例 6. 设函数 } f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1; \\ 0, & |x| = 1; \\ -1, & |x| > 1. \end{cases} \quad g(x) = e^x.$$

求 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$.

解:

$$f[g(x)] = f(e^x) = \begin{cases} 1, & |e^x| < 1 \\ 0, & |e^x| = 1 \\ -1, & |e^x| > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & e^x < 1 \\ 0, & e^x = 1 \\ -1, & e^x > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x > 0. \end{cases}$$

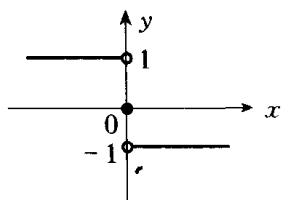


图 1-1

$$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e^1, & |x| < 1 \\ e^0, & |x| = 1 \\ e^{-1}, & |x| > 1 \end{cases} = \begin{cases} e, & |x| < 1; \\ 1, & |x| = 1; \\ \frac{1}{e}, & |x| > 1. \end{cases}$$

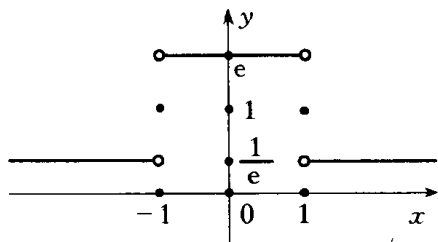


图 1-2

三、练习题 1-1

1. 设 $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$, $g(x) = \frac{1}{1+x}$, 求 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$

的定义域.

2. 如果 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f_n(x) = \underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{n \text{ 重}}.$

3. 求函数 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的反函数.

4. 下列各对函数是否是同一个函数.

(1) $y = \sqrt{x}, x \geq 0; S = \sqrt{t}, t \geq 0.$

(2) $y = \arcsin x, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; y = \arcsin x, 0 \leq x \leq 1.$

(3) $y = |x|, -\infty \leq x \leq +\infty; y = x \cdot \operatorname{sgn} x, -\infty < x < +\infty.$

5. 设 $f(x), g(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的周期函数, 周期分别为 T_1, T_2 . 证明 $f(x) \cdot g(x)$ 也是周期函数.

6. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \leq 1; \\ x^2 + 2, & x > 1. \end{cases}$ 求 $f(x-a).$

极限与连续函数

一、基本概念和主要结论

1. 数列极限的定义

已知数列 $\{x_n\}$, 如果对于任意给定的正数 ϵ , 总存在正整数 N , 使得对于适合 $n > N$ 的一切 x_n , 不等式 $|x_n - a| < \epsilon$ 恒成立, 则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限, 或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a . 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 如果数列的极限不存在, 则称数列是发散的.

2. 函数极限的定义

(1) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 以 A 为极限的定义

如果对于任意给定的正数 ϵ , 总存在正数 X , 使得对于适合不等式 $|x| > X$ 的一切 x , 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)$

$-A| < \epsilon$, 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$. 类似地, 当 $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) 时, 只须将上述定义中的 $|x| > X$, 改为 $x > X$ ($x < -X$) 便得

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$) 的定义.

(2) 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 以 A 为极限的定义

如果对于任意给定的正数 ϵ , 总存在正数 δ , 使得对于适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的一切 x , 对应的函数值 $f(x)$, 都满足不等式 $|f(x) - A| < \epsilon$ 恒成立, 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

(3) 单侧极限

左极限 记号 $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$ (或 $f(x_0 - 0) = A$) 表示 $x < x_0$ 且 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 以 A 为极限. 此时称 A 为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限.

右极限 记号 $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$ (或 $f(x_0 + 0) = A$) 表示 $x > x_0$ 且 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 以 A 为极限, 此时称 A 为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的右极限.

显然, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处极限存在的充分必要条件是: 函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右极限存在并且相等.

3. 无穷小与无穷大的定义

(1) 无穷小

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$), 则称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小.

(2) 无穷大

如果对于任意给定的正数 M , 总存在正数 δ (或正数 X), 使得对于适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ (或 $|x| > X$) 的一切 x , 恒有