

1.21
0.41
0.02

岩波講座 基礎工学 7

線形分布定数系論

II

高橋 秀 俊

3k6.65



目 次

第3章 3次元のポテンシャル

3.1 3次元ラプラス方程式	97
3.2 3次元ラプラス演算子の各種座標による形	101
3.3 鏡像の原理の応用	109
3.4 変数分離による解	119
3.5 多項式解と多極子解	124
3.6 ルジャンドル多項式とその性質	128
3.7 球関数による展開	140

第4章 2次元, 3次元の波動(前半)

4.1 2次元極座標による波動方程式	149
4.2 ベッセル関数	153
4.3 平面波と円筒波の関係	160
4.4 2次元の振動の問題	165
4.5 円筒関数による展開	174
4.6 輻射される波	185
4.7 散乱の問題	195
4.8 鏡像の原理と回折問題☆	199

線形分布定数系論 I 目次

第1章 1次元分布定数系

第2章 2次元分布定数系

線形分布定数系論 III 目次

第4章 2次元, 3次元の波動(後半)

第5章 3次元のベクトル場

線形分布定数系論 IV 目次

第6章 4階微分方程式であらわされる場

第7章 波動の一般的性質

第8章 過渡現象

表紙カット製作: 渡辺茂・榎屋治紀・藤野孝爾・幸村真佐男
(IBM データセンター設置 IBM 7090・プロッター使用)

第3章

3次元のポテンシャル

3次元のラプラス方程式を解くには2次元の場合の等角写像のような系統的方法がない。本章の目的は、極座標であらわされたラプラス方程式の解を通して球関数の性質に関するバースベクティブを与えることにする。球関数の諸公式をできるだけ物理的な考察から導き出すように努力した。

3.1 3次元ラプラス方程式

3次元空間での2階偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (3.1)$$

は(2.49)と同じくラプラス方程式と呼ばれて、電磁気学、流体力学等その他重力の問題にひろくあらわれる。たとえば u が静電ポテンシャルをあらわすなら(3.1)は電荷のない一様な空間、つまり一様な誘電体でみたされた(または真空の)空間において u がみたすべき方程式である。また空間は一様な導体でみたされていてもよい。また真空中で重力のポテンシャルがみたす方程式も(3.1)である。流体力学では、渦のない定常的な流れがあるとき、その流れの速さ v を

$$v = -\text{grad } u$$

と置いて定義される速度ポテンシャルが(3.1)をみたす。

さて、(3.1)の意味は2次元のラプラス方程式(2.49)から類推されよう。2次元の場合に行なったように集中定数的な場合を考えるならば、たとえば3次元の格子状に(建築物の鉄骨のように)一定の抵抗 r をもつ導体棒が組み立てられていて、その外側から適当に電流を流し込んだとき、その各格子点(棒をつぎ合わせている結節点)の電位がみたす差分方程式がそれに相当する(図3.1)。

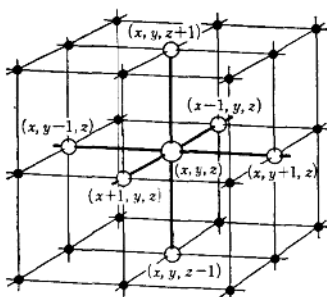


図 3.1 3次元の格子

その場合、格子点の座標を x, y, z とし、これらは整数値をとるとすると

$$u(x-1, y, z) + u(x+1, y, z) + u(x, y-1, z) + u(x, y+1, z) \\ + u(x, y, z-1) + u(x, y, z+1) - 6u(x, y, z) = 0 \quad (3.2)$$

が電位 u のみたす方程式となり、また、たとえば格子点 $(x+1, y, z)$ と (x, y, z) とを結ぶ棒を流れる電流は

$$\frac{1}{r} [u(x+1, y, z) - u(x, y, z)] \quad (3.3)$$

である。他も同様で、そこで、(3.2)は格子点 (x, y, z) における電流の連続の方程式(キルヒホッフの第1法則)をあらわすわけである。そうして(3.2)の棒が短くなった極限として(3.1)が得られるわけである。

そのことから直ちにわかることは、2次元の場合と同様に

“ u の極大値、極小値は、決して(3.1)の成り立つ領域の内部には存在しない”

ことである。なぜなら(3.2)で $u(x, y, z)$ は、その前後左右上下の6個の点の u の平均値に等しいので、平均値は最大または最小にはなり得ないからである。

u によって空間の各点で

$$-\text{grad } u = \left(-\frac{\partial u}{\partial x}, -\frac{\partial u}{\partial y}, -\frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

できまるベクトルを定義できる。これはベクトルの場をつくるが、この u は流体の流れの場では流れの速度であり、導体の中のポテンシャルの場では電流密度ベクトルをあらわす。また、誘電体中の静電場なら電場のベクトルである。

1点から出発して、常にその場所のベクトル u の方向に進むことにより、一つの空間曲線がつくられる。すなわち

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.4)$$

によってきまる $(x(t), y(t), z(t))$ のたどる軌跡である。そのような軌跡は出発点の選び方によって ∞^2 個のものができて、それで空間がおおわれる。このような軌跡を流体や電流の場合は**流線**、静電場のような場合は**力線**と呼ぶ。流線の上を t の増す方向に進めば u は常に減少する。そうして流線は領域の内部で終りになることはなく、領域の境界にぶつからない限りどこまでも続く。しかも、 u の単調減少の性質から (u が 1 価関数である限り) 流線は環状に閉じることはあり得ない。

流線は途中で終わることはないが、折れ曲がることはある。それは $\text{grad } u = 0$ となるような点においてである。これについては後に 3.5 節でのべる。

$u = \text{const}$ の軌跡は一つの曲面で**等ポテンシャル面**と呼ばれる。(3.4) からわかることは、等ポテンシャル面と流線とは直角に交わることである。

ポアソンの方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\rho(x, y, z) \quad (3.5)$$

は(2.106)に相当する 3 次元のポアソンの方程式である。これを、無限に広い空間で、無限遠で $u \rightarrow 0$ という境界条件のもとに解くのが最も基本的な問題である。ここで $\rho(x, y, z)$ は静電気の問題なら**電荷密度**、重力場なら**質量密度**、をあらわす。電流の場のときは ρ は電流の湧き口が空間に分布していることに相当するが、これはあまり現実的でない。しかし、空間的に集中した湧き口も ρ の分布の特別な場合と考えることができる。

u と ρ との間には**ガウスの定理**

$$\iiint \rho dV = - \iint \frac{\partial u}{\partial n} dS \quad (3.6)$$

が成り立つ。ここに左辺の 3 重積分は 3 次元空間のある領域の内部にわたる積分であり、右辺の 2 重積分はその領域の表面全体にわたる積分、 $\partial u / \partial n$ はその領域表面の外向き法線方向への $\text{grad } u$ の成分である。このことはポアソン

方程式の物理的意味から明らかである。

さて、重ね合せの原理から (3.5) の解はグリーン関数 $G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ を使って

$$u(x, y, z) = \iiint G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \rho(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (3.7)$$

と書かれるであろうと思われる。ここで一様な無限に広い空間の問題であるということからグリーン関数は (x, y, z) と (ξ, η, ζ) の絶対的な値よりはむしろ相対的な値、つまり $(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)$ だけの関数だろうと思われるので

$$u(x, y, z) = \iiint G(x-\xi, y-\eta, z-\zeta) \rho(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta. \quad (3.8)$$

さらにまた、空間は等方性である。平たくいえば、空間のあらゆる方向は同等であって、特別の意味をもった方向というものとは存在しない。このことを考えると、 G は $(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)$ のベクトルの関数であるよりはむしろ、その大きさ $\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ の関数であると考えてよからう。すなわち

$$u(x, y, z) = \iiint G(\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}) \rho(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta. \quad (3.9)$$

問題はこの G という関数がどんなものであるが、実は簡単に

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta \quad (3.10)$$

であることがわかる。無限に広い空間のグリーン関数は

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \quad (3.11)$$

与えられる。なぜなら、原点だけで特異点を持ち、球対称性をもつ (3.1) の解は後に 3.5 節で示すように

$$u = \frac{c}{r} \quad (3.12)$$

であるからである。ただし $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。ここで原点にある源の総量 q は、ガウスの定理により

$$q = \iiint \rho dx dy dz = - \iint \frac{\partial u}{\partial r} dS = -4\pi r^2 \frac{\partial u}{\partial r} = 4\pi c. \quad (3.13)$$

したがって

$$u = \frac{q}{4\pi r}. \quad (3.14)$$

3.2 3次元ラプラス演算子の各種座標による形

2次元または3次元の空間の点をあらわすのに直角座標以外の座標を使うと便利なが多い。たとえば円筒座標 (ρ, ϕ, z) で

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \phi, \\ y &= \rho \sin \phi, \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

としたり、極座標(球座標) (r, θ, ϕ) で

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

のようにあらわす類である。その場合 ∇^2 という演算子をそのような座標による微分であらわす必要がある。

まず、簡単な場合として、2次元空間(平面)を極座標 r, ϕ であらわす場合を考えてみよう。

まず正攻法で行くと、この場合

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi \quad (3.17)$$

であるから、 (x, y) から (r, ϕ) への変換行列は

$$T = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

またこれの逆行列をつくると

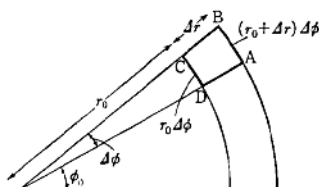


図 3.2 扇紙形の領域

と書く。ここで $\nabla^2 u$ は u の勾配 $\text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ のベクトルに比例する流れに、場所場所で湧き出している量の分布密度をあらわしている。そこでいま $r=r_0$, $r=r_0+\Delta r$ の二つの同心円と、 $\phi=\phi_0$, $\phi=\phi_0+\Delta\phi$ の二つの直線とにかこまれた扇の紙の形の領域を考える(図 3.2)と、この領域の中で湧き出た量はこの領域の周囲を横ぎって流れ出なければならない(ガウスの定理)。その流れ出る量は

$$\left. \begin{aligned} \text{辺 AB (円弧) について} & \quad (r_0 + \Delta r) \Delta\phi \left[\frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=r_0+\Delta r}, \\ \text{辺 CD (円弧) について} & \quad -r_0 \Delta\phi \left[\frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=r_0}, \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{辺 BC について} & \quad \Delta r \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right]_{\phi=\phi_0+\Delta\phi}, \\ \text{辺 AD について} & \quad -\Delta r \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right]_{\phi=\phi_0}. \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

そこで、(3.25)の2項を加えると

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Delta r \Delta\phi. \quad (3.27)$$

また(3.26)の2項を加えると

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \Delta\phi \Delta r. \quad (3.28)$$

したがって、両方加えると

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right\} \Delta\phi \Delta r \quad (3.29)$$

がこの扇紙形からの流れの発生である。これだけが面積

$$r \Delta\phi \Delta r$$

の部分から発生しているのであるから、これをこの扇紙形領域に割り振ると

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \quad (3.30)$$

が単位面積当りの発生率であることがわかる。こうして(3.23)は簡単に証明された。

ここで(3.30)の第1項

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

は、流れの強さ $\partial u / \partial r$ に領域の幅 $r d\phi$ を乗じてはじめて流れの量となることを表わしている。この考えを一般の3次元の座標に推し進めると次のようになる。

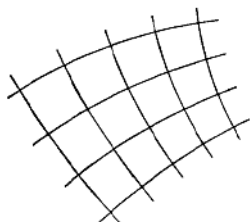


図 3.3

一般といっても、実際に多く使われるのは直交座標系と呼ばれる種類のものである。その特徴は、座標を (u, v, w) とすると $u = \text{const}$ の軌跡の曲面と $v = \text{const}$ の軌跡の曲面とが直角に交わり、同様にこの二つの曲面と $w = \text{const}$ の面ともそれぞれ直角に交わることである。たとえば球座標では $r = \text{const}$ は同心球で、 $\theta = \text{const}$ は z 軸のまわりの円錐であり、これらは直交するし、また $\phi = \text{const}$ は z 軸を含む平面であって、これも前二者のいずれとも直交するので直交座標である。直交座標では座標変換式の微係数でつくった行列

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

の三つの列ベクトルが互いに直交する。すなわち

$$\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = 0. \quad (3.32)$$

および上式で (u, v) のかわりに (v, w) , (u, w) を入れたものが成り立つ。

直交座標 (u, v, w) において

$$(u=u_0, u=u_0+\Delta u), (v=v_0, v=v_0+\Delta v), (w=w_0, w=w_0+\Delta w)$$

の3対の面でかこまれた六面体を考え

る(図3.4)。 $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ が小さければ

これは平面でかこまれた平行六面体に

近いが、特に直交座標であるときはこ

れは直方体となる。しかし正確な直方

体からは少しはずんで、相対する面が

平行でないような六面体を思い浮かべよう。これが前述の扇紙形に相当する。

そのとき、図の u 辺の長さは $u=u_0$, $u=u_0+\Delta u$ の間の間隔で、これは

$$h_1 \Delta u = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2} \Delta u \quad (3.33)$$

であるが、それは(ほぼ平行な)4本の辺でみな少しずつ違う。それは h_1 が $(u,$

$v, w)$ の関数だということである。同様にして

$$\left. \begin{aligned} h_2 \Delta v &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2} \Delta v, \\ h_3 \Delta w &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2} \Delta w \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

で $h_2(u, v, w)$, $h_3(u, v, w)$ が定義される。そのとき f であらわされるポテンシャルの勾配ベクトルの u 方向の成分は

$$(\text{grad } f)_u = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u} \quad (3.35)$$

である。そこで、 $\frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u}$ に比例する流れが $u=\text{const}$ の面を通して流れるが、この擬直方体の $u=u_0$ の面を通して流れ出る量は、その面の面積 $h_2 \Delta v \cdot h_3 \Delta w$ を乗じて

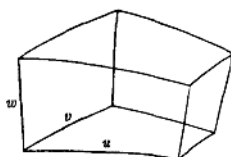


図3.4

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \sin \theta, \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

軸対称の場合

u が z と $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ だけの関数であるような場合，すなわち，すべてが z 軸を軸として回転対称である場合は問題は簡単になる．即ち u は 2 変数の関数 $u(z, \rho)$ と考えられ，それに対する方程式は (3.43) によると

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (3.47)$$

となる．これは 2 次元のラプラス方程式 (2.49) にわずかな変更が加わったものであり，ある程度 (2.49) と似た扱いができる．

まず

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = \phi, \quad -\frac{\partial u}{\partial \rho} = \psi \quad (3.48)$$

と置く． (ϕ, ψ) は流線の方向のベクトルである．これを (3.47) に入れると

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \psi) + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0,$$

あるいは

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho \phi) + \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \psi) = 0. \quad (3.49)$$

これから

$$\frac{\partial v}{\partial \rho} = 2\pi \rho \phi, \quad -\frac{\partial v}{\partial z} = 2\pi \rho \psi \quad (3.50)$$

によって v を定義できることがわかる．即ち v は

件は(3.58)に矛盾しないようにきめた問題を解くのとと同じ結果を与える。すなわちはじめの問題が $x > 0$ で $u(x, y, z)$ という解をもつなら、後の問題の解は $x > 0$ ではこれと一致し、 $x < 0$ では $u(x, y, z) = -u(-x, y, z)$ となる。しかして、 $x = 0$ では解は自然に $u(0, y, z) = 0$ となって境界条件はみたされる。”

平面上の境界条件は(3.56)のかわりに

$$x = 0 \text{ で } \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.62)$$

であってもよい。その場合には(3.58)のかわりに

$$u(x, y, z) = u(-x, y, z), \quad (3.63)$$

つまり x に対して偶関数になるように拡張すればよい。そのとき、 u が連続であることは(3.63)から明らかであり、また $\partial u / \partial x$ はどちら側でも0だからたしかに連続である。

鏡像を使って領域を拡張するのは、境界が全平面でなくて平面の一部であってもよい。その場合にも同じようにして鏡像をつくれば、その平面の部分の上で全く連続につながった解が得られる。

以上のことにより、完全平面を境界の一つにもつような問題は、上のように平面に対する鏡像を導入することにより、この境界を取り除いた問題に帰着させられる。ただし、この操作(鏡像操作)により、最初にあった他の境界の鏡像が問題の中に追加されるから、問題がこれにより簡単になるとは限らないが、とにかく、用いようによっては役に立つ原理である。

例 $x = 0$ が境界で、そこで $u = 0$ 、また点 $(a, 0, 0)$ に強さ1の点源があり他に源がない場合の $x > 0$ での u を求め。

〔解〕 鏡像の原理により $x < 0$ に拡張すると、点 $(-a, 0, 0)$ に強さ-1の点源があることになる。そこで、この二つの源によるポテンシャル

$$u = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} \right\} \quad (3.64)$$

が解である。 $u(0, y, z) = 0$ であることは明らかである(解終り)。

たとえば片側に底のある円筒の内部

$$z \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq a^2$$

で(3.57)をみたし、円筒上および底の平面 $z=0$ の上で $u=0$ という境界条件を与えられた問題を解くかわりに底のない円筒 $x^2+y^2 \leq a^2$ の中で(3.57)をみたし、円筒の上で $u=0$ 、かつ $u(-x, y, z)=u(x, y, z)$ となるような解を求めればよい。

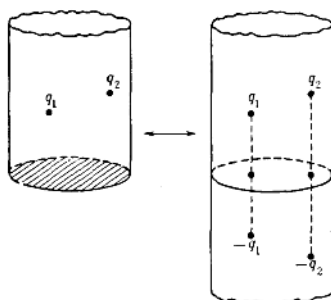


図 3.7

二つ以上の平面が存在するときには、それぞれに対して鏡像をつくって領域を拡張することができる。たとえば、ある角 α をなす二つの半平面で境された空間の問題を解く場合である。もとの領域を D_0 としよう。そこでまず平面 A について鏡像をつくると領域 D_1 がつけ加わる。また面 B について鏡像をつくると領域 D_{-1} が反対の側につけ加わる。次に D_{-1} の A に対する鏡像をつくると領域 D_2 が加わる。 D_1 の B に対する鏡像として領域 D_{-2} がつけ加わる。同様にして無限に多くの鏡像ができるが、もし、 α が π の整数分の 1

$$\alpha = \frac{\pi}{n} \quad (3.65)$$

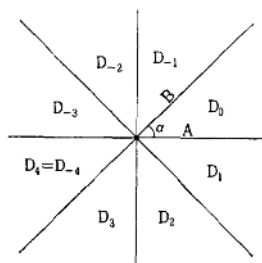


図 3.8

であるとする。そのとき、球の内部の点($r < a$ の点)での u を

$$u(r, \theta, \phi) = -\frac{a}{r} u\left(\frac{a^2}{r}, \theta, \phi\right), \quad 0 < r < a \quad (3.70)$$

によってきめる。点 $(a^2/r, \theta, \phi)$ は点 (r, θ, ϕ) をこの球に対して反転(invert)した点である。

まず(3.70)で与えられる u が球の内部でやはり(3.68)をみたすことを証明する必要がある。

$$\nabla^2 u \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right\} \quad (3.71)$$

であるが、ここで $r > a$ での u つまり $u(a^2/r)$ のことを、混同を避けるために $u'(r')$ と書き $r' = a^2/r$ と書くことにすると

$$r = \frac{a^2}{r'}, \quad \frac{\partial}{\partial r} = -\frac{r'^2}{a^2} \frac{\partial}{\partial r'}, \quad u = -\frac{r'}{a} u'. \quad (3.72)$$

そこでこれらを(3.71)に入れると、右边第1項は

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (ru) = \frac{r'}{a^2} \cdot \frac{r'^2}{a^2} \frac{\partial}{\partial r'} \left\{ \frac{r'^2}{a^2} \frac{\partial}{\partial r'} (-au') \right\} \\ &= -\frac{r'^5}{a^5} \cdot \frac{1}{r'^2} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r'^2 \frac{\partial u'}{\partial r'} \right). \end{aligned}$$

そこで

$$\nabla^2 u \equiv -\frac{r'^5}{a^5} \left[\frac{1}{r'^2} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r'^2 \frac{\partial u'}{\partial r'} \right) + \frac{1}{r'^2} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u'}{\partial \phi^2} \right\} \right] \quad (3.73)$$

で、 $\nabla^2 u$ は対応する球外の場の $\nabla^2 u$ に $-(r'/a)^5$ を掛けたものになる。したがって球外で $\nabla^2 u = 0$ なら球外でも $\nabla^2 u = 0$ であることがわかる。

球外に源がある場合

$$\nabla^2 u = -\rho(r, \theta, \phi), \quad r > a \quad (3.74)$$

とすると、(3.73)により球内では

$$\nabla^2 u = \left(\frac{a}{r} \right)^5 \rho\left(\frac{a^2}{r}, \theta, \phi\right), \quad r < a \quad (3.75)$$

とすればよい。一方、点源については“球外の点 $(a^2/r_0, \theta_0, \phi_0)$ に q なる点源が

面電荷は、導体表面の電位がちょうど0になるように分布がきまるわけであり、その電荷面密度は球面上での $\partial u / \partial r$ を求めればわかる。それからグリーン関数表示(3.11)を使って力を計算することができるのであるが、そのように面倒なことをするかわりに、鏡像点Pの1点に集中された q' の点電荷によって生ずる力を計算すれば同じ結果になるというのが、鏡像の原理である。

例 前例で、球が接地でなく絶縁され、したがって球上の電荷の総量が0であるときはどうか。

[解] 球が接地されているときは接地線から電荷が移動してきて、全体で $q' = -\frac{a}{r}q$ だけの電気を帯びている。それは実際は球の表面に分布しているのであるが、面電荷を総計すると q' にちょうど等しいのである。そこで、もし球が絶縁されていて、電荷が0であるならば、球の表面の電位は0より高い電位をとることになる。しかも球の表面の電位は一定でなければならないが、そのような電位分布は接地の場合の場合に更に球の中心Oに電荷 $-q'$ を置くことによって得られる(図3.13)。この電荷は球の表面の電位を $-q'/(4\pi\epsilon a)$ だけ高めるが、電位一定の条件をこわさないからである。

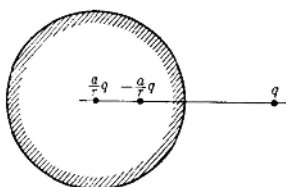


図3.13

そこで

$$u = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{q}{R} + \frac{q'}{R'} - \frac{q'}{r} \right). \quad (3.81)$$

また q にはたらく力は

$$F = -\frac{q}{4\pi\epsilon} \left\{ \frac{q'}{(r-a^2/r)^2} - \frac{q'}{r^2} \right\} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon} \frac{a^2(2r^2-a^2)}{r^3(r^2-a^2)^{3/2}}. \quad (3.82)$$

この場合は r の大きいとき、力は r^{-3} に比例することがわかる。

例 平面上の半球: 図3.14のように平面の導体の上に半球状の突起があるとき、点Pにある電荷 q が生ずるポテンシャル u を求む。

[解] 平面に対する P の鏡像を P_1 ,
半球に対する P の鏡像を P_3 とする,
また P_1 の球(半球の鏡像として得られ
る)に対する鏡像を P_2 とする. P_2 は
また P_3 の平面に対する鏡像にもなっ
ている. そこで鏡像系は完結し, 結局
 P に q , P_1 に $-q$, P_3 に $-q' = -\frac{a}{r}q$,
 P_2 に $q' = \frac{a}{r}q$ の源を置いたとき
の場が求めるものである.

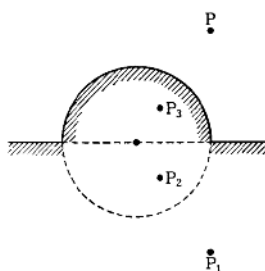


図 3.14

問題 図 3.15 のように直角に交わる半径 a の二つの導体球があるとき, 半径を結ぶ軸上の 1 点 P にある q なる点電荷が生ずるポテンシャル u を求む.

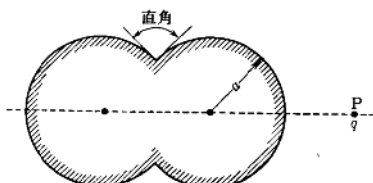


図 3.15

3.4 変数分離による解

直角座標

3次元ラプラス方程式 $\nabla^2 u = 0$ の解はいろいろな境界条件によって変わるわけであるが, とにかく解を得る目的には, その条件に応じて適当な座標による変数分離を行なって解ける場合が多い. たとえば座標として直角座標 x, y, z を用いるならば, u として

$$u = X(x)Y(y)Z(z) \quad (3.83)$$

のような形を仮定して X, Y, Z を別々に求めることである.

直角座標の場合

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (3.84)$$

であるから, これに (3.83) を代入すると