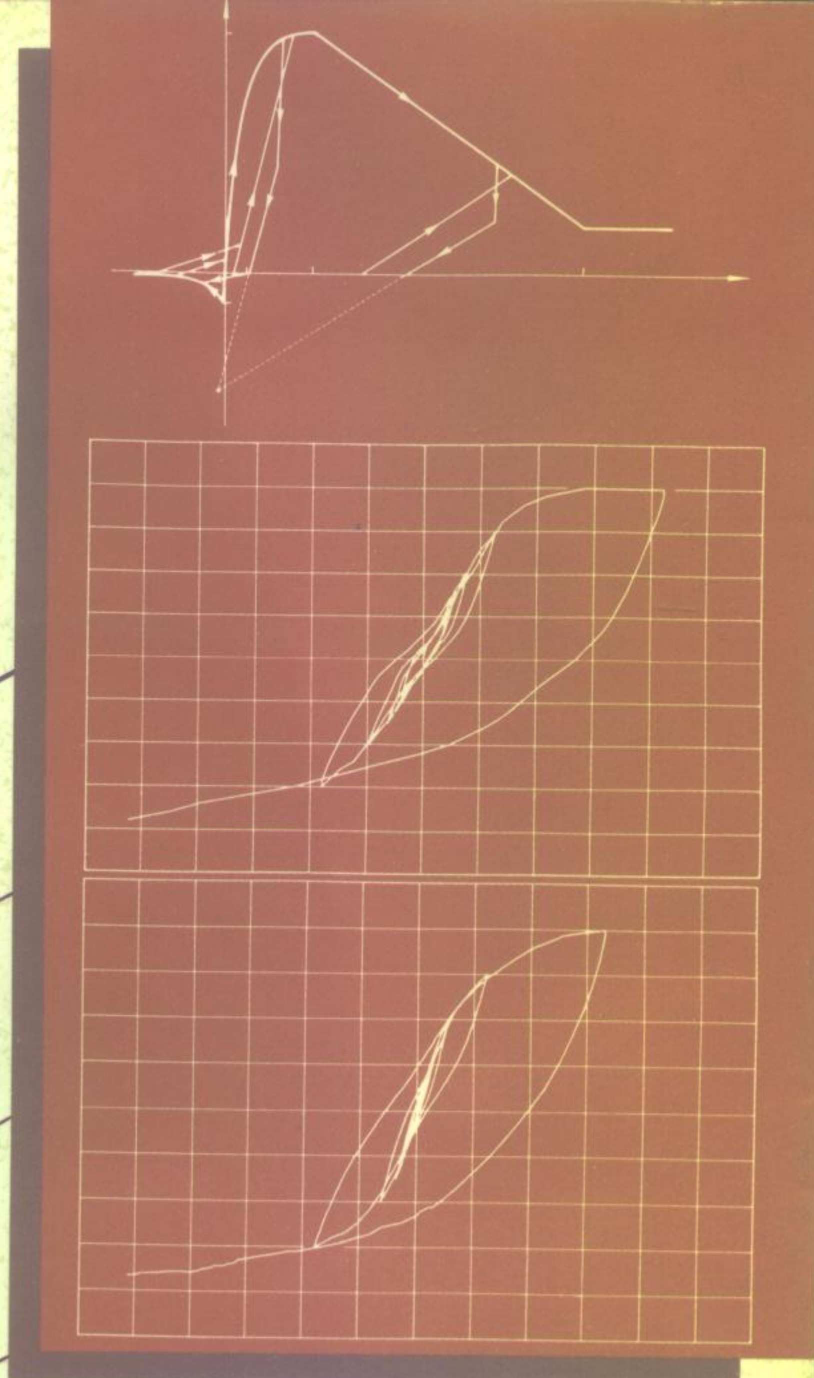
吕西林
金国芳 编著
吴晓涵



钢筋
混凝土结构
非线性有限元理论与应用

同济大学出版社

钢筋混凝土结构非线性有限元理论与应用

吕西林　金国芳　吴晓涵　编著

同济大学出版社

责任编辑 解明芳
封面设计 李志云

钢筋混凝土结构非线性有限元理论与应用
吕西林 金国芳 吴晓涵 编著
同济大学出版社出版
（上海四平路1239号）
新华书店上海发行所发行
同济大学印刷厂印刷
开本：787×1092 1/16 印张16 字数：400千字
1997第5月第1版 1997年5月第1次印刷
印数：1—1000 定价：30.00元
ISBN7-5608-1788-2/TU·237

内 容 提 要

本书对钢筋混凝土非线性有限元分析的理论和应用作了系统、深入的论述。非线性分析范围涉及结构的静力和动力问题。书中除了介绍混凝土强度理论及其本构关系、钢筋混凝土构件有限元离散技术、非线性数值解法外，还结合作者及国内外近年来的最新成果，对钢筋混凝土本构关系的建立、有限元程序设计过程、分析结果的后处理方法等作了较详细的说明。书中所附的有限元程序可用于结构分析研究及工程实际应用。

本书可作为高等院校土建类专业的本科生和研究生的教材，也可供上述专业的工程技术人员参考。

前　言

本书根据同济大学近年来为结构工程专业研究生开设的钢筋混凝土非线性分析课程的内容编写而成。在强调基本理论的同时，也注意到应用计算机技术，书中所附的部分计算机程序，是作者多年来反复调试和多次使用过的，这些程序不仅可在本书的教学中使用，也可用于科研工作和工程实际问题中。在本书取材上，既收集了国内外典型的试验和理论成果，也尽可能地反映了国内外的最新研究成果及进展情况，以便使读者能对钢筋混凝土结构的非线性有限元分析理论和方法有比较全面和深入的了解。本书在详述各类钢筋混凝土构件有限元分析的同时，也强调了对结构(例如框架、剪力墙等)的分析，并增加了钢筋混凝土结构有限元动力分析的内容。

本书由吕西林主编，并编写第一章和第八章，由金国芳编写第二章、第三章和第四章的前三节，由吴晓涵编写第五章、第六章、第七章和第4.4节。全书由董振祥审稿。

希望本书能为读者的学习和工作提供帮助。由于作者水平有限，书中难免有不妥之处，欢迎读者批评指出。

作者

1996年12月

目　　录

第一章 绪 论

1.1 钢筋混凝土结构非线性分析的意义

钢筋混凝土结构是目前工业与民用建筑中最主要的结构型式。由于钢筋混凝土是由两种性质不同的材料——混凝土和钢筋组合而成的,它的性能明显地依赖于这两种材料的性能,特别是在非线性阶段,混凝土和钢筋本身的各种非线性性能,都不同程度地在这种组合材料中反映出来,关于混凝土材料和钢筋材料的非线性特征,读者可以参考有关钢筋混凝土结构基本理论方面的论著。在这里,我们仅仅讨论与钢筋混凝土结构计算分析有关的一些问题。

(1) 由于钢筋和混凝土的抗拉强度相差很大,钢筋混凝土结构在正常使用状态下,大部分受弯构件都已经开裂而进入非线性状态,但钢筋并未屈服仍在弹性状态下工作,因此,作为一个结构或构件来说,必然是在非线性状态下工作,这时用弹性分析方法求得的结构内力和变形就不能反映结构的实际工作状态。

(2) 混凝土和钢筋在一个结构中共同工作的条件是两者之间的变形协调,没有相对滑移,但实际上,这种条件并不能完全满足,特别是在反复荷载下,光圆钢筋与混凝土之间的粘结往往会破坏,某些情况下,会导致变形过大,而传统的线弹性结构分析不能反映这些现象。

(3) 在钢筋混凝土结构的设计中,在内力分析时,往往按弹性计算,而在构件截面设计时,却按极限状态进行计算,其结果是内力分析和截面设计的结果都不能反映结构的实际受力状态,造成了钢筋混凝土结构内力分析和截面设计的严重脱节。

(4) 与其他任何形式的结构一样,节点和连接是保证钢筋混凝土结构能作为一个复杂体系承受外力的基本条件,而传统的弹性结构分析时将节点理想化为刚接(例如框架)或者铰接(例如桁架)均不能反映节点的复杂受力状态和变形情况,从而难以为设计提供正确的信息。

(5) 在长期荷载作用下,混凝土会产生一定的徐变变形,这时,结构的内力和变形就发生了变化,按弹性分析求得的内力和变形就不能反映实际情况了。

正由于存在着这些问题,钢筋混凝土结构的非线性分析就显得特别重要,并成为结构工程领域研究的一个热点,受到了越来越多研究和设计人员的重视。用传统的解析方法分析钢筋混凝土结构的非线性问题时只能解决一些非常简单的构件或结构的的计算,对于大量的钢筋混凝土结构分析问题,只能用数值分析方法解决。有限元方法作为一个强有力的数值分析工具,在钢筋混凝土结构的非线性分析中起到了越来越大的作用。用有限元方法进行钢筋混凝土结构的非线性分析,至少有以下的优点:

(1) 可以在计算模型中分别反映混凝土和钢筋材料的非线性特性;

(2) 可以考虑或模拟钢筋与混凝土之间的粘结;

(3) 可以在一定程度上模拟节点的构造和边界条件；

(4) 可以提供大量的结构反应信息，例如应力、变形的全过程，结构开裂以后的各种状态。借助于先进的计算机图形显示技术，还可以直观地看到结构受荷载后从弹性变形到开裂、破坏的全过程，为进行合理的设计提供形象的依据；

(5) 可以部分代替试验，进行大量的参数分析，为制定设计规范和标准提供依据。

正由于有上述这些优点，有限元非线性分析方法在钢筋混凝土结构的研究和设计中有着广泛的应用前景。首先是作为一种强有力的研究工具，可以用于计算分析在试验中难以搞清楚的各种问题，例如不同材料界面的特性、不同结构与介质之间的耦合特性、结构中的局部应力问题以及复杂体型结构的内力与变形性能等问题。其次是作为一种非线性设计方法的工具，可以应用于重要结构的设计工作，例如核反应堆的安全壳、海洋平台结构、大型隧洞结构以及复杂体型高层建筑结构等。还可以应用于模拟施工过程的计算分析，例如混凝土坝体，由于施工工序多，工期长，混凝土的徐变在施工过程中和交付使用后一直存在，因此用有限元分析方法就可以模拟全过程的受力性能、应力及变形分布以及徐变后的应力重分布，为设计和施工提供参考信息。又例如对于地下结构的开挖和支护过程，也需要用有限元非线性分析方法进行计算分析，等等。

1.2 钢筋混凝土结构有限元分析的特点与现状

钢筋混凝土土结构的有限元分析有与其他固体力学有限元分析所不同的特点，主要表现在以下几个方面：

(1) 需要模拟混凝土的开裂和裂缝发展过程，特别是在反复荷载作用下裂缝的开裂和闭合过程。

(2) 需要在模型中适当地反映钢筋与混凝土之间的粘结和滑移机理。

(3) 需要模拟混凝土材料在达到峰值应力以后的性能，因为一个部位的混凝土达到峰值应力并不能说明整个结构达到极限状态。同理，也应模拟钢筋屈服以后的性能。

(4) 对于复杂的钢筋混凝土结构，材料非线性问题与几何非线性问题同时存在，使得计算分析的难度大大增加。

(5) 分析结果强烈地依赖于混凝土材料和钢筋材料的本构关系以及钢筋与混凝土之间粘结滑移的本构关系。因此对上述本构关系的深入研究和全面正确的描述是保证钢筋混凝土有限元分析结果正确可靠和能应用于工程实际的基本条件。

正由于有以上特点，钢筋混凝土结构有限元分析作为一个相对独立的研究领域，受到了土木工程界越来越广泛的重视。美国学者 D.Ngo 和 A.C.Scordelis 最早把有限元分析方法应用于钢筋混凝土简支梁的抗剪分析(1967 年)。在他们的研究工作中，将钢筋和混凝土均划分为三角形单元，按平面应力问题和线弹性理论分析混凝土和钢筋的应力；针对钢筋混凝土结构的特点，在钢筋和混凝土之间附加了一种沿钢筋径向和切向都有一定刚度的粘结弹簧，从而可以分析粘结应力的变化情况；为了反映混凝土开裂的特性，提出了离散裂缝(Discrete Cracks)的模式，即在梁中预先设置裂缝，裂缝两边用不同的节点，裂缝间也附加了特殊的联结弹簧，以模拟混凝土裂缝间的骨料咬合力和钢筋的销栓作用。在以

后的近 30 年中，钢筋混凝土结构有限元分析大体上经历了三个发展阶段[1]。

第一个阶段是 1967～1977 年这一时期，在这个阶段中，在 Ngo 和 Scordelis 的工作基础上，还提出了分布裂缝（Smeared Crack）模式，将钢筋分布在混凝土单元中，假定钢筋和混凝土之间有效粘结；有些研究中还用“拉伸强化（Tension Stiffening）”的概念以考虑裂缝之间混凝土对受拉的贡献。由于分布裂缝模式计算相对简单并具有较好的精度，这一模式已被应用于平面应力、平面应变、板弯曲、壳体、轴对称和三维实体问题。对于板弯曲和壳体问题，使用了分层单元，并假定每一个混凝土单元处于双向受力状态，裂缝沿板厚逐层地发展。这些单元已经被应用于核反应完全壳、存储容器和海洋石油平台等大型混凝土结构的非线性分析中。这一阶段的研究和应用都取得了很大的进展，但总的来说，不管是理论研究还是工程应用，都比较粗糙，处于探索阶段。

第二个阶段是 1977—1985 年这段时期，这个时期的研究工作主要可分为两个方面。一方面是继续在单元模式的选取、混凝土的本构关系和破坏理论，裂缝的模拟和拉伸强化，骨料咬合和销栓作用以及粘结方面进行深入的研究。另一方面是系统性的总结和交流工作，美国土木工程师协会组织了一个 20 人的委员会，花了 5 年的时间，总结和分析了钢筋混凝土结构有限元分析领域的大量研究资料和信息，在 1982 年 5 月发表了长达 545 页的综述报告，内容涉及本构关系与破坏理论；钢筋模拟及粘结的表示；混凝土开裂；剪力传递；时间效应；动力分析；数值算例和应用；还在附录中发表了钢筋混凝土结构非线性分析的有限元源程序。在这一时期，欧洲和亚洲一些学者也在钢筋混凝土结构的有限元分析方面进行了大量的研究工作，1987 年 7 月在联邦德国召开了“钢筋混凝土空间结构非线性性能”的国际会议；1981 年，国际桥梁与结构工程协会在荷兰召开了“高等混凝土力学”的国际会议；1984 年，在前南斯拉夫召开了“混凝土结构的计算机辅助分析与设计”国际会议。在这一时期，日本学者的研究工作在起步较晚的情况下很快地达到了应用阶段，并且在与试验的结合方面取得了很大的进展[2]。他们在梁、柱、梁柱节点、剪力墙、核反应堆结构等方面都进行深入细致的研究，并部分地应用于工程设计或为制订规范提供了依据。在这一时期，我国学者在资料较少的情况下也开始进行了研究工作，发表了一些论文和专著[3],[4]。

第三个阶段是 1985 年到现在这段时期，除在混凝土的本构关系的表述和试验研究方面继续进行更深入的研究之外，钢筋混凝土结构非线性有限元分析进一步向实用方向发展，努力把现有的分析方法与工程设计结合起来。研究的领域也进一步扩展到动力、冲击荷载下的非线性分析，分析模型和材料参数成为预测钢筋混凝土结构在动力与冲击荷载下性能的研究热点；高强混凝土和受约束混凝土结构的非线性有限元分析也受到了重视；材料非线性、几何非线性以及时间因素的综合考虑也溶入了钢筋混凝土结构的非线性有限元分析。在混凝土结构中，与时间因素有关的效应包括荷载、预应力、环境条件以及随着时间推移而变化的徐变、收缩、老化、热效应和预应力筋的松弛。在这一时期中，我国在钢筋混凝土结构非线性有限元分析的大部分领域开展了研究工作，取得了很大进展。我国虽然没有专门召开过钢筋混凝土非线性有限元分析方面的会议，但这方面的研究工作在计算力学、结构工程、地震工程等全国性的学术会议中都有所反映，也出版了钢筋混凝土结构非线性有限元分析方面的专门著作[5,6]，反映了我国在这一领域的研究成果。近

几年来我国在地震作用下钢筋混凝土结构的非线性有限元时程分析方面的所做的工作也在国际上产生了一定的影响[7],[8]。

1.3 钢筋混凝土结构有限元分析的发展趋势

科学研究的基本目的是认识世界和改造世界。钢筋混凝土结构非线性有限元分析的目的,第一是认识钢筋混凝土结构在各类荷载作用下的受力性能和破坏机理;第二是为钢筋混凝土结构的合理设计提供依据,今后的研究也将是在这两个方面开展工作。

为了更好地认识钢筋混凝土结构的受力性能和破坏机理,对下列一些基本问题的深入研究是必需的[1,2,9]:

(1) 在多轴应力状态下混凝土本构关系的试验及分析模型的建立。

(2) 在反复荷载作用下混凝土受力性能的试验及滞回关系模型的描述。

(3) 粘结、开裂及剪切机理的进一步研究和有限元描述。

(4) 各种单元的最优选择,例如是选择钢筋与混凝土的组合单元还是单独选择混凝土单元和钢筋单元等。

(5) 裂缝模式的最优选择,例如选择离散裂缝模式或者分布裂缝模式的条件和适用场合,这种选择对计算结果的影响等等。

(6) 非线性计算的各种算法及其稳定性问题。

为了更好地用非线性有限元分析方法解决钢筋混凝土结构设计中的各种复杂问题,这也需要在下列一些问题上进行深入研究:

(1) 大型、开放的钢筋混凝土结构非线性分析程序的研制。这种程序应经过试验数据的检验,应包含混凝土在各种受力状态下的本构关系,应为用户提供灵活方便的接口,允许用户使用具体工程的试验数据来建立混凝土和钢筋的本构关系,允许用户使用按最新试验数据建立的破坏准则等等。

(2) 各种分析模型、计算方法的比较和选择。在基本模型和方法的研究中,一般是用有限的试验数据检验分析的正确性,而作为在设计中的应用,由于工作的复杂性和大型化,不可能直接用试验检验某种分析方法的正确性。这时就必须选择不同的分析模型和方法,对同一类结构进行计算分析,再通过进行参数研究和比较分析,从中选择适合某一类结构的分析模型和方法。也可以通过这种有效的计算,使得验证性试验的数量大大减少。

(3) 对现有的规范设计方法的评价和改进。其目标是,借助于有限元分析方法,重新评价现有的设计公式和宏观分析模型,通过大量的参数分析来改进宏观模型,进一步完善设计方法;希望发展一种有效的单元,例如像钢筋混凝土组合单元一样,这种单元具有较少的自由度,可以用于分析大尺度的结构而仍然具有较高的精度,等等。

(4) 不完整结构的分析和模拟。正在施工中的结构、分段装配式结构、在全部施加予应力之前的预应力混凝土结构,这些结构都是不完整的结构,在实际施工中经常存在。对这些结构,用钢筋混凝土结构有限元方法进行非线性总体分析、区域分析以及局部分析是具有重要现实意义的课题,近几年来受到了人们的重视,这也是有限元分析方法应用于工

程实际的一个重要领域。

1.4 钢筋混凝土结构非线性分析中的几个基本概念

在钢筋混凝土结构非线性有限元分析中，下列一些概念或名词术语经常会遇到，有必要在这里作以下介绍。

1. 本构关系

在研究材料的力学性质时，从由试验和经验中观察到的特性出发，在某些理论的假设下，找出描述材料力学性质的数学表达式，它们被称为材料的本构方程或本构关系。由于得出材料本构关系的过程中带有经验性和某些假定，因此，对于相同的材料，特别是混凝土材料，不同的研究人员可能会得到不同的本构关系。由于材料的本构关系仅是强调了材料在某些方面的性质，因此，对于像混凝土这样的各向异性的材料，受力性质不同，得到的本构关系不同，例如受压和受拉时的本构关系不同。

2. 屈服极限

物体在受力以后的变形过程中，当外力增加到一定程度时，变形由弹性变成非弹性(塑性)，即开始产生永久变形。这种由弹性变形变为非弹性变形的转折点的应力就称为材料的屈服极限。结构上使用的软钢一类材料，具有明显的屈服阶段，因此这种材料具有明显的屈服极限。但对于混凝土材料，在受压时，一般没有明显的屈服极限，而在受拉时的屈服极限与强度极限基本一致。

3. 屈服条件　屈服函数　屈服面

判断物体内某一点开始出现塑性变形时其应力状态所应满足的条件，称为屈服条件，有时也称为塑性条件。从自然状态开始第一次产生塑性变形时的条件称为初始屈服条件，由于产生了塑性变形，材料的内部结构发生了变化，这时的屈服条件称为后继屈服条件。对于结构上使用的钢材，一般都有初始屈服和后继屈服的现象。对于混凝土材料，这种现象不明显。但对于钢筋与混凝土的组合材料，在研究反复荷载作用下的特性时，有时应考虑初始屈服和后继屈服的差别。

表示屈服条件的函数关系式称为屈服函数。屈服函数在应力空间中表示的曲面，称为屈服面。它是弹性与塑性阶段之间的界限，应力落在此曲面内的应力状态称为弹性状态，应力落在此曲面上的状态称为塑性状态。屈服面是由达到屈服条件的各种应力状态点集合而成的，在简单拉伸的情况下，它相当于拉伸曲线上的屈服点。

4. 强化　软化

为了叙述简单起见，我们以弹塑性材料(例如结构用钢材)简单拉伸试验的应力应变曲线图 1.1 为例，说明这两个概念。

在钢材的拉伸试验中，当应力未超过屈服极限 σ_s 时，应力应变关系呈直线，超过这一点时，应力应变之间就不再是线性关系，材料就发生了塑性变形，当塑性变形发展到一定程度时，材料的内部结构发生了变化，材料又重新获得了继续抵抗外载的能力，这时必须继续增大应力才能使它产生新的塑性变形，这种屈服极限提高的现象叫做强化，这个变形阶段称为强化阶段。当达到曲线最高点 C 时，应力达到最大值，这个值即材料的强度极

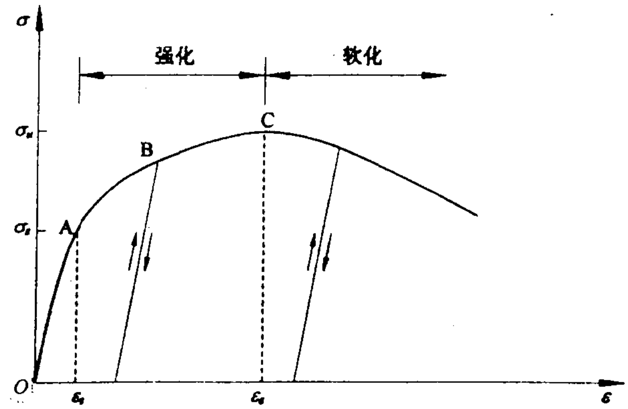


图 1.1　钢材简单拉伸 σ-ε 曲线示意图

限。此时应力开始下降而塑性变形不断增加,这种应力降低、应变增加的现象叫做软化,这个变形阶段称为软化阶段。

混凝土材料在单向受压时没有明显的屈服极限,因而没有像钢材那样明显的强化阶段。但混凝土材料有明显的强度极限,在强度极限之后有明显的软化阶段。混凝土材料软化阶段特征的描述和利用,一直是混凝土基本性能的试验研究和非线性有限元分析的热点和难点。

5. 钢筋混凝土构件的拉伸强化(Tension Stiffening)

在钢筋混凝土受拉构件中,当混凝土受拉开裂后,虽然主裂缝处混凝土不能承受拉应力,但主裂缝之间的混凝土仍承担一部分拉应力,这种现象称为拉伸强化(Tension Stiffening)。在钢筋混凝土结构有限元分析中,如采用钢筋与混凝土的组合单元,则在计算单元刚度和应力时需考虑拉伸强化效应,以反映单元开裂后混凝土与钢筋的共同工作。

第二章　钢筋混凝土结构材料的本构关系

2.1　概述

钢筋混凝土结构材料的本构关系对钢筋混凝土结构有限元分析结果有重大的影响，如果所选用的本构关系不能很好地反映材料的各项力学性能，那么其他计算再精确也无法反映结构的实际受力特征。

所谓材料的本构关系，主要是指描述材料力学性质的数学表达式。用什么样的表达式来描述材料受力后的变化规律呢？不同的学者根据材料的性质，受力的条件和大小，试验方法，不同的理论模型等因素综合考虑，建立了许多种钢筋混凝土材料的本构关系表达方式。

本构关系所基于的理论模型主要有：弹性理论、非线性弹性理论、弹塑性理论、粘弹性、粘塑性理论、断裂力学理论、损伤力学理论、内时理论等。迄今为止，由于钢筋混凝土材料的复杂因素，还没有一种理论模型被公认为可以完全描述混凝土材料的本构关系。有些本构关系虽然能比较好地反映材料在复杂应力状态下的应力应变关系，但是其表达形式很复杂，所采用的参数过多，使用不方便。一般来讲一个好的本构关系表达式应该是：数学公式推导方便；关系式中的有关主要参数有明确的物理意义；基于有关的试验和经验。

考虑到钢筋混凝土结构的特点及经济、实用，在钢筋混凝土结构非线性有限元分析中应用得较多的是非线性弹性理论和弹塑性理论。

本节对各种理论模型作一简单介绍，对于钢筋混凝土结构有限元分析中钢筋、混凝土及两者之间粘结所常常采用的本构关系在下面几节中具体讨论。

2.1.1　线弹性本构关系

在加载或卸载中，应力应变呈线性关系(以 E 为斜率的直线)，见图 2.1，其表达式为：

$$\sigma = E\varepsilon \tag{2.1}$$

应力与应变之间呈线性比例关系，对于一维问题，其比例系数即为弹性模量 E，它是常数。对于二维、三维问题，联系应力和应变之间关系的则是弹性矩阵。弹性矩阵中每一项均为常数，与应力水平和加载路径均无关。

当混凝土所受的力很小，无裂缝时，可将混凝土看成弹性匀质材料，采用线弹性的本构关系，但混凝土常常是带裂缝工作的，混凝土的应力应变关系显然与线弹性计算模型相差较大，然而由于线弹性模型简单，程序编制容易，应用方便，所以至今仍有相当广泛的应用。

2.1.2 非线性弹性关系

由于混凝土材料在加载过程中应变增加明显地快于应力的增加，为描述这种非线性关系，工程上常采用非线性弹性模型，如图 2.2 所示，其特点是应力应变不成正比，但仍有一一对应关系，卸载时沿加载路径返回，没有残余变形。应力状态由应变状态唯一确定，应力应变的关系式为：

$$\sigma = E(\sigma)\varepsilon \tag{2.2}$$

式中弹性模量 E(对于二三维问题，则是物理矩阵)是应力水平(也可表示为应变大小)的函数，而不再是常数。如果找到适合于钢筋混凝土材料 $E(\sigma)$的表达式，且求解问题只是考虑单调加载的情况，就可以得到较为理想的计算结果。该关系式在钢筋混凝土结构非线性有限元分析中应用最广，后面讨论的几种混凝土本构关系均属于非线性弹性范畴。

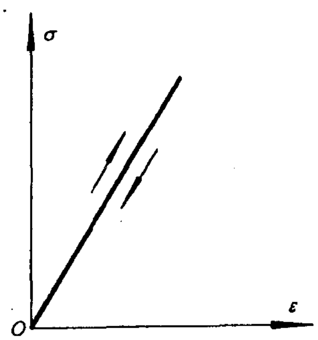


图 2.1 线弹性的应力-应变关系

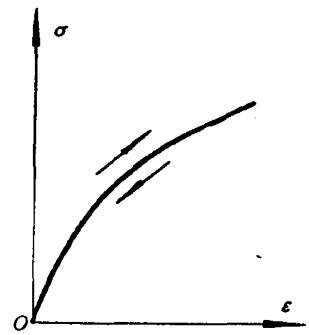


图 2.2 非线弹性的应力-应变关系

2.1.3 弹塑性关系

前述变弹性常数的非线性弹性模型，考虑了钢筋混凝土材料的非线性，较线弹性模型前进了一大步。但这类模型的缺点是在材料屈服后的变形规律的描述并不符合塑性流动法则，使塑性变形的计算带有任意性。因此，对于受荷载作用后，处于较高应力水平下的钢筋混凝土结构，常常采用弹塑性的本构关系。

弹塑性理论的许多概念是根据材料单向拉压试验的应力-应变曲线所得到的，再推广到二维或三维的应力应变情况。以典型的钢筋单向拉伸试验为例，图 2.3(a)为软钢单向拉伸试验的应力应变曲线，曲线包括了线弹性阶段(OA 段)，流动阶段(AB 段)及硬化阶段(BC 段)，计算时，根据材料的不同条件作不同的简化，常用的简化模型为：

1. 理想弹塑性模型

见图 2.3(b)，一旦进入塑性，其应力保持不变，而应变不断增加。

2. 线性强化弹塑性模型

当考虑材料进入塑性后的应变强化，可选用图 2.3(c)所示的线性强化弹塑性模型。

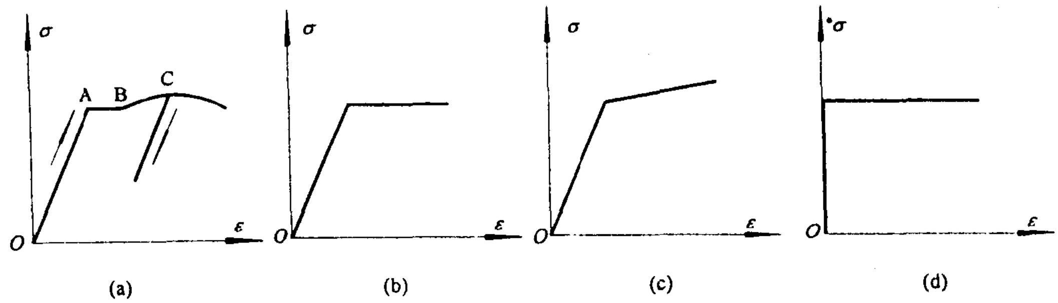


图 2.3 钢筋单向拉伸试验曲线及不同的简化模型

3. 刚塑性模型

若可恢复的弹性变形在总的变形中所占比例很小时，为简化计算也可忽略弹性变形部分，而只考虑塑性变形，可取图 2.3(d)所示的刚塑性模型。

弹塑性体的重要特点是，材料进入塑性状态的条件不仅与材料的物理力学性质有关，而且与加载历史及其应力水平有关。因此，为了在弹塑性分析时综合考虑上述因素，建立本构关系(除上面介绍的模型外，还有强化模型等)时，应同时考虑以下三个基本要求：

(a) 假定一个符合材料特性的屈服准则；

(b) 建立合适的塑性变形流动法则；

(c) 建立与材料变形特征相应的硬化和软化定律。

2.1.4 粘弹性和粘塑性的流变模型

钢筋混凝土结构在外荷载作用下，其应变不仅与应力状态和加载历史、路径有关，而且还与时间因素有关。按照弹性力学或塑性力学观点，结构的内力和变形(无论是弹性变形还是塑性变形)均在加载的瞬时发生，不再随时间变化。但混凝土材料的徐变和预应力构件中钢筋应力损失等现象，说明需要考虑应力应变关系与时间的联系。如果引用流变学的观点(参见文献[12])，就能对上述现象作出较为合理的解释。

1. 流变学采用的三个简单流变元件

流变学计算模型往往是由若干个简单的流变元件组合而成的，如图 2.4 所示的三种理想化的简单流变元件，能形象化地表征物体的三个基本力学性质—弹性，粘性和塑性。

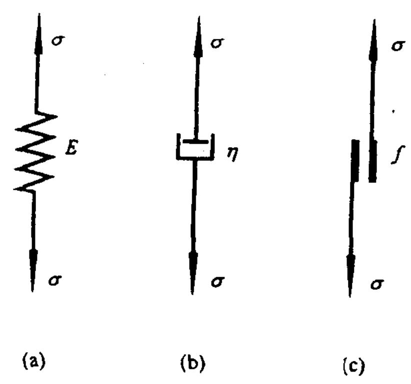


图 2.4 理想化的简单流变元件

(a) 理想弹性元件

图 2.4(a)为弹簧元件又称虎克(Hooke)体，能模拟物体的弹性。应力应变关系为：

$$\sigma = E\varepsilon$$

(b) 粘性元件

图 2.4(b)为粘性元件，又称牛顿(Newton)体或阻尼器。它可以想象为一个活塞在充满了粘性液体的圆筒中运动，其应力与应变速率成

正比：

$$\sigma = \eta\dot{\varepsilon} \tag{2.3}$$

式中：η——粘滞系数；

$\dot{\varepsilon}$——应变速率($\dot{\varepsilon} = d\varepsilon/dt$)。

(c) 理想塑性元件

图 2.4(c)为理想塑性元件，又称圣维南(St. Venant)体或滑块元件。它可以想象为具有摩擦阻力 f 的两个滑块。当应力 σ 小于摩擦阻力时，不产生变形，一旦应力达到起始摩擦阻力时就产生等应力下塑性流动，即有如下关系式：

当 $\sigma < f$ 时，　$\varepsilon = 0$

当 $\sigma = f$ 时，　$\varepsilon =$ 任意值(取决于其它有关的条件)

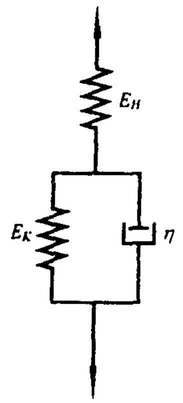


图 2.5　广义凯尔文模型

2. 粘弹性流变模型

弹性材料实际上也具有流变性，具有代表性的粘弹性模型称为广义凯尔文模型，如图 2.5 所示，它是由一个粘性元件(η)和一个弹簧(E_k)并联而成的凯尔文模型中再串联一个弹簧(E_H)组成。

一维问题的本构方程可表示为：

$$\frac{\eta}{E_K}\dot{\varepsilon} + \varepsilon = \frac{\eta\dot{\sigma}}{E_H \cdot E_K} + \frac{E_H + E_K}{E_H \cdot E_K}\sigma \tag{2.4}$$

式中：$\varepsilon, \dot{\varepsilon}$——应变和应变速率；

$\sigma, \dot{\sigma}$——应力和应力对时间 t 的导数；

E_H, E_k——分别为两个弹簧的弹性常数。

当受到常应力 $\sigma = \sigma_0$ 作用，显然在初始时刻 $t = 0$ 时，应变为瞬时应变 $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E_H}$，以此作初始条件可以得到式(2.4)的解：

$$\varepsilon = J(t)\sigma_0 \tag{2.5}$$

式中，$J(t)$称为蠕变柔量，它是时间的函数：

$$J(t) = \frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_K}\left[1 - \exp\left(\frac{-E_K}{\eta}t\right)\right] \tag{2.6}$$

显然，式(2.5)表示了弹性材料在应力不变的情况下，应变随时间不断增长的特性——弹性蠕变，其应变值最终收敛于一个定值。

如果改用在 $t = 0$ 时 $\varepsilon = \varepsilon_0$ 的初始条件，保持应变为常量，又可得到式(2.4)的另一形式的解：

$$\sigma = E(t)\varepsilon_0 \tag{2.7}$$

式中，$E(t)$称为松弛模量，它是时间的函数：

$$E(t) = \frac{E_H E_K}{E_H + E_K} + \frac{EH^2}{E_H + E_K}\left[\exp\left(-\frac{E_H + E_K}{\eta}t\right)\right] \tag{2.8}$$

此解反映了弹性材料在应变保持不变的情况下应力逐渐减小趋向于一个定值 $\frac{E_H E_K}{E_H + E_K} \cdot \varepsilon_0$