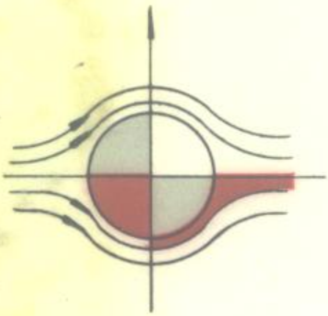
复变函数

孙利祥　主编



复旦大学出版社

复 变 函 数

主 编 孙利祥

复旦大学出版社

内 容 提 要

本书阐述了复变函数的最基本的概念、理论、方法及其在自然科学、工程技术等领域的应用。内容包括：复数、复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、共形变换等。本书文字流畅、实例丰富、讲述简洁、习题很有启发性并有答案，便于读者自我检测。本书可作为高等理工科院校各类专业以及高等师范院校、高等工业专科学校有关专业的复变函数的教材，也可作为业余工业大学、电视大学复变函数的教科书以及广大工程技术人员的参考书。

复变函数

孙利祥 主编

复旦大学出版社出版

（上海国权路579号）

新华书店上海发行所发行　　复旦大学印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 8.375 插页 0 字数 240,000

1995年7月第1版　1995年7月第1次印刷

印数 1—7,000

ISBN7-309-01478-2/O·153

定价：9.00元

序

众所周知，在科学技术高度发展的当今世界，无论是作为一门基础理论学科，还是作为用于自然科学、社会科学以及工程技术的一个工具，数学正在发挥日益重要的影响和作用。可以说，现代科技的几乎每个重大成果都离不开数学的参与和渗透。因此，在我国高等工科院校中加强数学教育，已成为十分迫切的需要。应此需要，铁路高校数学协作组织编写了这套系列数学教材。

一本数学教材，既不是原材料的堆砌，也不是某些定理和公式的随机选取，它应当对所考察的领域提供一个可供游览的园地和一条入门途径。作为工科数学教材，既要考虑到数学的严谨性，又要注意各种应用实例。一本成功的教材，应该瞄准培养适应现代化建设要求的专门人才这个大目标，面向世界，面向未来，根据数学在全局中的地位与作用，精心组织教材内容，注重基本理论、基本知识、基本技能的训练。本系列教材的作者们大都从教多年，具有丰富教学经验。因此，我认为本套系列教材是能够而且已经瞄准了上述目标，为我国工科院校数学教材建设做出重要贡献的。

侯振挺

1994年仲夏之夜写于

长沙铁道学院荷花村

前　言

复变函数是一门近代数学学科，它与微积分学一样，是由于实践的需要而产生和发展起来的。微积分学中的数，基本上是实数。然而，对于数学、自然科学以及技术科学而言，仅有实数是完全不够的。许多不同领域的问题，只有放在复数范围内来考虑，才有可能彻底解决。

人们对复数的认识经历了一个点滴积累、由初级到高级的漫长过程。早在16世纪，在Cardano(意，1501—1576)关于求解三次方程的"Cardano公式"里，即使在三个实根的情形，负数开平方就已经出现。18世纪，Euler (瑞士，1707—1783)求解微分方程时，发现并且研究了复函数。此外，借助于古典的Euler公式

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,$$

复对数函数的概念也得到澄清。

随着复数的愈益广泛的使用，人们甚至发现：许多实函数的问题，一旦利用复数和复函数，可以十分容易地解决。然而，一直到19世纪中叶，复数仍然是"不合法"的数。Descartes (法，1596—1650)称复数为"虚幻的"("*imaginary*")数，甚至Euler也觉得复数仅仅在"想象"("*imagination*")中存在。

进入19世纪，Cauchy(法，1789—1857)仿照微积分学建立了复函数的理论基础(例如：极限、连续、导数、围道积分等)。特别是他指出一个令人吃惊的事实：任何一个复可微函数存在任意阶导数，并且可以展为幂级数。以后人们利用积分学与Cauchy (积分) 定理证明了它。至今，没有发现另外范围的数符合这一事实。因此，人们不再一般地称这个瑰丽的领域为函数论，而称为**复变函数**或**复分析**。

迄今，复变函数已经发展成为内容十分丰富、应用极为广泛的数学学科。它(特别是解析函数)的理论与方法应用于解析数论、微分方程、概率论、计算数学、流体力学、热传导理论、电磁学、弹性理论、天体力学等等部门，并且已经成为解决各种理论与实际问题的强有力的工具。因

此，通晓它的一些最基本的概念、理论与方法，具有应用这些概念、理论与方法解决实际问题的基本技能，无疑是必要的。

本书阐述Cauchy积分理论、Weierstrass(德，1815—1897)级数理论、Riemann (德，1826—1868)共形变换理论的最基本的内容。力求做到阐述细致、论证严格、运算简洁、理论联系实际。注意启发性与科学性，凡是学过一元与多元函数微积分初步的读者都能阅读。

书中的定义、定理、推论、例子按节编号，注与插图按章编号。此外，还采用一些通用的方便记号，例如：$\in$——属于，$\subseteq$——包含，$\square$——证明结束等。

为了巩固所学的基本理论与方法，本书配有较多的例子与习题，习题按难易程度分为A，B两部分，且特别注意应用题的选择。个别较难的习题标以记号“*”并附有提示，书末还有习题答案。希望同学们尽可能多地做些习题，这对于基本理论与方法的掌握是大有裨益的。

书中加有“*”号的节、定义、定理、推论、证明、注、例子等可根据不同层次、不同专业的需要酌情取舍。本书可作为高等理工科院校各专业以及高等师范院校、高等工业专科学校有关专业复变函数的教材，也可作为业余工业大学、电视大学复变函数教科书以及广大工程技术人员的参考书。

本书是在西南交通大学复变函数讲义（孙利祥主编，其中第五章、第六章与第七章分别由韩流冰与叶建军参加编写）的基础上，参照全国高等学校工科数学《复变函数课程教学基本要求》、高等师范院校《复变函数教学大纲》的要求，由孙利祥重新修改补充而成。

本书由四川大学唐贤江教授主审。参加审稿的还有成都电子科学技术大学江嘉禾教授、西南交通大学黄盛清教授。他们对原稿提出了不少改进意见，谨在此表示衷心的感谢。本书一定还有错误和不妥当之处．切望读者惠予指正。

孙利祥

1994年2月于成都九里堤

西南交通大学总校

目　　录

第一章 复 数

复数在数学、自然科学以及技术科学中起着重要的作用。复数的基本概念和运算，读者在中学代数课程里已经学习过。在这一章里，我们首先引入复数的概念，然后叙述复数的平面表示以及复数的运算，最后是复数的球面表示与无穷远点∞。复数的球面表示形象化地描绘了无穷远点∞，而无穷远点的引入使我们能够更好地刻划当$|z|\to+\infty$时函数的变化性态。

§1.1 复数及其平面表示

1. 复数概念

形如$x+\mathrm{i}y$的数，称为**复数**．记为$z=x+\mathrm{i}y$，其中x与y为实数，i① 具有性质$\mathrm{i}^2=-1$，记为$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$．x称为z的**实部**，y称为z的**虚部**，分别记为$\mathrm{Re}\,z$与$\mathrm{Im}\,z$②，当$\mathrm{Im}\,z=0$时，$x+\mathrm{i}0$记为x，看作与实数全同。因此，全体实数是复数的一部分。特别地，$0+\mathrm{i}0=0$。

当$\mathrm{Re}\,z=0$且$\mathrm{Im}\,z\neq0$时，称为**纯虚数**。i称为**虚数单位**。两个复数z_1与z_2当且仅当$\mathrm{Re}\,z_1=\mathrm{Re}\,z_2$，$\mathrm{Im}\,z_1=\mathrm{Im}\,z_2$时，称作**相等**。

复数$x-\mathrm{i}y$称为复数$z=x+\mathrm{i}y$的**共轭复数**，记为$\bar{z}$．易见，$x+\mathrm{i}y$与$x-\mathrm{i}y$是相互共轭的。

2. 复数的平面表示

复数之所以不再是虚幻的数，并且得到了广泛的承认，在很大程度上是由于复数的几何表示。几何表示的重要性在于简洁术语的使（借）用与形象化的图形描述。

① 记号i是Euler引进的，但在电工学里用j不用i。

② Re与Im分别是拉丁字Realis（实的）与Imaginarius（虚的）的前面两个字母。

1) 平面的点表示

如同用直线上的点来表示实数一样，我们也可以用平面上的点来表示复数。

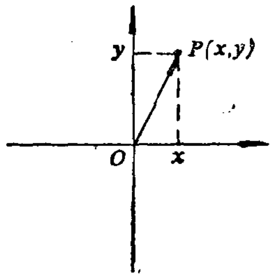


图 1-1

在平面上选定一直角坐标系 Oxy。对于复数 $z=x+\mathrm{i}y$，规定平面上的点 $P(x,y)$ 与之对应。反之，对于平面上的点 $P(x,y)$，规定复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 与之对应。这样一来，全体复数的集与平面点集间建立了一一对应。用点来表示相应的复数，这就是复数的**平面点表示**(图 1-1)。

特别地，由复数的平面点表示，实数 x 由 x 轴上的点表示，x 轴称为**实轴**，纯虚数 $\mathrm{i}y$ 由 y 轴上的点表示，y 轴称为**虚轴**，O 称为**原点**，它表示复数0。两轴所在的平面称为**复数平面**，简称**复平面**①。今后，我们对复数与复平面上的点不加区别。全体复数或复平面记作 C。

2) 平面的向量表示

在复平面 C 上，规定以原点 O 为起点，以点 $z=x+\mathrm{i}y$ 为终点的向量 $\overrightarrow{OP}$ 与复数 z 对应。反之，复平面 C 上一个以原点 O 为起点的向量，其终点唯一地确定一个复数。这样一来，全体复数与复平面上从原点出发的向量集合之间建立了一一对应(复数 0 与零向量对应)。用向量来表示相应的复数，这就是复数的**平面向量表示**(图 1-2)。

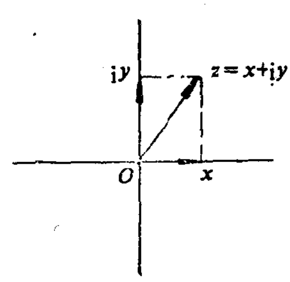


图 1-2

在自然科学和工程技术中常常使用向量。例如：力、速度、电场强度、磁场强度等。复数与向量视为同一的观点表明：复数不仅是实数形式上的推广，而且还有重要的实际意义。

例如，河面各点的速度向量 v 在某一时刻是完全确定的。设对于某一坐标系 Oxy，速度分量为 v_x 与 v_y，则速度向量可以记为

$$v=v_x+\mathrm{i}v_y$$

① 也称 Argand 平面或 Gauss 平面。

从原点 O 到点 z 的向量的长度称为复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的**绝对值或模**，记为 $|z|$，从而有

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

易见

$$|\mathrm{Re}\,z|\leqslant|z|,\ |\mathrm{Im}\,z|\leqslant|z|,\ |z|\leqslant|\mathrm{Re}\,z|+|\mathrm{Im}\,z|.$$

通常称 $z=x+\mathrm{i}y$ 为复数 z 的**直角坐标表示**或**代数式**。

如果利用极坐标

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,$$

则 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 称为复数 z 的**极坐标表示**或**三角式**，其中 $r=|z|$，θ① $=\mathrm{Arc\,tg}\,\dfrac{y}{x}$ 且称为复数 z 的**辐角**，记作

$$\theta=\mathrm{Arg}z.$$

$\mathrm{Arg}\,z$ 有无穷多个值，设 θ_0 是其中一个值，则有

$\mathrm{Arg}\,z=\theta_0+2k\pi(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$（图 1-3）。

在复数 z 的辐角中，只有一个 θ_0 满足 $0\leqslant\theta_0<2\pi$，称为 $\mathrm{Arg}\,z$ 的**主值**或称为**主辐角**，记为 $\arg z$。

从而有

$\mathrm{Arg}\,z=\arg z+2k\pi\quad(k=0,\ \pm1,\ \cdots)$。

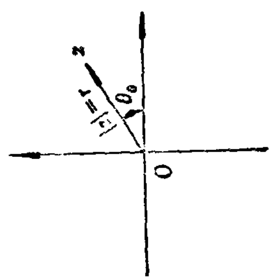


图 1-3

注 1.1 有时也将辐角的主值（范围）规定为：$-\pi\leqslant\theta_0<\pi$ 或 $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$。复数 0 没有定义辐角，对应的零向量是无定向的。

例 1 试求 $\theta_0=\arg z$ 与 $\mathrm{ar\,ctg}\dfrac{y}{x}$（反正切函数的主值）之间的关系。

解 当 z 在第一象限时，$\theta_0=\arg z=\mathrm{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$。

当 z 在第二象限时，

---

① θ 是正实轴到向量 $\overrightarrow{OP}$ 的旋转角度，按逆时针方向转动所成的角 θ 为正，否则为负。

$\because$ $$\arg z=\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{|x|},$$

$\therefore$ $$\arg z=\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}.$$

当 z 在第三象限时，$\arg z=\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$.

当 z 在第四象限时，

$\because$ $$\arg z=2\pi-\operatorname{ar\,ctg}\frac{|y|}{x},$$

$\therefore$ $$\arg z=2\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}.$$

此外

$$\theta_0=\arg z=\begin{cases}0, & \text{当 } z \text{ 在正 } x \text{ 轴上;}\\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } z \text{ 在正 } y \text{ 轴上;}\\ \pi, & \text{当 } z \text{ 在负 } x \text{ 轴上;}\\ \dfrac{3}{2}\pi, & \text{当 } z \text{ 在负 } y \text{ 轴上}\end{cases}$$

(图 1-4).

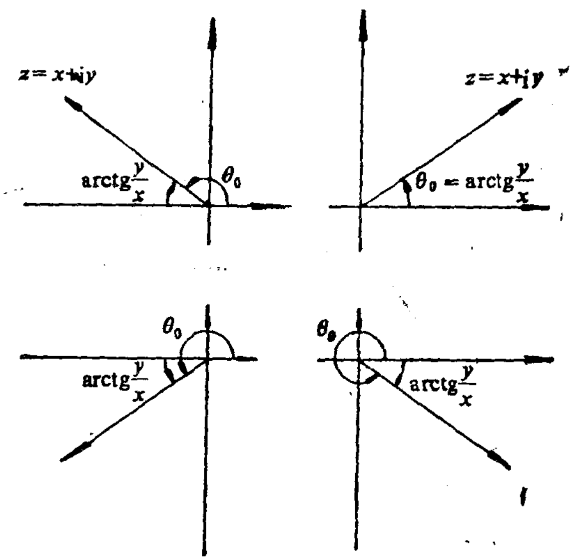


图 1-4

例2 求复数1, i, −1, −i 的模与辐角的主值。

解

$$|1|=1, \arg 1=0;$$

$$|\mathrm{i}|=1, \arg \mathrm{i}=\frac{\pi}{2};$$

$$|-1|=1, \arg(-1)=\pi;$$

$$|-\mathrm{i}|=1, \arg(-\mathrm{i})=\frac{3}{2}\pi.$$

例3 求复数 $z=1-\mathrm{i}$ 的三角式:

解 $|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，由例1得

$$\arg z=2\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{-1}=\frac{7}{4}\pi,$$

$$\therefore \quad z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{7}{4}\pi\right).$$

*如果利用著名的 Euler 记法

$$e^{i\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta,$$

则

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=re^{i\theta},$$

这就是复数的**指数表示**。后面的例 2.1.4, 习题2.*B*.3, ① 注 5.5, 习题 5.*B*.7等表明这种规定是合理的。

§1.2 复数的运算

1. 加法和减法

复数的加法和减法定义如下:

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$, 则

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2),$$

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2).$$

几何解释 复数 z_1 与 z_2 的和对应于向量 $\overrightarrow{OP_1}$ 与向量 $\overrightarrow{OP_2}$ 的和②。

---

① 例 2.1.4 即第二章第一节例 4, 习题 2.*B*.3 即第二章习题 *B* 组的第 3 题……类似的今后不再说明。

② 这里的向量是自由向量。即任何向量，只要大小与指向相同，不管起点位置如何，均视为同一向量。

即是说，如果平行移动向量 $\overrightarrow{OP_2}$，当它的起点为 z_1 时，它的终点就是 z_1+z_2。当 $0, z_1, z_2$ 三点不共线时，这就是"平行四边形法则"（图 1-5）。

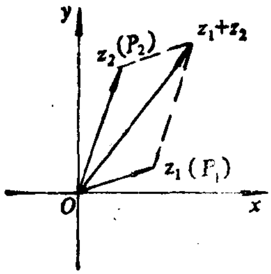


图 1-5

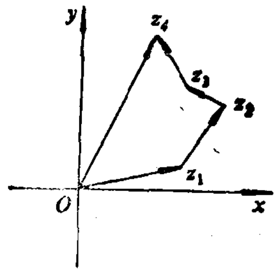


图 1-6

一般地，若 $z_k=x_k+iy_k(k=1,2,\cdots,n)$，则

$$z_1+z_2+\cdots+z_n=(x_1+x_2+\cdots+x_n)+i(y_1+y_2+\cdots+y_n)。$$

相应的几何解释也是十分明显的（图 1-6）。

2. 乘法和除法

形式地应用实数的代数运算法则，且注意到 $i^2=-1$，复数的乘法定义如下：

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2)。$$

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1), z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$,

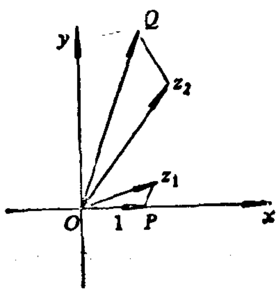


图 1-7

则
$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]。\end{aligned}$$

因此得
$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,$$
$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2。\tag{1.1}$$ ①

即乘积的模等于模的乘积，乘积的辐角等于

① (1.1)式是一个集合等式，即对于 $\operatorname{Arg}(z_1z_2)$ 的一个值，必有 $\operatorname{Arg}z_1$ 与 $\operatorname{Arg}z_2$ 的值使之成立，反之亦真。

辐角之和。

几何解释 作两个相似三角形 ΔOPz_1 与 ΔOz_2Q（$|\overrightarrow{OP}|=1$），则与 z_1 对应的向量 $\overrightarrow{OQ}$ 表示 z_1z_2（图 1-7）。

特别地，当 $z_1=\lambda<0$ 时，

$|\lambda z_2|=-\lambda|z_2|$, $\operatorname{Arg}(\lambda z_2)=\pi+\operatorname{Arg} z_2$.

当 $z_1=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 时，

$|z_1z_2|=|z_2|$, $\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\theta+\operatorname{Arg} z_2$.

设 $z_k=r_k(\cos\theta_k+\mathrm{i}\sin\theta_k)$，$k=1,2,\cdots,n$.

利用数学归纳法可得

$$z_1z_2\cdots z_n=r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)].$$

特别地

$$z^n=r^n(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta),$$

称为 **De Moivre 公式**（其中 n 是正整数）。

作为复数乘法的逆运算的除法定义如下：

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，且 $z_1\neq0$.

容易验证
$$\frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2}z_1=1.$$

定义
$$\frac{1}{z_1}=\frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2},\qquad \frac{z_2}{z_1}=\frac{1}{z_1}z_2.$$

则

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{1}{r_1}(\cos\theta_1-\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$$
$$=\frac{r_2}{r_1}[\cos(\theta_2-\theta_1)+\mathrm{i}\sin(\theta_2-\theta_1)].$$

因此得

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right|=\frac{|z_2|}{|z_1|},$$
$$\operatorname{Arg}\frac{z_2}{z_1}=\operatorname{Arg} z_2-\operatorname{Arg} z_1.$$

即商的模等于模的商，商的辐角等于辐角之差。

***注 1.2** 大家知道，实数可以比较大小。特别地，由 $a>b$ 推知 $b<a$，$ac>bc(c>0)$，$-a<-b$ 等。