结构矩阵分析

中国建筑工业出版社

结构矩阵分析是为了适应使用电子计算机进行结构计算而发展起来的一种结构分析方法。本书共分三部分：矩阵代数的必要基础知识；结构理论的基本原理；矩阵力法、秩力法和矩阵位移法，并结合土建专业的实际，引用一些例题。

本书可供结构工程技术人员参考。

结构矩阵分析

北方交通大学铁道建筑系

*

中国建筑工业出版社出版（北京西郊百万庄）

新华书店北京发行所发行　各地新华书店經售

中国建筑工业出版社印刷厂印刷

*

开本：850×1168毫米 1/32　印张：10 1/8　字数：262 千字

1974年6月第一版　1975年3月第二次印刷

印数：16,906—30,055 册　定价：1.15 元

統一书号：15040·3140

毛主席语录

路线是个纲，纲举目张。

我们必须打破常规，尽量采用先进技术，在一个不太长的历史时期内，把我国建设成为一个社会主义的现代化的强国。

一个正确的认识，往往需要经过由物质到精神，由精神到物质，即由实践到认识，由认识到实践这样多次的反复，才能够完成。这就是马克思主义的认识论，就是辩证唯物论的认识论。

前　言

结构矩阵分析是适应使用电子计算机而发展起来的杆件系统结构分析方法。结构矩阵分析的基本思路是：将整体结构看作为由有限个力学小单元所组成的集合体；用有关的参数来描述这些被离散单元的力学性质，而整个结构的力学特性就是有限个单元力学特性的总和；由此来建立力的平衡关系和变形谐调关系，求解杆件的强度、刚度和稳定性等。结构矩阵分析是以电子计算机作为计算工具的。在解算各种类型的杆件系统结构时，如新型结构或要考虑多种因素影响的复杂结构，计算工作常很繁杂，如采用结构矩阵分析方法，使用电子计算机进行计算，问题就可得到顺利的解决。

近年来，在求解连续体问题上，如求解二维、三维连续体的弹性、塑性、振动和稳定性等问题，有限单元法获得了广泛的应用和迅速的发展。实际上，由无限个单元相连接的弹性连续体，将其理想化为由有限个节点相连接的有限个单元的集合体，便可使问题简化为一个容易适应数值处理的常型结构。因此，只要确定了单元的性能，就可以按结构分析的标准方法——矩阵力法和矩阵位移法求解。

编写本书的目的，是为了帮助土建工程技术人员了解和掌握结构矩阵分析的基本原理和方法，以便运用到实际设计工作中去。同时，本书也是进一步学习连续体等问题的有限单元法的基础。

由于我们学习马列著作和毛主席著作不够，理论水平低，实践经验很缺乏，本书定有不少缺点错误，恳请读者批评指正。

编　者

主要符号说明

$[A]$	矩阵 A
$\{A\}$	列矩阵 A
$[0]$	零矩阵
$[I]$	单位矩阵
$\lceil A_1 A_2 \cdots \rfloor$	带形矩阵
$[A]^T$	矩阵 A 的转置矩阵
$[A]^{-1}$	矩阵 A 的逆矩阵
$\vert A \vert$	行列式 A
σ	轴向应力
σ_x, σ_y, σ_z	直角坐标系的轴向应力
ε	线应变
ε_x, ε_y, ε_z	直角坐标系的线应变
τ	剪应力
τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}	直角坐标系的剪应力
γ	剪应变
γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}	直角坐标系的剪应变
U	应变能
T	外力所做的功
Π	总势能
W	作用力的力势能
V	内力所做的功
E	弹性模量
G	剪切弹性模量
μ	波桑比；剪切不均匀系数
$[D]$	弹性特性矩阵
C	曲率
I	截面积的惯性矩
A	截面积

l	单元长度
h	杆件高度
x，y，z	结构坐标系
$\bar{x}$，$\bar{y}$，$\bar{z}$	单元坐标系
P	广义的外荷载
X，Y，M	结构上的作用荷载：x 方向荷载，y 方向荷载，力矩荷载；
	单元上的作用内荷载：x 方向荷载，y 方向荷载，力矩荷载
S	广义的单元内荷载
Δ	广义的结构节点位移
δ	广义的单元节点位移
u，v，φ	结构（或单元）节点位移：x 方向线位移，y 方向线位移，转角
—	字母上划横线，为单元坐标系表示的分量
$[F]$	柔度矩阵
$[F_i]$，$[F_o]$，$[F_P]$…	分别表示单元柔度矩阵、组合带形柔度矩阵、结构柔度矩阵……
$[K]$	刚度矩阵
$[K_i]$，$[K_o]$，$[K_P]$…	分别表示单元刚度矩阵，组合带形刚度矩阵，结构刚度矩阵……
$[T]$	坐标系变换矩阵
$[\gamma_{SP}]$	外荷载——单元内荷载变换矩阵
$[\bar{\gamma}_{SX}]$	多余力——单元内荷载变换矩阵

目　　录

第一章　矩　阵　代　数

矩阵的定义和矩阵代数的基本运算，是学习结构矩阵分析的必要基础。为了读者的方便，这里仅就结构矩阵分析的需要，较系统地介绍有关矩阵的定义和有关运算的基本方法和步骤，一般地不做严格的证明和推导。

§1-1　矩　　阵

1.矩阵定义

一组元素按行、列次序排列成的矩形阵列称为矩阵。若矩阵的元素排列为m行和n列，称为$m\times n$阶矩阵。其中的元素可以是实数、复数或变量的函数。一个$m\times n$阶矩阵，通常表示为如下形式：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

矩阵的缩写形式，可用括在方括号中的一个大写字母或一个广义元素，即$[A]$或$[a_{ij}]$表示之。

$$[A]=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

在第i行和第j列的元素，以带有脚标的a_{ij}表示。第一个脚标是行的位置，第二个脚标是列的位置。

矩阵是由相当普遍的事物中抽象出来的概念。譬如，一点的坐标[x， y， z]，一个力的分力[F_x， F_y， F_z]，一个三维应力场中的某点应力，线性方程组的系数，都可以矩阵形式表示。

例如，三维应力场中某点的应力，可以矩阵形式表示如下：

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

式中　$\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$——直角坐标系中的轴向应力；

$\tau_{xy},\tau_{xz},\tau_{yz}$——直角坐标系中的剪应力。

又如一线性方程组

$$\begin{cases} 3x+4y+5z=8 \\ 4x \qquad +31z=125 \\ \qquad 7y+98z=376 \end{cases}$$

其系数矩阵，可表示为：

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 31 \\ 0 & 7 & 98 \end{bmatrix}$$

矩阵的原理与行列式原理紧密相联。但矩阵仅是一组按一定次序排列的元素，而不能象行列式那样可以求值。矩阵的行数也不一定要等于列数，而行列式的行数和列数必须相等。

2.方阵

一个具有相同的行数和列数的矩阵，即$m=n$时，称为n阶方阵。其对角线上的元素a_{11}，a_{22}，a_{33}，…，a_{nn}叫做方阵的主元素。

3.行矩阵和列矩阵

由一个单独的行组成的矩阵称为行矩阵。通常用方括号[]表示一个行矩阵。例如：

$$[A]=[a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}\cdots a_{1n}]; \quad 1\times n\text{阶}$$

由单列组成的矩阵称为列矩阵，通常用有花括号的大写字母代表列矩阵的缩写形式。例如：

$$\{A\}=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix};\quad m\times 1\text{ 阶}$$

为了书写方便，并使列矩阵与其他矩阵相区别，列矩阵也常写成：

$$\{A\}=\{a_{11}\ \ a_{21}\cdots a_{m1}\}$$

一个点的坐标，或一个作用荷载系统，可以写成一个行矩阵或列矩阵。

4.纯量

仅由一个单独的元素所组成的 1×1 阶矩阵，在矩阵代数中，称做纯量。以此与按行、列排列的矩阵相区别。

§1-2　矩阵的相等与矩阵的加法和减法

1.矩阵的相等

两个 $m\times n$ 阶矩阵

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad [B]=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

如果它们的每一对应元素都相等，即 $a_{ij}=b_{ij}$，就说这两个矩阵相等，即：

$$[A]=[B]$$

2.矩阵的加法和减法

矩阵的加减运算仅能在同阶矩阵间进行。两个矩阵之和与差，由两个矩阵的对应元素相加或相减而得。

例 1

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11})(a_{12}+b_{12}) \\ (a_{21}+b_{21})(a_{22}+b_{22}) \end{bmatrix}$$

例 2

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}-b_{11})(a_{12}-b_{12}) \\ (a_{21}-b_{21})(a_{22}-b_{22}) \end{bmatrix}$$

加法和减法的运算满足交换律和结合律，即：

$[A]\pm[B]=\pm[B]+[A]$；交换律。

及

$([A]\pm[B])\pm[C]=[A]+(\pm[B]\pm[C])$；结合律。

§1-3 数 乘 矩 阵

一个数乘一个矩阵，等于该数乘矩阵中的每一个元素。即：

$$t[A]=\begin{bmatrix} ta_{11} & ta_{12} \cdots ta_{1n} \\ ta_{21} & ta_{22} \cdots ta_{2n} \\ \vdots & \\ ta_{m1} & ta_{m2} \cdots ta_{mn} \end{bmatrix}$$

例 1 若

$$[A]=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad [B]=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad [C]=\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} 2[A]+3[B]-5[C] &= 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & -35 \\ -10 & -5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & -31 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

例 2 若

$$[A]=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad [B]=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$2(5[A])+4[B]=\begin{bmatrix}10 & 20\\ 10 & 0\\ 10 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 8\\ 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & 20\\ 10 & 8\\ 10 & 4\end{bmatrix}$$

§1-4 矩 阵 乘 法

1.矩阵乘法的两个重要规则

（ 1 ）两个矩阵仅当它们是共形，即当$[A]$的列数等于$[B]$的行数时才能相乘。例如：

$$\underset{m\times p}{[A]}\ \underset{l\times n}{[B]}=\underset{m\times n}{[C]}$$

仅在$p=l$时，才能相乘，结果阶数是$m\times n$。

矩阵共形或不共形举例如下：

$$[A][B]=\underset{2\times 2}{\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}}\underset{2\times 1}{\begin{bmatrix}b_{11}\\ b_{21}\end{bmatrix}}\qquad p=2,\ l=2\text{共形}$$

$$[B][A]=\underset{2\times 1}{\begin{bmatrix}b_{11}\\ b_{21}\end{bmatrix}}\underset{2\times 2}{\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}}\qquad p=1, l=2\text{不共形}$$

（ 2 ）矩阵在乘法中，一般不具有交换律，即一般的$[A][B]\neq[B][A]$。甚至当$[A]$和$[B]$均是方阵时，一般的也是$[A][B]$不等于$[B][A]$。

2.矩阵相乘

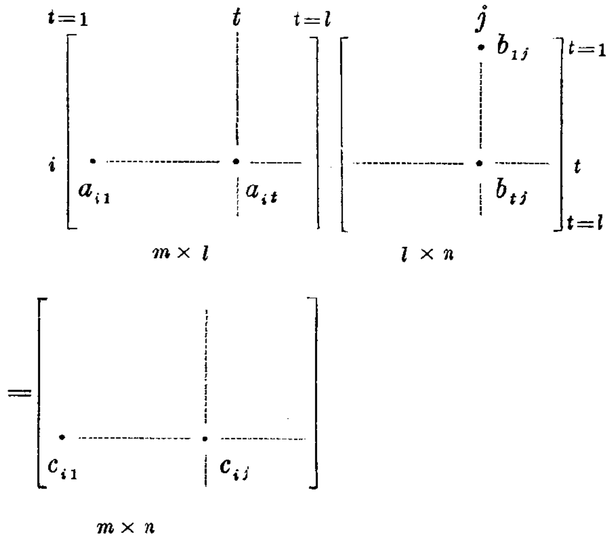
矩阵$[A][B]$的乘积矩阵$[C]$，其元素c_{ij}等于$[A]$中第i行的诸元素与$[B]$中第j列相应诸元素的乘积之和。因此，若

$$\underset{m\times l}{[A]}\ \underset{l\times n}{[B]}=\underset{m\times n}{[C]}\quad\text{共形}$$

则$[C]$的元素c_{ij}可按下式求出：

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots\cdots+a_{it}b_{tj}+\cdots+a_{il}b_{lj}$$

$$=\sum_{t=1}^{l}a_{it}b_{tj}$$



例 1

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}) \\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}) \end{bmatrix}$$

例 2 若

$$[A]=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \text{和} \ [B]=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

则

$$[A][B]=\begin{bmatrix} 11 & 13 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{而} \ [B][A]=\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 14 & 8 \end{bmatrix}$$

由上例可看出，矩阵在乘法中，一般不具有交换律，但特例除外。如：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

当两个矩阵具有$[A][B]=[B][A]$的特性时，就说矩阵$[A]$和$[B]$是可交换的。

3.矩阵连乘

矩阵连乘，例如$[A][B][C]$，其一般程序是：首先用$[B]$左乘$[C]$，然后用$[A]$左乘$[B][C]$的乘积。当然，其先决条件是$[B]$与$[C]$共形，并且$[A]$与$[B][C]$共形。

然而，若连乘的次序不被倒换的话，结合律对矩阵乘法完全适用，所以连乘中的矩阵可以取任意方便的组合。如：

$$[A][B][C]=([A][B])[C]=[A]([B][C])$$

分配律对矩阵乘法也完全适用，即：

$$[E]([A]+[B])[F]=[E][A][F]+[E][B][F]$$

就连乘而言，判别共形的规则是：对连乘的各矩阵的阶数依次加以比较，若$[A]$中的列数等于$[B]$中的行数，$[B]$中的列数等于$[C]$中的行数，等等，就是共形。例如：

$$\underset{m\times p}{[A]}\ \underset{l\times q}{[B]}\ \underset{r\times n}{[C]}=\underset{m\times n}{[D]}$$

若$p=l$和$q=r$时，即为共形，其结果阶数是$m\times n$。

例1 若

$$[A]=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\quad [B]=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\quad \{C\}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

计算$[A][B]\{C\}$的连乘积。

首先检验共形，满足共形条件。即：

$$\underset{2\times 2}{[A]}\ \underset{2\times 3}{[B]}\ \underset{3\times 1}{\{C\}}=\underset{2\times 1}{\{D\}}$$

$$[B]\{C\}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 0\end{bmatrix}$$

$$[A][B]\{C\}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 8\end{bmatrix}$$

例2