理论力学

下册

朱照宣
周起钊 编
殷金生

北京大学出版社

理 论 力 学

（下）

朱照宣 周起钊 殷金生 编

北京大学出版社

理 论 力 学（下）

北京大学出版社出版
（北京大学校内）
北 京 新 华 印 刷 厂 印 刷
新华书店北京发行所发行
850×1168毫米 32开本 14印张 356千字
1982年8月第一版 1982年8月第一次印刷
印数：40000册

统一书号：13209·52 定价：1.70元

内 容 提 要

本书前七章是基础部分，包括静力学、运动学、质点和质点系动力学；后三章是专题部分，其中包括分析力学初步。全书共配有二百多个例题，五百多道习题，并附有习题答案。

本书分上下两册出版。全书共需两学期或三学期讲完。

此书可供综合大学或理工科大学力学专业理论力学课程用作教材，也可作为高等工业院校有关专业的教学参考书。

下 册 目 录

第五章　动量定理 …… 1

5-1　外力和内力 …… 1
5-2　质点系动量定理 …… 6
5-3　质心运动定理 …… 11
5-4　冲击力及其性质 …… 17
5-5　碰撞 …… 24
5-6　变质量系统的运动 …… 30
习题 …… 37

第六章　动量矩定理 …… 44

6-1　质点系动量矩定理 …… 44
6-2　刚体定轴转动动力学 …… 51
6-3　刚体平面运动动力学 …… 62
6-4　高速对称转子近似理论 …… 69
习题 …… 74

第七章　能量定理 …… 83

7-1　功 …… 84
7-2　保守力场与势能 …… 91
7-3　动能 …… 99
7-4　动能变化定理 …… 105
7-5　能量守恒定律 …… 113
7-6　杂题十二例 …… 115
7-7　关于动力学的三个定理 …… 132
习题 …… 134

第八章　非惯性参考系中的动力学 ……155

8-1　非惯性参考系中质点动力学基本方程……155
8-2　非惯性参考系中质点系动力学基本定理……163
8-3　相对于地球的运动……174
习题 ……184

第九章　刚体动力学 ……190

9-1　刚体定点运动时的动量矩和动能……190
9-2　惯量张量和惯量矩阵……194
9-3　惯量椭球和主惯量……206
9-4　刚体定点运动的动力学方程……217
9-5　刚体一般运动的动力学方程……239
9-6　非惯性参考系中的刚体动力学……249
习题 ……255

第十章　分析力学初步 ……266

10-1　质点的拉格朗日方程 ……267
10-2　虚位移原理 ……292
10-3　达朗伯原理 ……315
10-4　拉格朗日方程及其首次积分 ……321
*10-5　位形空间和拉格朗日方程的矩阵形式 ……333
10-6　例子 ……341
10-7　稳定平衡位形附近的小振动 ……354
10-8　非完整系统 ……368
10-9　哈密顿正则方程 ……376
10-10　哈密顿原理 ……383
习题 ……399

习题答案 ……417
索引 ……434

第五章 动量定理

在 4-5 中引进了质点的动量定理、动量矩定理和动能定理。我们是从牛顿运动微分方程推导出这三个定理的，即把牛顿定律看成是基本的，而三个定理是派生的，这只是在经典力学的范围内才能做到。其实，从物理学中更一般的意义来说，情况正好相反，在某些经典力学不能应用的物理学领域中，虽然牛顿定律不成立，但是动量守恒、动量矩守恒和能量守恒作为普遍的自然规律依然成立。

由许多质点组成的一个力学系统称为**质点系**。刚体是一种特殊的质点系。原则上说，可以对系中每一个质点列出牛顿运动微分方程，解出全部联立方程，则质点系的动力学问题就全部被解决。然而，实际上这种方法既不现实，也不必要。因为，通常我们并不需要知道质点系中每一个质点的具体运动情况。研究人造卫星在其轨道上的运动时，要知道的是卫星整体的某些运动特征，例如卫星质心的运动轨迹、速度、加速度以及卫星姿态的变化规律等，不必求出卫星上每一质点的运动轨迹。即使要求的话，也只有掌握了整体的运动特征后才能进一步求出任何一点的运动规律。对于一般的质点系也有类似的情况。第五、第六和第七这三章讲的就是有关质点系（包括刚体）整体运动特征的三个物理量及其变化规律。

5-1 外力和内力

质点系中任一个质点所受的力可以分为两类：一类是质点系以外的物体对它的作用力，称为**外力**；另一类是质点系中其他质点对它的作用力，称为**内力**。这两类力对于质点系整体所起的作

用是不相同的。

一个力是“外力”还是“内力”，决定于质点系的范围。分析具体问题时，首先要明确研究对象，即明确所考虑的质点系包括哪些范围，然后才能分清外力和内力。

例5.1 飞石索。两块石头用一绳相连，将它们抛出① (图5.1)，分析外力和内力。

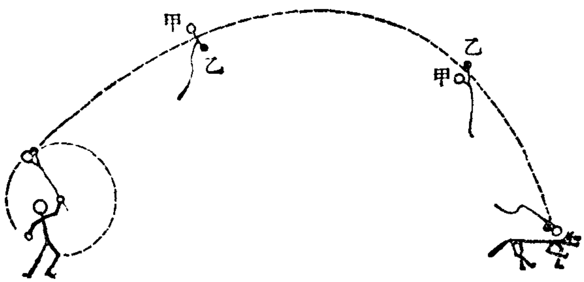


图5.1 只有两个质点的质点系

解 取石头甲为对象，它受到的外力有重力和石头乙通过绳子对它的拉力。因为在飞行中绳子可能时紧时松，所以绳子拉力有时等于零。取石头乙为对象时，情况类似。

取甲乙两石块连同不计质量的绳子作为对象。两石块之间的拉力是内力，作用在两石块上的重力是外力。▎

例5.2 太阳系。设质点系是太阳系全部，即包括太阳、各个行星、小行星、行星的各个卫星等等 (图5.2)。

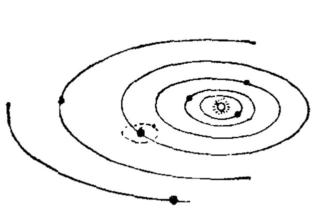


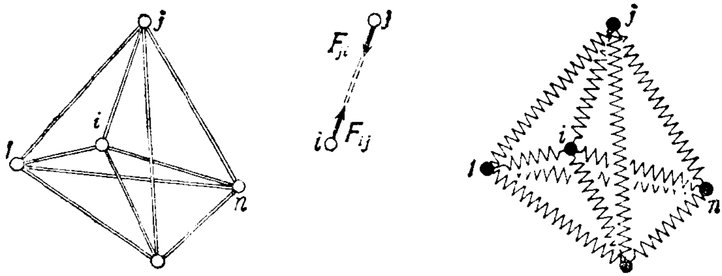
图5.2 不受外力作用的质点系

每一个天体可抽象成一个质点来处理，每两个质点之间作用有万有引力。在上一章讲开普勒问题时，对象是地球或行星，则太阳的引力是外力。对太阳系这个对象来说，系中各个星体之间的引力都是内力，太阳对地球或

① 人类在旧石器时代就用这种飞石索来打击野兽。

行星的引力也是内力。太阳系以外的恒星对它们的引力是外力。最近的恒星离开太阳系的距离也有4.5光年，它的引力可以忽略。因此太阳系可以近似地认为是一个不受外力作用的质点系，称为孤立系统。 ▌

例5.3 刚体和弹性体。刚体是任何两点之间距离保持不变的质点系。设想它由 n 个质点组成，其中每两个质点之间用一根刚性的无质量的连杆连结起来（图5.3(a)），这好象是一个空间桁架（第一章图1.56），在桁架每一个节点处有一个集中质量。



(a) 刚体 (b) 弹性体

图5.3 离散模型及内力

对于任一个质点 i，它受到的所有外力的合力用 $\boldsymbol{F}_i^{外}$ 来表示。其他质点 j （$j\neq i$）对它的作用力记作 $\boldsymbol{F}_{ij}$，这对刚体来说是内力。$\boldsymbol{F}_{ij}$ 的反作用力记作 $\boldsymbol{F}_{ji}$，它是质点 i 对质点 j 的作用力，也是内力。

假想把上面所说的刚性连杆换成弹性连杆，在某种情况下，这可以作为弹性体的离散化模型（图5.3(b)）。 ▌

刚体和弹性体离散化模型的差别在于：对刚体有

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_{ij}\cdot\boldsymbol{r}_{ij})\equiv 0,$$

其中 $\boldsymbol{r}_{ij}=\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i$，$\boldsymbol{r}_i$ 和 $\boldsymbol{r}_j$ 分别是质点 i 和 j 的向径；而弹性体则没有这样的关系。

任何一个质点系的内力有两个重要的性质。

第一，质点系全部内力的主向量等于零。设质点系中共有 n 个质点，作用在第 i 个质点上所有内力之和是

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_{ij},$$

其中当 $i=j$ 时 $\boldsymbol{F}_{ij}=0$。作用在质点系中各质点上的所有内力的主向量为

$$\boldsymbol{R}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ij} \text{ 或 } \boldsymbol{R}=\sum_{i}^{n}\sum_{i}^{n}\boldsymbol{F}_{ji},$$

根据牛顿第三定律，应有

$$\boldsymbol{F}_{ij}=-\boldsymbol{F}_{ji}, \tag{5.1}$$

所以有

$$\sum\sum\boldsymbol{F}_{ij}=-\sum\sum\boldsymbol{F}_{ji},$$

即

$$\boldsymbol{R}=-\boldsymbol{R}.$$

由此即得

$$\boldsymbol{R}=\sum\sum\boldsymbol{F}_{ij}=0. \tag{5.2}$$

这一结论也可以直接论证如下。根据牛顿第三定律，质点系中任意两点之间的相互作用力的向量和为零，因此所有内力的主向量等于零。

第二，全部内力对任一点的主矩① 等于零。任意取一固定点 O，全部内力对该点的主矩为

$$\sum\sum(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij}).$$

其中 $\boldsymbol{r}_i$ 为第 i 个质点的向径。因为

① 当质点系是刚体时，它就是第一章所说的主矩，可以进行等价性化简。当质点系不是刚体时，主矩只具有各个内力矩向量和的含义，不允许用刚体静力学中的理论进行化简。

$$\sum\sum(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij})=\sum\sum(\boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{F}_{ji}),$$

所以

$$2\sum\sum(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij})$$
$$=\sum\sum(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij})+\sum\sum(\boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{F}_{ji})。$$

根据式(5.1)得

$$2\sum\sum(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij})=\sum\sum[(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)\times\boldsymbol{F}_{ij}]。$$

在通常情况下，两点之间的作用和反作用力是通过两点间连线的，即有条件

$$\boldsymbol{r}_{ij}\times\boldsymbol{F}_{ij}=0\quad(i,j=1,2,\cdots,n;\ i\neq j)\tag{5.3}$$

其中 $\boldsymbol{r}_{ij}=\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i$，是由第 i 个质点到第 j 个质点的向量(图5.4)。

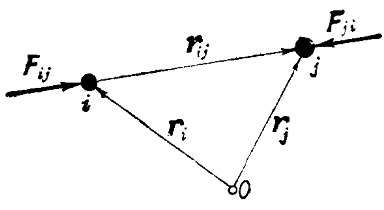


图5.4 内力主矩为零

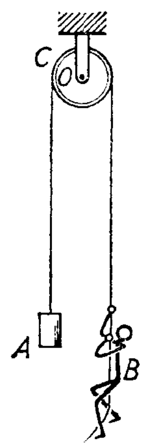


图5.5 适当选取质点系可使外力简化

当条件(5.1)和(5.3)同时被满足时，内力的主矩等于零，即

$$\sum\sum(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij})=0\tag{5.4}$$

在解决具体问题时，质点系的范围可以根据问题的需要来选定，往往在同一个问题中可能有几种选法，选得合适就可以使问题简化。例如在图5.5所示的情况中，假定绳与滑轮之间有摩擦，

而滑轮支承O是光滑的。可以将人、重物和绳子合在一起当作一个质点系；也可以将人、重物、绳子再加上滑轮合在一起当作一个质点系。显然，对于后一种选法外力比较简单。

5-2　质点系动量定理

现在把 4-5 中质点的动量定理推广到质点系。质点系中各个质点的动量之向量和，称为质点系的动量，记作 $\boldsymbol{p}$，即

$$\boldsymbol{p}=\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i.$$

对于每一个质点，有

$$\frac{d}{dt}(m_i \boldsymbol{v}_i)=\boldsymbol{F}_i^{外}+\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ij}\quad (i=1,2,\cdots,n;j\neq i).$$

将上式从 $i=1$ 到 $i=n$ 求和，得到

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i\right)=\sum_i \boldsymbol{F}_i^{外}+\sum_i\sum_j \boldsymbol{F}_{ij}.$$

上式右端第一项是作用在质点系上所有外力的主向量，记作 $\boldsymbol{R}$；第二项是内力的主向量，根据式(5.2)，它应为零。因而得出

$$\boxed{\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}=\boldsymbol{R}.}\qquad (5.5)$$

这就是**质点系的动量定理**：质点系的动量对时间的导数等于外力的主向量。可见内力不能影响质点系动量的变化。

将式(5.5)在时刻 t_1 与 t_2 之间积分，得

$$\boxed{\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{R}dt.}\qquad (5.6)$$

这是积分形式的动量定理，等号右边表示外力主向量在这一时间间隔内的冲量，它是质点动力学中式(4.14)的推广。

如果外力的主向量为零，则动量是一个常向量，这就是**动量**

守恒定理。对于孤立系统来说，外力为零，因此动量守恒。

如果外力在某一固定方向上投影的代数和为零，把这个方向取作 x 轴，则有 $R_x=\sum F_x^{外}=0$，由式(5.5)可知

$$\frac{dp_x}{dt}=0,$$

即 p_x 为常量，称为某个方向的动量守恒定理。

例5.4 太空中的拔河(图5.6)。

图5.6 甲比乙气力大，结果怎样？

宇航员甲和乙原来在宇宙空间是静止的，两人各自用力拉绳子的一端。设甲能使出的最大拉力大于乙。不计绳子质量，讨论拔河的结果。

解 如果把甲、乙连同绳子一起作为质点系，则它沒有外力，所以动量守恒，即在拔河过程中动量保持原来静止时的动量，即

$$m_{甲}v_{甲}+m_{乙}v_{乙}=0.$$

甲用力拉动乙的同时，甲自己也被乙拉动，两人相向而动且各自的速度大小与其质量成反比。甲对绳的拉力总是等于乙对绳的拉力，因而尽管甲能比乙使出更大的劲，但甲在拔河中无法使出其全部力量，它受到乙的最大拉力的限制。▌

图5.7 自行车靠什么力前进？

*** 自行车在水平路面上由静止出发开始前进(图5.7)。什么力使它有向前的速度？有人回答说，因为人对它作用一个向前的力，这种说法是否对？***

例5.5　自动楼梯(图5.8)。

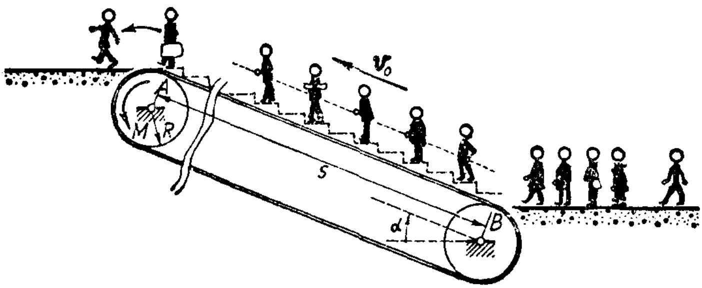


图5.8　求平均力矩 M

传动皮带段 AB 长 s，与水平夹角为 α。梯上等距离地站立 n 个体重均为 P 的乘客。乘客被带到最高点 A 时无相对速度地离开传动带。与此同时，有另一体重相同的乘客无初速地踏上传动带的 B 处。通过半径为 R 的滚轮使传动带保持等速 v_0，求滚轮上所需的平均力矩。

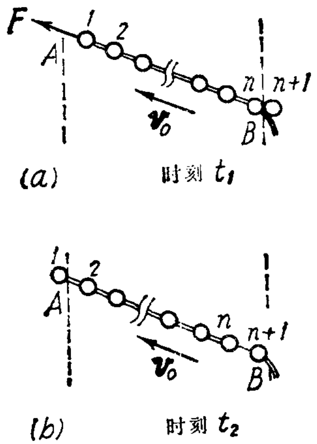


图5.9　时刻 t_1 和 t_2

解　选择在两个时刻 t_1 和 t_2 之间考虑问题。在 t_1 时有一乘客刚离开 A 点（在图5.9(a)中没有画出），在 t_2 时后面一个乘客刚离开 A 点(图5.9(b))尚未落地，同时第 $n+1$ 个乘客已踏上楼梯。在这一时间间隔内，传送带所走的距离为 s/n，它与速度的关系为

$$v_0(t_2-t_1)=s/n。$$

现以皮带段 AB 连同 $n+1$ 个乘客作为我们所考虑的质点系。

在 t_1 时，系统的动量（方向沿皮带）是 nPv_0/g；在 t_2 时，系统沿皮带运动方向的动量是 $(n+1)Pv_0/g$。由动量定理式(5.6)得

$$(n+1)\frac{P}{g}v_0-n\frac{P}{g}v_0=\int_{t_1+0}^{t_2-0}(F-nP\sin\alpha)dt,$$

其中F是滚轮对传动皮带的拉力的大小，它是时间t的函数。将F在t_1到t_2时间间隔内的平均值记作F^*，即

$$\int_{t_1+0}^{t_2-0}Fdt=F^*(t_2-t_1),$$

代入上式，解出

$$F^*=nP\left(\frac{v_0^2}{gs}+\sin\alpha\right).$$

因此，所需的平均力矩的大小为

$$M=nPR\left(\frac{v_0^2}{gs}+\sin\alpha\right).$$

这结果可以解释为，在时刻t_1梯子上有n个乘客，在时刻t_2梯子上还是n个乘客。虽然不是同样n个人，但就整个质点系来说，这一部分动量沒有发生变化。变化的是图中第$n+1$个乘客的零动量变为第1个乘客的动量Pv_0/g。这样，问题的答案就十分明显了。▎

例5.6 直角弯管的附加反力（图5.10）。设管道内有不可压缩的流体流动，流动是定常的（管内每一点处液体的速度不随时间变化）。流量[①]是Q，密度是ρ。管子截面积是A。求由于流体的流动，弯管对流体的附加反力$\boldsymbol{R}$。

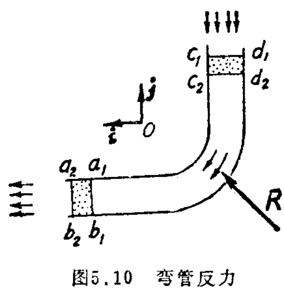


图5.10 弯管反力

解 取管子中占据$a_1b_1d_1c_1$位置那部分流体作为对象（质点系）。设在t时刻，这些流体的总动量是$\boldsymbol{p}_1$；到$t+\Delta t$时刻，这些流体占据$a_2b_2d_2c_2$位置，其动量是$\boldsymbol{p}_2$。在时间间隔Δt内，动量的变化为$\Delta\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1$。

---

① 流量是单位时间内流过的流体体积，其量纲是[长度]^3[时间]$^{-1}$。

由于流动是定常的，占据 $a_1b_1d_2c_2$ 位置的那些流体，尽管在两个时刻并不是同一些质点，但是总动量沒有改变。所以，$\Delta\boldsymbol{p}$ 实际上就是 $a_1b_1b_2a_2$ 中流体的动量与 $c_1d_1d_2c_2$ 中流体的动量之差。

$a_1b_1b_2a_2$ 和 $c_1d_1d_2c_2$ 中的流体体积都是 $Q\Delta t$，因此它们的质量都是 $\rho Q\Delta t$。因为流体是不可压缩的，所以这两部分流体的平均速度的大小都是 Q/A，但方向不同。取 $\boldsymbol{i}$ 水平向左，$\boldsymbol{j}$垂直向上，则得

$$\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1=\left[(\rho Q\Delta t)\ \frac{Q}{A}(\boldsymbol{i})\right]-\left[(\rho Q\Delta t)\ \frac{Q}{A}(-\boldsymbol{j})\right]$$

$$=\rho\frac{Q^2}{A}\Delta t(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}).$$

作用在对象上的力有重力$\boldsymbol{W}$，两截面 a_1b_1 和 c_1d_1 处流体其他部分对它的作用力 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$，以及弯管的反力$\boldsymbol{N}$（弯管周壁作用力的合力）（以上几个力在图中未画）。由动量定理有

$$\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1=(\boldsymbol{W}+\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{N})\Delta t.$$

设流体静止时弯管反力是$\boldsymbol{N}_0$，可以把流体运动时的反力$\boldsymbol{N}$分解为 $\boldsymbol{N}_0$ 和 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{N}-\boldsymbol{N}_0$ 两部分，这个$\boldsymbol{R}$是由于流动而引起的附加反力。由静止时平衡条件①得

$$\boldsymbol{W}+\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{N}_0=0,$$

与上式比较，得

$$\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{R}\Delta t,$$

由此得出

$$\boldsymbol{R}=\frac{\rho Q^2}{A}\cdot(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}).\ \blacksquare$$

例5.7 气体的压力（压强）．我们用动量定理对气体的压力作一粗糙的计算②．设气体单位体积内有 n 个分子，每个分子

---

① 假设流体运动时$\boldsymbol{P}_1$及$\boldsymbol{P}_2$和静止时一样．

② 这个例子只是为了说明动量定理而引进的．更确切的表述方法见有关的物理教科书．

的质量为m，每个分子碰到容器壁以后弹跳回来的速度大小不变。先考虑x方向的运动。假设分子的平均速度是v_x，分子的动量就是mv_x，碰撞前后动量的增量大小为$2mv_x$。在单位时间内，碰在面积为A的壁面上的分子个数是$nAv_x/2$，其中1/2是由于分子可能沿x的正负两个面碰壁而添上的。因此动量的变化率是

$$\frac{dp}{dt}=\frac{n}{2}Av_x\times 2mv_x=mnAv_x^2.$$

根据动量定理得壁面对气体的作用力是

$$F=\frac{dp}{dt}=mnAv_x^2$$

所以沿x面上的压力（压强）是

$$P_x=F/A=mnv_x^2.$$

同样可得沿y方向和z方向的压力分别为

$$P_y=mnv_y^2,\quad P_z=mnv_z^2.$$

气体的压力应与方向无关，即应有$P_x=P_y=P_z$，因而有

$$v_x^2=v_y^2=v_z^2.$$

于是速度平方为

$$v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2=3v_x^2.$$

代入得气体的压力P（对任何一个方向）为

$$P=mnv^2/3.$$

其中v^2应理解为速度平方的平均值。这是气体分子运动理论中的结果。▌

5-3 质心运动定理

按照1-5中的定义，由n个质点组成的刚性连接的质点系，其重心的向径为