

科學圖書大庫

應用之多變量統計學

本會編輯部編譯

徐氏基金會出版

世界圖書出版公司

应用之多变量统计学
徐氏基金会编辑部编译

徐氏基金会 出版
世界图书出版公司
北京朝内大街137号

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1989年12月第一版 开本：850×1168 1/32
1989年12月第一次印刷 印张：13.5

ISBN 7-5062-0483-5

定价：7.50元

经徐氏基金会允许，世界图书出版公司重印，1990。

限国内发行

序

本書是根據作者M. S. Srivastava及E. M. Carter二人分別在多倫多大學和蓋爾府大學（Guelph）為研究所一年級學生授課的講義整理而成的，主要目的在使學者學習如何將多變量的技巧應用於不同學門所得的數據中，其應用範圍如：森林學、生物學、藥學及教育學等。理論方面的細節已經儘可能的減至最少。學者若能具備矩陣符號及運算方面的知識，對於研讀本書會大有助益，因此，在矩陣方面知識不足的學者，先研讀第一章會很有幫助。當然，本書假定讀者對於單變量的基本理論已經有了充分的認識。

本書所強調的重點是在多變量統計學目前所應用的方法上。對於每一個新的主題，不但介紹問題的所在及其解決方法，同時也提供一些有效的例子，這些例子都是取自各不同的領域。每一章的結尾，皆對目前可得的一些電腦套裝軟體加以討論，再加上其他的例子。

本書採用似然比值法以檢驗所給假設的顯著性，同時介紹洛伊（Roy）聯一交原理和信賴區間的波非洛尼（Bonferoni）不等式。對於每一項統計檢驗，都將所觀測之顯著水準的公式列出。用來計算信賴區間的百分點則可見於附錄中。

第一章和第二章讓學者有機會複習矩陣理論和統計學理論，這是研讀本書所需的。第一章且對SAS矩陣過程加以討論，這是計算固有值、固有向量和廣義反矩陣所必須的過程。第三至七章的內容包括：將 t 檢驗之單變量過程推廣至多變量、變異數分析，以及多重回歸。

為使多變量過程確實有效，某些假定是必要的，第十二章對這些假定進行檢驗，包括共變量相等之檢驗與獨立性檢驗。第八至十一章由判別式的分析開

始，介紹嚴格多變量過程。為了能在總體或各組之間作判別，有關判別函數的尋找方法也在這一部分討論。由於判別而需要減縮特徵值的個數，這個過程在接下來的判別式分析一節中說明。第九至十一章講解維數簡約的過程，包括正準相關與主成分分析。正準相關是為了研究各變量的線性組合間的相關；主成分分析是用來將所測度的特徵值集合簡約成較少的成分。例如，對目的物所作的二十次測量，可就其大小及形狀而簡約成二或三個成分。因素分析也具有同樣的作用，但須先假定該項觀察具備基本的結構，這個方法通常使用於問卷調查及心理測量所得的整組反應。

每一章結束之前，都對該章主題有進一步的探討，例如第三章論及不完全數據的問題及平均值移位之檢驗。本書之主要部分為多變量統計學的應用，對研究所一或二年級程度的學生講授這部分，需要一學期的時間，若要整本書從頭到尾的講解，則需要兩個學期。

目 錄

序	I
第一章 矩陣的基本知識	1
1.1 符號與定義	1
1.2 矩陣運算	3
1.3 行列式	6
1.4 矩陣之秩	9
1.5 非奇異方陣的逆方陣	12
1.6 廣義逆矩陣	13
1.7 冪等方陣	13
1.8 固有根與固有向量	14
1.9 正定方陣與半正定方陣	15
1.10 一些不等式	16
1.11 運算過程	17
習題	25
第二章 多變量的常態分配	28
2.1 符號說明	28
2.2 多變量常態分配	29

2.3 多變量常態分配的一些性質	31
2.4 得自 $Np(\mu, \Sigma)$ 的隨機樣本	34
2.5 二次形式的一些結果	39
附錄	39
習題	40

第三章 位置的推論—Hotelling的 T^242

3.1 引言	42
3.2 單變量之檢驗問題	42
3.3 多變量的推廣	44
3.4 相關隨機變數平均值的比較	62
3.5 子向量的檢驗	62
3.6 檢查平均值改變的檢驗	67
3.7 常態機率之作圖與變換	71
3.8 觀測失誤	83
3.9 運算過程	97
習題	102

第四章 變異數的多變量分析107

4.1 引言	107
4.2 完全隨機化設計	107
4.3 隨機化完全區組設計	114
4.4 拉丁方塊設計	120
4.5 析因實驗	123
4.6 協方差分析	127
4.7 變換	132
4.8 運算過程	135

習題	142
第五章 多變量迴歸	151
5.1 引言	151
5.2 線性迴歸	151
5.3 多變量迴歸模式	156
5.4 非可加性的檢驗	173
5.5 協方差分析	174
5.6 運算過程	184
附錄	187
習題	188
第六章 成長曲線的分析	192
6.1 引言	192
6.2 多項式迴歸	199
6.3 廣義的MANOVA	205
6.4 運算過程	216
習題	219
第七章 重複量數與輪廓圖分析	224
7.1 引言	224
7.2 一個總體的重複量數	224
7.3 裂區與MANOVA設計	231
7.4 迴歸模式	233
7.5 輪廓圖分析——兩組的情況	234
7.6 丁組的一般情況	241
7.7 協變量之輪廓圖分析	248

7.8 運算過程	251
習題	255

第八章 分類與判別

8.1 引言	261
8.2 分為兩個具有共同協方差的已知常態——費雪爾的判別式函數	261
8.3 分為兩個具有已知共同協方差的常態	264
8.4 分為兩個完全未知的常態	268
8.5 分為 k 個具有共同協方差的常態	271
8.6 分為兩個具有不同協方差的常態	272
8.7 逐步過程	273
8.8 按步判別式分析：選擇變量的過程	275
8.9 正準變量	279
8.10 運算過程	281
附錄：偏 F 檢驗	285
習題	286

第九章 相關

9.1 引言	290
9.2 兩隨機變數間的相關	290
9.3 推估同類相關模式中的 ρ	293
9.4 簡單的偏相關	294
9.5 多重相關	296
9.6 正準相關	299
9.7 運算過程	303
習題	304

第十章 主成分分析	310
10.1 引言	310
10.2 依據協方差矩陣的分析	310
10.3 依據樣本相關矩陣的分析	318
10.4 多變量常態性的檢驗	321
10.5 運算過程	326
習題	330
第十一章 因素分析	338
11.1 引言	338
11.2 參數的推估	339
11.3 因數旋轉	344
11.4 因素得分	347
11.5 運算過程	347
附錄	361
習題	362
第十二章 協方差矩陣的推論	370
12.1 引言	370
12.2 $\Sigma = \Sigma_0$ 的檢驗	370
12.3 球面性的檢驗	372
12.4 同類相關模式的檢驗	375
12.5 等相關的檢驗	377
12.6 零相關的檢驗	379
12.7 協方差相等的檢驗	380
12.8 獨立性的檢驗	383

第一章 矩陣的基本知識

1.1 符號與定義

假設有 pq 個實數： $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{pq}$ ；將這些元素寫成一個長方形的陣列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix},$$

包括 p 個橫列和 q 個直行，稱為一個 $p \times q$ 矩陣，我們寫成 $A = (a_{ij}) : p \times q$ ，此處 a_{ij} 代表第 i 列第 j 行的元素。例如

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

A 是個 2×3 的矩陣，其中 $a_{11}=6$, $a_{12}=8$, $a_{13}=9$, $a_{21}=1$, $a_{22}=3$, $a_{23}=5$ 。

現在我們將本書稍後會使用到的一些特別的矩陣，加以定義。

零矩陣 (Null Matrix) 若矩陣 A 的每一元素皆為 0 ，則稱 A 為零矩陣，寫成 0_{pq} ，在不致混淆的情況下，可簡寫為 0 。例如

$$0_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

方陣 (Square Matrix) 若 $p=q$ ，則稱 A 為一個 p 階 (order) 方陣。

2 應用之多變量統計學

行向量 (Column Vector) 若 $q=1$ ，則稱 A 為 p -行向量，或簡稱 p -向量，該向量寫成

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}.$$

例如，以2, 4, 6, 8為元素的4-列向量 $\mathbf{a}'$ 寫成

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

列向量 (Row Vector) 若 $p=1$ ，則稱 A 為一個 q -列向量， A 可寫成 $\mathbf{a}' = (a_1, \dots, a_q)$

例如，以6, 8, 9為元素的3-向量寫成

$$\mathbf{a}' = (2, 4, 6, 8).$$

下三角形矩陣 (Lower Triangular Matrix) 若一方陣之主對角線以上的元素皆為0，則稱該方陣為下三角形矩陣。

例如

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 10 & 9 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

上三角形矩陣 (Upper Triangular Matrix) 若一方陣之主對角線以下的元素皆為0，則稱該方陣為上三角形矩陣。

對角方陣 (Diagonal Matrix) 若一方陣 A 之對角線以外的元素皆為0，則稱該方陣為對角方陣。若對角線上的元素為 $a_1, \dots, a_p$ ，則 A 通常寫成 $D\mathbf{a}$ 或 $D\text{diag}(a_1, \dots, a_p)$ 。

例如，當 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=4$ ，則

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

單位方陣 (Identity Matrix) 若 A 為 $p \times p$ 之對角方陣，而對角線上的 p 個元素

皆為1，則 A 稱為單位方陣，以 I_p 表示

$$I_1 = [1], \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

轉置矩陣 (Transpose Matrix) 將一個矩陣 A 的行和列互換，則所得的矩陣稱為 A 之轉置矩陣，以 A' 表示。因此，若 $A = (a_{ij}) : p \times q$ ，則 $A' = (a_{ji}) : q \times p$ 。

[例如，若]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

則

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

對稱方陣 (Symmetric Matrix) 若一方陣 $A = A'$ ，則稱 A 為對稱方陣。

對稱方陣的例子如下

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

反對稱方陣 (Skew Symmetric Matrixs) 若矩陣 $A = -A'$ ，則稱 A 為反對稱方陣。若 A 為反對稱方陣，則其對角線上之元素皆為0。

例如

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2 矩陣運算

[例如]

4 應用之多變量統計學

為了方便起見，我們通常將矩陣表成

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right),$$

此處 A_{ij} 為 A 之 $m_i \times m_j$ 子矩陣 ($i, j = 1, 2$)。將矩陣 A 的某些列和某些行刪除掉，所得到的矩陣就是 A 的一個子矩陣。將 A 表成上面的形式，稱為分塊矩陣 (*partitioned matrix*)。如果矩陣 A 可以分割成兩列 (或兩行) 以上，則寫成 $A = (A_{ij})$ ，此處 A_{ij} 表矩陣 A 的子矩陣，位於第 i 列第 j 行的分塊上。例如，若

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A_{21} = (6, 7), \quad A_{22} = (8),$$

則

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ \hline 6 & 7 & 8 \end{array} \right).$$

另外一種類型的分塊矩陣可寫成

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_2 \\ \hline A_{21} & \end{array} \right).$$

例如，若

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_{21} = (6, 7), \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix},$$

則

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ \hline 6 & 7 & 8 \end{array} \right).$$

令 $A: m \times n$ 和 $B: p \times q$ 為二矩陣，唯有當兩個矩陣同階的時候，我們才可以定義矩陣的一般加法。因此，若 $A = (a_{ij}): p \times q$ 且 $B = (b_{ij}): p \times q$ ，則此二矩陣之和定義為

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) : p \times q.$$

唯有當矩陣 A 之行數等於矩陣 B 之列數時，我們才可以定義 A 乘以 B 之一般乘法。因此，若 $A=(a_{ij}) : m \times n$ 且 $B=(b_{ij}) : n \times q$ ，則 A 乘以 B 之積（以 AB 表之）為一 $p \times q$ 矩陣，其定義為 $C=AB=(c_{ij})$ ，此處

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, q.$$

由上面的定義可以導出下面的結果：

$$(1) (A+B)' = A' + B', \quad (A+B+C)' = A' + B' + C';$$

$$(2) (AB)' = B'A', \quad (ABC)' = C'B'A';$$

$$(3) A(B_1+B_2) = AB_1 + AB_2;$$

$$(4) \sum_{\alpha=1}^k AB_{\alpha} = A(\sum_{\alpha=1}^k B_{\alpha}).$$

例 1.3.1 令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

則

$$1. A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{pmatrix};$$

$$2. A+B = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix};$$

$$3. (A+B)' = A' + B' = \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 10 & 16 \\ 12 & 18 \end{pmatrix};$$

$$4. CA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 15 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}.$$

注意此處 AC 無法定義。

現在我們再定義一些矩陣。

半單正矩陣 (Semiorthogonal Matrix) 矩陣 $A : p \times q$ 若符合 $AA' = I_p$ ($q \geq p$)，則稱為半單正矩陣。

例如

$$(0.5, 0.5, 0.5, 0.5), \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

單正方陣 (Orthogonal Matrix) 方陣 A 若符合 $AA' = I_p$, 則稱為單正方陣。

□等方陣 (Idempotent Matrix) 方陣 A 若符合 $A = A^2$, 則稱為冪等方陣。

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Kronecker積 (Kronecker Product) 令 $A: m \times n$ 和 $B: p \times q$ 為二矩陣, 則 A 與 B 之 *Kronecker* 積或直積 (direct product) 定義為 $mp \times nq$ 之矩陣 $A \otimes B = (a_{ij}B)$, 此處 $A = (a_{ij})$ 。

例如, 令

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{且} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

則

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3 行列式

方陣 $A = (a_{ij}): n \times n$ 之行列式定義如下

$$|A| \equiv \sum_{\alpha} (-1)^{N(\alpha)} \prod_{j=1}^n a_{\alpha_j j},$$

此處 Σ_{α} 表示我們需考慮數字 $1, 2, \dots, n$ 的所有不同排列方式 α , 而對所有的 α 來求和。 $N(\alpha)$ 表示某一排列 α 之反演 (inversions) 的總數, 而所謂某一排列 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 的反演是指調整兩個指標的位置, 使得較小的數字在前,

較大的數字在後。例如， $N(2,1,4,3)=1 \times N(1,2,4,3)=2 \times N(1,2,3,4)=2$ ，因為 $N(1,2,3,4)=0$ 。同理可得 $N(4,3,1,2)=1+N(3,4,1,2)=3+N(3,1,2,4)=5$ 。上面的行列式以 $|A|$ 或 $\det A$ 表示，若 $|A|$ 為實數，則以 $|A|_+$ 表示 $|A|$ 之正值。注意

$$|A'| = \sum_{\alpha} (-1)^{N(\alpha)} \prod a_{j, \alpha_j} = \sum_{\alpha} (-1)^{N(\alpha)} \prod a_{\alpha_j, j} = |A|.$$

例1.3.1

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 1 \times 1 = 9,$
2. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3.$

由 $|A|$ 之定義可直接導出下面的結果。

(1) 將第 i 列（或行）乘以常數 C ，所得之行列式值為原來的值乘以 C ，由此可知，當 A 為 $n \times n$ 矩陣，則 $|cA| = C^n |A|$ 。

(2) 將矩陣的某兩列（或行）位置互調，所得之行列式的正負號會改變。由此可知，若矩陣的某兩列（或行）元素相同，則其行列式值必為0。

(3) 將矩陣之第 j 列（或行）乘以 c 加入第 i 列（或行），則所得之行列式值不變。由此可知，若矩陣之某一列（或行）為其他列（或行）之線性組合，則行列式值為0。

(4) $|I_n| = 1$ ， $|D_n| = \prod a_i$ 。

(5) 若 $A = p \times p$ 且 $B = p \times p$ ，則 $|AB| = |A| |B|$ 。

(6) $|AA'| \geq 0$ 。

(7) $\begin{vmatrix} I & 0 \\ C & A \end{vmatrix} = |A|$ ， $\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & I \end{vmatrix} = |A|$ ， $\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = |A| |B|$ ，

此處之 A 和 B 為方陣。

(8) $|I_p + AB| = |I_q + BA|$ ，此處之 A 和 B 各為 $p \times q$ 與 $q \times p$ 矩陣。

1.3.1 方陣之餘因子

假設我們將矩陣 $A: n \times n$ 之第 i 列的第 j 行刪除掉而得到一個子矩陣 A'_{ij} , 令 $m_{ij} = |A'_{ij}|$, 則 $c_{ij}(A) = (-1)^{i+j} |A'_{ij}| = (-1)^{i+j} m_{ij}$ 稱為 a_{ij} 之餘因子, 注意

$$|A| = \sum_{j=1}^n c_{ij}(A) a_{ij} = \sum_{i=1}^n c_{ij}(A) a_{ij},$$

$$0 = \sum_{j=1}^n c_{ij} a_{kj}, \quad k \neq i, \quad 0 = \sum_{i=1}^n c_{ij} a_{ik}, \quad j \neq k.$$

例 1.3.2

令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 10 & 12 \\ 3 & 7 & 8 & 10 \\ 2 & 5 & 9 & 11 \end{pmatrix},$$

又令 $i=2$ 且 $j=3$, 則

$$A_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 11 \end{pmatrix},$$

而 $c_{23}(A) = (-1)^{2+3} |A_3^2|$

1.3.2. 矩陣之子式, 主子式, 和跡數

假設 $A_{(i_1, \dots, i_t; j_1, \dots, j_t)}^{(i_1, \dots, i_t; j_1, \dots, j_t)}$ 是由矩陣 $A: m \times n$ 之第 $i_1, i_2, \dots, i_t$ 列及第 $j_1, j_2, \dots, j_t$ 所形成的一個子矩陣, 則此子矩陣必為 A 的一個子方陣, 我們稱 $|A_{(i_1, \dots, i_t; j_1, \dots, j_t)}^{(i_1, \dots, i_t; j_1, \dots, j_t)}|$ 為一個 t 階的子式。若 $i_1=j_1, i_2=j_2, \dots, i_t=j_t$, 則稱之為 t 階的主子式 (principal minor)。

對任何方陣而言, 它的所有 t 階主子式的和就稱為該方陣 A 之第 t 個跡數, 以符號表示為 $\text{tr}_t(A) = \sum_a |A_{(i_1, \dots, i_t; i_1, \dots, i_t)}^{(i_1, \dots, i_t; i_1, \dots, i_t)}|$ 。因此, 當 $t=1$, 則可得 $\text{tr}_1 A \equiv \text{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ 。

例 1.3.3 令 A 為第 1.3.1 節中所給的 4×4 矩陣, 又令 $i_1=2, i_2=3, j_1=2, j_2=3$, 則