

灰色模糊集合引论

Introduction to
Grey Fuzzy Sets

陈大为 编著

96

68

黑龙江科学技术出版社

灰色模糊集合引论

陈大为 编著

黑龙江科学技术出版社

(黑)新登字第 2 号

内容简介

本书介绍由作者首先提出的灰色模糊集合概念。这种新的集合具有一定的理论意义与应用价值。它包括两个特例：模糊集合与灰色集合。后者对灰色系统理论具有奠基性质。

本书理论联系实际，叙述通俗易懂。其中第二章可以单独作为模糊数学入门读物，第一、三、四章可供有关研究人员和工程技术人员参考，全书可供各有关院校师生阅读。

责任编辑：杨晓杰

灰色模糊集合引论

陈大为 编著

黑龙江科学技术出版社出版

(哈尔滨市南岗区建设街 41 号)

哈尔滨市龙华印刷厂印刷

787×1092 毫米 32 开本 6.875 印张 138 千字

1994 年 4 月第 1 版 · 1994 年 4 月第 1 次印刷

印数：1—500 册 定价：8.00 元

ISBN 7 - 5388 - 2498 - 7/N · 116

前 言

自从邓聚龙教授于1982年创立有广泛应用价值的灰色系统理论以来,为该理论奠定数学基础的问题就随着摆到对灰色系统感兴趣的数学工作者面前,如何定义灰色集合是一个首要问题。作者在前人工作的启迪下,试图借助于模糊集论的一些方法,给出这样一种灰集定义:它从实际出发,有哲学和逻辑学根据,包括普通集,独立于模糊集,与邓氏灰色系统有紧密联系,简单明了,具有良好的数学性质,应用广泛。这样一来,恰好可以建立起与模糊集论平行的灰集理论。在这种情况下,作者又突发奇想,何不以事物的模糊性与灰色性往往并存的事实为出发点,提出灰色模糊集合的概念,研究灰色模糊集合的理论与应用。于是,经过长时间研究,作者得到本书所介绍的灰色模糊集合基本概念,而且前面所说的灰集恰好是它的特例,同时模糊集也是它的特例。

本书共四章:第一章是立论的哲学与逻辑学根据;第二章是有关模糊集论的准备;第三章是用“点灰度”定义的灰集理论;第四章是灰色模糊集合引论。

本书可供模糊数学和灰色数学工作者参考,也可供大专院校师生以及其他有关科技工作者和教育工作者阅读。

本书是在黑龙江大学应用数学研究所汤兵勇副所长提议下编写的,第一章初稿曾由穆毅中副教授审阅,并提出宝贵的修改意见,全书最后由汤兵勇同志审阅,在本书编写过程中还

得到了吴从炘教授、韩志刚教授等人的大力支持,在此一并致谢!

由于作者学识水平不高,加上编写时间短促,缺点和错误在所难免,希望读者批评指正。

陈大为

1994年3月于哈尔滨

目 录

第一章 三种不确定性	(1)
§ 1.1 作为事物不确定性的随机性和模糊性	(1)
§ 1.2 灰色性也是事物的不确定性	(3)
§ 1.3 从经典集合到灰色模糊集合的延拓	(6)
参考文献	(11)
第二章 模糊集合	(13)
§ 2.1 模糊集合的概念	(13)
§ 2.2 模糊集合的运算	(17)
§ 2.3 α -截集	(24)
§ 2.4 分解定理	(26)
§ 2.5 模糊度与贴近度	(29)
§ 2.6 扩张原理	(37)
§ 2.7 模糊数	(46)
§ 2.8 二型模糊集	(55)
§ 2.9 模糊关系	(63)
§ 2.10 模糊矩阵	(76)
§ 2.11 模糊聚类分析	(90)
§ 2.12 模糊模式识别	(96)
§ 2.13 模糊综合评判	(100)
§ 2.14 模糊逻辑	(108)
§ 2.15 模糊事件及其概率	(114)

参考文献.....	(120)
第三章 灰色集合	(122)
§ 3.1 灰色集合的概念	(122)
§ 3.2 灰色集合的运算	(127)
§ 3.3 粗糙灰集	(135)
§ 3.4 α -截集	(138)
§ 3.5 灰集扩张原理	(140)
§ 3.6 灰色数	(146)
§ 3.7 灰色关系	(152)
§ 3.8 灰色事件及其概率	(158)
参考文献.....	(170)
第四章 灰色模糊集合	(172)
§ 4.1 灰色模糊集合的概念	(172)
§ 4.2 灰色模糊集合的运算	(176)
§ 4.3 粗糙灰色模糊集合	(180)
§ 4.4 灰色模糊数	(183)
§ 4.5 灰色模糊关系	(190)
§ 4.6 灰色模糊综合评判	(192)
§ 4.7 灰色模糊事件及其概率	(201)
§ 4.8 层次灰色模糊集合以及“似是而非”问 题	(205)
参考文献.....	(210)
Contents	(211)

第一章 三种不确定性

§ 1.1 作为事物不确定性的 随机性和模糊性

宇宙间一切事物都是按照自身规律存在、发展和变化着的，独立于主体以外的客观事物，无所谓确定和不确定。事物的不确定性只有在人与事物发生认识关系的条件下，即只有在人的认识和实践之中才有意义。一棵大树的重量，某人的特征，已发生地震的震级，未来某天的降雨量，外星人的情况，等等。所有上述这些事物，都有其自在性和规定性，不确定性只发生在认识主体和客体的关系之中。

长期以来，一种传统观点认为，事物的确定性就是必然性，不确定性就是随机性（或然性）。自从美国控制论专家扎德（L·A·zadeh）于1965年提出模糊集合，从而开创模糊数学以来，人们才逐渐认识到事物的模糊性也是一种不确定性。然而，随机性和模糊性却是两种性质不同的不确定性。

随机性是由于条件不充分而引起的对试验结果预测的不确定性。任意投掷一颗均匀的骰子，将会出现几点，其结果是不确定的，无法预测。但若补充一个条件，把“任意投掷”改成“有意投掷”（有控制的投掷），使骰子出现预测的

点数，结果便没有了不确定性。因此，随机性不是一组原因决定一个结果的因果确定性，而是“一因多果”的因果不确定性，是因果律的亏缺。另外，随机性只存在于将要发生的事件中，是关于事物未来可能出现的多种不同结果的不确定性。一旦事件已经发生，随机性便在一定意义上不复存在。因而，随机性是不稳定的不确定性。模糊性则不然，模糊性是人的认识中关于事物自身在纵横两方面的差异中介过渡所呈现的类属和性态的界限不确定性。一个少年在长身体的过程中，身长于高、矮之间没有清晰的界限；西红柿（番茄）既是蔬菜又是水果，在蔬菜和水果之间也没有清晰的界限。因此，模糊性不是“非此即彼”没有中间情况的界限的确定性，而是“亦此亦彼”的界限的不确定性，是排中律的亏缺。模糊性既可以存在于事物的过去和现在，也可以存在于事物的未来。因此，模糊性是一种比随机性更基本、更稳定的不确定性；二者属于不同层次，模糊性比随机性更为深刻。

在现实世界中，随机性和模糊性可能分别存在于不同事物中，也可能同时存在于同一事物中。一个尚未发生的随机事件，当它自身又是一个模糊事件时，就会产生一种复合不确定性。这种不确定性既是因果律的亏缺，又是排中律的亏缺。例如，未来某天的降雨是一个随机事件，雨后经过实际测量，这场雨究竟算作大雨，中雨或小雨，却很可能是界限模糊的。又如，一颗骰子出现“5点”或“6点”，这在投掷之前是一个普通的随机事件，如果希望出现“大的点数”，那么这个希望能否实现，既是随机不确定的，又是模糊不确定的，因为“4点”和“3点”在某种程度上也可以说是“大的

点数”。诸如此类例子，举不胜举。这就是所谓随机模糊事件，简称模糊事件。

我们在分别研究作为不确定性的随机性与模糊性本质特征的同时，也应该揭示随机模糊事件这种复合不确定性的联系与规律。

§ 1.2 灰色性也是事物的不确定性

“灰色”（简称“灰”）概念是华中理工大学邓聚龙教授于1982年发表的《灰色系统的控制问题》一文中首先提出的。他说：“信息不充分、不完全称为‘灰’。信息不完全的系统，称为灰色系统或简称灰系统（Grey System）。”因此，可以说灰色性（简称为灰性）就是信息不完全性。

信息，在认识论中是指人们（主体）所认识到或所表述的事物运动的状态和方式（这是对发现者来说的），在信息论中是指人们预先不知道的知识或消息（这是对接受者来说的）。信息的这两种定义，虽然表面上不同，但实质上却并不矛盾。这是因为人们在“认识到”事物运动的状态和方式以前，这状态和方式对发现者来说是没有认识到的，正如作为信息的知识或消息对接受者来说预先不知道一样。这里“没有认识到”与“不知道”是同一的。因此，“灰色”就是“认识不完全”（即“没有完全认识到”）或“未确知”，“灰性”就是“认识的不完全性”或“未确知性”。

客观事物是复杂的，而且总是在发展变化。虽然人的感官具有高度感受能力，大脑又具有抽象、分析、综合、推理、

运算等逻辑思维能力。但是，人的认识毕竟不能洞悉事物的全部复杂性。再者，从感性认识的信息获得到理性认识的信息处理，人的认识不免要受到理论、心理、情感和习惯等因素的影响。而且人们又总是本能地利用联想，想象来填补思维的逻辑缺环，这就必然导致认识具有某种臆测成份。因此，人的每一具体认识总是不完全、不充分的，总是具有灰色性的。灰色性普遍存在于认识主体和外部客体之间，不仅存在于我们的现实生活中，而且存在于一切科学与现实的关系中。人们分析和解决实际问题时，由于受主客观条件的限制，特别是受时间和空间的限制，往往不得不在对事物认识不完全或未确知的情况下进行判断、计算、预测和决策。例如，某人要买一件物美价廉的用品，由于外行又不肯花费过多的时间和精力去在大范围内了解这种用品的价格和质量，便在有关信息不充分的情况下把用品买到手，结果由于灰性的存在，物美价廉这一要求只能是不理想地达到。另外，任何一门科学都有多方面、多层次、多关系、多变化的复杂性，科学家们的各种科学研究，总是处在不断进步与发展之中，新兴科学如此，古老的科学也是如此，它们只是发展阶段不同，永不完结，其根本原因就在于一切科学都摆脱不了灰性。

事物的灰性使得人的认识带有估计、猜想和假设等主观想象成份，从而导致认识的非唯一性和近似性。诸如，意见分歧、似是而非、关系不明、以白为黑、以少代多、性质近似，数据近似，函数近似，评判近似、预测近似、决策近似，等等。灰性使得认识缺乏充足理由，因而可以说灰性就是充足理由律的亏缺。这种亏缺有程度上的不同，而不同的“灰

度”(信息不完全程度)又必然异致不同的认识结果。所以,灰色性同随机性和模糊性一样,也是一种不确定性。日常生活中、不同的人对同一事物,由于了解程度不同,常常会得出不同的结论;即使同一个人对同一事物,随着认识程度的提高也会先后得出不同的结论。可见灰色性确是一种不确定性。灰色性这种不确定性是由信息不完全而造成的,因而可以通过信息补充来减少其不确定性。正如诺贝尔经济学奖获得者肯尼思·阿罗(kenneth J·Arrow)所说:“当存在着不确定性的时候,通常都存在普通过获得信息减少不确定性的可能性。的确可以说,信息正是不确定性的负量度。”(见本章参考文献〔18])为了达到增加其负量度目的,可以通过扩大时空来实现。中国有一句成语:“路遥知马力,日久见人心。”则形象地指出:补充信息减少不确定性,既可以通过扩大空间(即“路遥”)来实现,也可以通过延长时间(即“日久”)来实现。邓聚龙教授把通过扩大空间来补充信息的原理比喻为打靶,靶越大就越容易打中,(见参考文献〔2])并称之为“灰靶原理”。

随机性,模糊性和灰色性,虽然都是不确定性,但却各有质的不同,已如前面所述。现在应该着重指出的是,随机性和模糊性都可以在信息不完全的情况下存在。因此灰色性是一种比随机性和模糊性都更基本,更广泛的不确定性。三者属于不同层次。模糊性比随机性深一层,而灰色性又比模糊性深一层。它们既有区别又有联系,实际上往往至少有两个共存于同一事物之中,互不排斥,并行不悖。从一个班级的学生中随便叫出一名,他(她)是高个子——这是模糊随

机事件；缺乏根据而通过检验的合格品——这是灰色随机事件；在对一些练过气功的人不甚了解的情况下，判断他（她）们有没有特异功能——这是灰色模糊性事件；缺乏确切了解而选定的好干部——这是灰色模糊随机事件。所有这些实例都说明，从理论上研究模糊随机性、灰色随机性、灰色模糊性以及灰色模糊随机性，都有实际意义。因此，在数学上不仅应该研究事物的各种单一不确定性，也应该研究各种复合不确定性。

§ 1.3 从经典集合到灰色 模糊集合的延拓

集合论是现代数学的基础。集合可以表示概念，而集合的运算和变换则可以表示判断和推理。因此，集合论语言已经成为当今世界上通用的数学语言，以至有人给数学下定义说：数学就是研究集合上各种结构（关系）的科学。

按照集合论创始人康托尔（Cantor）的描述：“集合就是我们的感觉或思维所确定的、可分辨的事物汇总成一个整体的结果。”这些事物称为集合的元素，也称属于集合。以后我们把康托尔所描述的这种集合称为经典集合。

经典集合的本质可以概括为：任何性质决定具有该性质的元素的集合。这是经典合理论的一个基本原则，称为概括原则。其中所说的“性质”是指概念的内涵，而任何概念都有内涵和外延两个方面，内涵与外延是对立的统一。概念的外延也就是集合的全部元素。因此，一个集合由组成它的元

素所完全决定。这是经典集合论的又一基本原则，称为外延原则。

经典集合蕴含着这样一条规定：空间 $X = \{x\}$ 中的任一元素 x 属于集合 A 与否，二者必居其一且只居其一。因此，它只描写“非此即彼”的清晰概念，可由特征函数 $\chi_A: X \rightarrow \{0, 1\}$ 刻划。为了描写“亦此亦彼”的模糊概念，扎德将特征函数推广为隶属函数 $\mu_A: X \rightarrow [0, 1]$ ，从而给模糊事物以简洁而优美的定量刻划，成功地得到了模糊集合的定义：模糊集合是以隶属函数为表征的集合。当隶属函数只取两个极端值 0, 1 时模糊集合回归为经典集合，亦即模糊集合是经典集合的一种推广；经典集合是模糊集合的一种特例。

值得注意的是，概念内涵与外延的对立统一，决定了模糊集合不仅描写模糊概念的外延，同时也描写模糊概念的内涵。因为，在模糊意义上，外延不确定内涵必不确定；反之，亦然。例如，“青年”的概念，固然外延不确定，内涵也不确定，从哪一本词典也查不到“青年”的确切定义。同样，“秃顶”的定义各词典也不尽相同。因此，那种认为模糊集合只是以描写外延不明确而内涵明确为对象的想法是片面的。

显而易见，隶属函数是经典集合通向模糊集合的桥梁。那么，通过什么途径能把经典集合推广的“灰色集合”（简称“灰集”）呢？这是为灰色系统理论奠定数学基础需要解决的一个根本问题，同时也是为对事物的灰色性和灰色模糊性等不确定性进行数学研究需要解决的一个根本问题。

目前，关于这个问题的研究主要有：

吴和琴与王清印把灰集定义作上、下隶属函数的序偶

(见参考文献 [13]).

邓聚龙从信息论观点把灰集定义为有发展和消亡阶段的朦胧集 (见参考文献 [14]).

作者认为, 隶属函数之所以成为“桥梁”是因为它表示了一种“程度”——元素具有某种性质或隶属于某一集合的程度. 同样, 既然“灰”的基本含义是信息不完全, 那么“灰集”也应以其元素的信息不完全程度表示其特征, 这信息不完全程度即为灰度. 只有这样才能给灰色事物以定量的刻划. 同时, 灰集应该具备以下两个条件:

(1) 当每个元素的灰度减少到零或被认为是零时, 灰色集合变成经典集合;

(2) 每个元素的灰色性都与随机性、模糊相容.

因此, 为了给出灰集的定义, 应该遵循经典集合论的概括原则和外延原则, 以满足条件 (1); 而为了满足条件 (2), 则应该保持灰色性的独立性, 即不使灰色性与随机性、模糊性发生互斥关系.

于是, 可以给出灰色集合的定义如下:

设 $A = \{x | p(x)\}$ 是空间 $X = \{x\}$ 中的非空经典集合, 其中 $p(x)$ 表示“点 x 具有性质 p ”. 如果 A 中存在元素 x , $p(x)$ 是在信息不完全的情况下被认定的: (即 x 带有灰度), 那么就称该集合为灰色集合.

灰度的最小值可以规定为零, 表示信息完全. 当每一个元素的灰度为零或不考虑元素的灰度而把灰度当做是零时, 灰色集合即为经典集合. 另外, 灰度既不依赖于概率也不依赖于隶属度, 具有它自身的独立性. 因此, 这样定义的灰色

集合是经典集合在信息论意义上的推广。

下面举例说明灰集的实际背景：

例 1. 在信息不完全的情况下认定的合格产品的集合。

例 2. 圆周率 π 的数值集合。

例 3. 把进行不同次数的重复独立试验所得到的某事件的 m 个频率作为概率的近似值的集合。

例 4. 《诗经》作者的集合。

例 5. 符合哥德巴赫猜想的所有数的集合。

从概念的内涵和外延两方面来看，这些例子都表明内涵明确外延“灰”，都是“外延灰集”。就拿例 2 来说，“圆周率”概念的内涵十分明确，它是圆周长度与圆直径长度的比值，其外延是无理数 π 的值。虽然当今用电子计算机出 π 的近似值已突破 10.73 亿位大关（1990 年，日本），但是后面的数字仍然未确知，以至 π 值的集合至今是一个灰色集合。

另一方面，外延灰集之所以“灰”，又的确是因为其中有“内涵灰”的灰色元素。因此，研究灰集有时又必须从元素的内涵着手。譬如例 1，“信息不完全”归根结底是指地某些产品的某些方面和某些层次的内涵是否“合格”未确知，只要把这些元素的未确知方面通过补充信息加以“白化”，它们也就不灰了。

然而，任何概念的内涵也都有它的规定性，规定本身就是一种条件，有了条件就有在某种程度上符合此条件的元素，所有这些元素对于此条件来说也是外延。在这个意义上，一切内涵问题又都可以归结为外延问题，因此对于灰色集合只须研究外延灰集即可。

立足于实际是数学的基本原则。正如美国数学家 M·克莱因所说：“它（数学）只能建立在实用的基础上。”（见参考文献〔22〕）。在我们的现实生活中存在着大量既有灰色性又有模糊性的事物。诸如，在信息不完全情况下通过检查的优质产品，在信息不完全情况下推选出的“三好学生”，在信息不完全情况下买到的物美价廉服装，在信息不完全情况下估计的大树的重量，在信息不完全情况下预测的大雨的雨量，等等。为了给这类事物以数学描述，应该引进灰色模糊集合的概念。这种集合是一种模糊集合，但其隶属函数却是在信息不完全的情况下确定的，亦即隶属函数带有灰度。因而，可以定义如下：

如果一个模糊集合的隶属函数带有灰度，那么就称为灰色模糊集合。

显然，如此定义的集合是一种在事物的同一层次上描述其灰色性和模糊性的外延灰色模糊集合。

由于人对事物的认识是无限的，又是逐层次深入的，如果同时考虑认识对象的两个层次，那么假定浅层次集合为模糊集合，深层次集合为灰色集合，便可以在事物的两个层次上定义一种深层次灰色浅层次模糊的层次灰色模糊集合如下：

设 $\Omega = X \times Y$ 是直积空间，则称 X 中的模糊集合与 Y 中的灰色集合的直积为 Ω 中的一个“深灰浅模”的层次灰色模糊集合。

这种集合也是有实际根据的。诸如，{优质品的质量}，{半收产量预测}，{癌的发病机制}，等等，以至于 {数学}，