信号与系统原理

XINHAO YU XITONG YUANLI

时友芬 郑 捷 王持志 编译
舒贤林 审校

北京邮电学院出版社

信号与系统原理

时友芬　郑　捷　王持志　编译
舒贤林　　　　　　审校

北京邮电学院出版社

（京）新登字162号

内 容 简 介

本书是在 A.D.Poularikas 和 S.Seely 两位教授编写的《信号和系统原理》的基础上并结合我国实际情况编译而成。

本书共分七章，阐述了连续时间信号和离散时间信号，线性系统，周期信号及其频谱，傅氏变换、拉氏变换、Z 变换及其应用等，内容紧凑，取材恰当。

本书可作为电子、信息、自动控制及与《信号与系统》相关专业本科生的教材和有关科技人员的参考书。

信号与系统原理

编　译　时友芬　郑　捷　王持鑫

责任编辑　阮平生

*

北京邮电学院出版社出版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

北京邮电学院出版社印刷厂印刷

*

787×1092毫米　1/16　印张 25.5　字数 644.8 千字

1993 年 1 月第一版　1993 年 1 月第一次印刷

印数：1-5000 册

ISBN 7-5635-0097-9/TN·30　定价：6.90 元

前　言

信号与系统课程是电子、信息类各专业本科生的必修技术基础课之一。它的主要任务是研究信号与系统理论的基本概念和基本分析方法，并展示这些理论和方法的实际应用。

美国阿拉巴马大学的 A.D.Poularikas 和罗德艾兰大学的 S.Seely 在 1985 年曾合编《信号和系统》(Signals and Systems) 一书，出版后受到欢迎。1989 年这两位教授在该书的基础上又出版了《信号和系统原理》(Elements of Signals and Systems)，其主要内容与我国现行的信号与系统课程的基本要求相一致。我们参考该书并结合国内实际情况编译本书，以作为大学本科信号与系统课程的教材或教学参考书。

本书在体系结构和内容编排上有下列特点：体系方面，将连续时间系统和离散时间系统并行地加以讨论，有利于读者对比和加深理解；内容方面，力求简明扼要，不过多涉及较复杂的数学知识，避免冗长的数学推证；广泛联系应用实际，精选了众多领域的实例，如电气工程、化学、生物医学、过程控制、经济学、核物理以及其它领域的实例，增强教材的灵活性，以适应不同专业和不同类型读者的需要。

学习本课程需要有电路分析、线性代数、微分方程和积分变换等基础知识。附录中的矩阵理论是研究状态方程的工具。

本书共分七章，第一章讨论连续时间信号和离散时间信号的数学描述，及它们的周期、非周期和截断格式的表示法。第二章讨论线性系统，内容包括系统元件模型和框图表示法及卷积法在线性系统分析中的应用。第三章讨论周期信号及其频谱，接着讨论用于离散序列的离散傅氏级数。第四章讨论傅氏积分变换及其特性和应用、离散傅氏变换和快速傅氏变换及其应用。第五章讨论状态变量分析法。第六章讨论拉氏变换及其特性，并导出拉氏反变换，第七章讨论离散时间系统的Z变换分析法。

本书第一、二、六章由时友芬同志编译，第三、四、五章由郑捷同志编译，其余由王持志同志编译。全书由王持志同志整理，由舒贤林教授审校，并经黄庚年教授审阅。

限于编者水平，书中可能有大妥或错误之处，恳请指正。

编者

1991年8月

于北京邮电学院

目　录

附录 矩阵数学

1 信号及其函数表示

在描述人类的经验中，对广泛的信号的了解有实际的重要意义。信号从一处传输到另一处，为我们提供了视、听、感觉和行为的基础。在工程系统中，信号携带着信息或携带着能量。例如，信号可能是高能微波脉冲，如雷达中那样，或者高能量的，如使受控机械工具动作等，都是所必需的。它们可能是电话或无线电信号，或是数字计算机操作命令的脉冲。我们所关注的是信号，可能是事件的起因，也可能是行为的结果。

信号有各种各样的形状、幅度、时间持续期和其它的物理性能。在很多情况，信号可表示成解析式，在另一些情况，又可能只给出信号图形。信号还可以在仪器上显示，周期地被读出或者提供制作图表用的数据。

本章的目的是介绍信号的数学表示法、信号的特性及其应用，为今后的学习作些必要的准备。这些表示法随着它们是根据实验数据还是从图解说明中推导出来的，或者随着信号是周期的、非周期的或是截断的而有所不同。

1.1 信号和系统

发布新闻、广播图像、传递数据以及人们之间的通讯都是把某些消息借助一定形式的信号传递出去。消息是信号的具体内容，而信号则是消息的表现形式。

自古以来，人们寻求各种方法实现信号的传递。1901 年马可尼成功地实现了横跨大西洋的无线电通信，传输电信号的通信方式得到了广泛应用和迅速发展。现在，无线电信号的传输已能遍及全世界并通向宇宙。

一般，电信号是指随时间变化的电压或电流、电容的电荷、线圈的磁通以及空间的电磁波等等。在实际应用中，常将各物理量（如声的波动、光的强度、位移和速度等），转变成电信号，经传输后在接收端再将此信号还原成原信号。随着科学技术的不断发展，出现了对信号进行加工或变换。削弱信号中的多余内容；滤除混杂的噪声和干扰，或是将信号变换成容易分析与识别的形式，进行信号处理。信号传输与信号处理的共同理论基础是信号分析与系统分析，主要解决信号传输与信号处理方面的实际问题。所以它们既有密切联系，但又是相对独立的学科体系。

由若干相互作用和相互依赖的事物组合成为一个具有特定功能的整体称为系统。组成通信和控制系统的主要部件中包括大量的各种类型的电路。在研究一般性抽象规律时，电路可称为网络，而讨论具体的问题时又称之为电路，信号、网络与系统间有很密切的联系。信号作为待传输消息的表现形式，可以看成是运载消息的工具，网络和系统则是为传送信号或对信号进行加工处理而构成的某种组合。离开了信号，网络与系统就没有意义。系统着重于全局的问题，而网络则着重于局部，它们主要的差异是观察事物的着眼点或处理问题的角度。

由于大规模集成化技术的发展以及各种复杂系统部件的直接采用，使系统、网络、电路中的许多问题相互渗透，无法严格区分各名词间的差异。因此，系统、网络与电路等名词常常通用。本书仅限于系统分析的讨论，着重基本概念和基本分析方法，研究信号经系统传输或处理的一般规律。

1.2 信号的一些应用

在涉及信号的设计、分析、合成、检测和处理时，不得不考虑许多不同的信号，它们的幅度、形状和时间持续会显著的变化，当涉及计算机时，必须处理每秒上兆个的脉冲；当涉及雷达信号时，必须处理掩没在噪声中通常是非常微弱的反射回来的脉冲序列信号，而这种脉冲信号原来发射的强度却有兆瓦，重复频率为每秒几千。另外，心脏病专家则关心病人的心电图（心脏跳动信号）的波形及其重复速率，以便作出病情判断。

通信系统中通常碰到的信号是随时间变化的电流和电压。虽然如此，但通常许多时变电压或电流信号是从其它形式的信号转换而来的，其形式例如压力对时间、电导率对电位阱的深度,光亮度对太阳离开水平的位置以及机械部分的加速度等。适宜形式的变换器在各种转换中起着重要的作用。此外,一些信号是时间的连续函数,而另一些则是时间的离散函数。连续时间信号对电气工程师来说是比较熟悉的，对离散时间信号则略差一些。实际上，离散时间信号在很多地方都能找到，例如医院中病人每天的体温、血压和脉膊速率等提供的是离散时间数据，同样，市镇的地理分布，城市中的犯罪分布，地理区域内动物种类的分布等都是离散变化的量。

通信系统中经常接触到的最普遍的离散时间信号是连续信号抽样的结果。这个过程称为离散化，它产生一个离散数值的序列。离散化通常用模拟-数字（A/D）变换器的电子设备来实现。当连续时间数学函数键入数字计算机时，必须将函数离散化，即进入计算机的字和数据须将连续函数变成离散形式写入。第四章中介绍一个定理，这个定理就是用来指导求取合适的离散抽样数据，使能唯一地表示被离散化的连续函数。

信号常以数学方式表示为一个或多个独立变量的函数。例如，表面的热损失可以用表面温度对时间的数学关系模型表示；气压图曲线可以表示为两个空间变量——高度和位置的函数。为方便起见，目前的讨论考虑只含有一个独立变量，通常为时间的函数。

了解信号的不同类型和描述它们的各种数学方法是很重要的。只有对数学模型有深刻的了解才能明智地对信号进行分析。但必须懂得，描述已知信号波形存在着不只一种方法，究竟选择什么方法取决于信号以及进行分析所要求的形式。例如，假定所考虑的信号是一个重复的方波，则对该信号的全周期无法用一个直接的数学上的连续函数来正确表示。但可对该信号在一个周期内用分段连续函数来描述。求取其近似函数有几种不同的方法，一种方法是选择一个与方波的幅度和位移相适合的阶跃函数序列来代替分段连续函数。虽然阶跃函数由于其不连续性不是解析的，但它的波形能很方便地处理*。第二种方法是函数在设计范围内用多项式近似表示，它可用内插公式得到。第三种方法是用所谓的正交函数级数表示，最普通的级数表示法是众所周知的三角正弦和余弦函数——即傅氏级数展开。也可以利用其它更复杂函数的正交集表示。

* 如果函数及其所有导数在区域内存在，则该函数在区域内是解析的或正则的。

后面在系统中要处理的大部分信号，无论它们是正在产生或已经产生的都会受到噪声的损害。从一般意义上说，噪声是叠加在原始信号上并使信号产生失真或降质的任一附加特性。通常噪声是一个令人棘手的问题。人们在工作中已经做了并且继续在做大量的尝试，以减少或消除这些噪声。已有必要，干扰信号可以作为噪声形式谨慎地引入到某些特殊的应用中。故意引入干扰信号的例子如在雷达中的电子对抗、仅对交费观众服务的人造卫星电视节目中的扰频以及为了保密在电话信息中引入加密措施等。加密是应用特殊码保证通信机密的一种手段。在这种通信系统中，一端的信号（话音）混合了随机化的"一次"密钥（引入编码表），在另一端用合适的解码电路恢复信号。

通常信号不能直接传输超长距离。为了传输，必须用"骑"在另一信号上的方法加以变形或加工。典型的例子是在无线电波上传输语言或音乐，或在另一些场合，将一个特殊的信号转换成完全不同的形式，例如我们大都熟悉的，将文字和数字转换成点和划的莫尔斯码。

当今，人们已进一步研究信号，并能对信号作定量描述和测量信号所包含的信息。为了发展这些理论，建立如图 1.1 所示的通信系统的概念性模型。为简化讨论，把一个人当作传递消息的信息源，信息源的输出称为消息，即人在说些什么。发送机是一种设备，将消息变换成允许传输的信号。电话话筒就是发送机。它将话音消息转换成变化的电流，使之在电话线上传输。通信信道是信号传输过程的媒介，两部电话机之间的电线就构成信道，无线电传输中的发射天线和接收天线之间的空间也是信道。

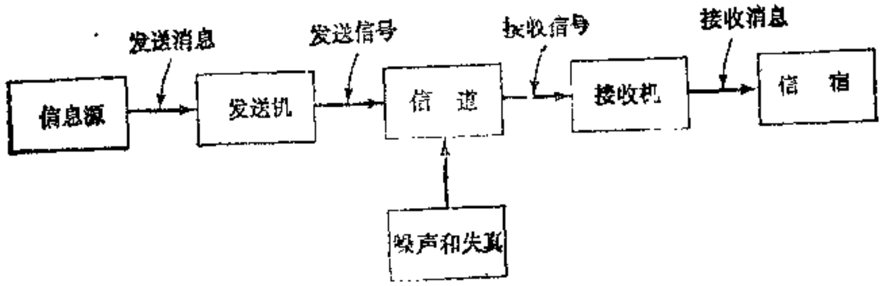


图1.1 一般通信系统

由于形成通信系统的元件特性关系，信号常常发生失真。失真是信号在系统中运行的一种效果，而噪声体现了信号的不可预测的干扰（变化）。为了真正实用，显然，信道的输出即接收到的信号必须和原来的信号基本类似，例如，接收到的消息亦即在耳机中所听到的是对端发出的声音。信宿是通信系统的最后部分，它可以是系统原先指定的有关人或设备。

1.3 信号的信息

如上所述，信号的信息内容可以用数学式来定量。在本节准备研究一些基本概念。注意，当我们谈论有关消息的信息内容时，它必须是按照全部的实验形式产生的消息，而不是任何个别的消息。为了能定量地给出信息的定义，我们不但必须考虑传输中的个别的消息，还须考虑包含该个别的所有消息的集合。

1948年仙农首先采用综合数学来尝试处理消息中的总信息量及其结果。这个工作以及后

来由他提出的论文，奠定了现在称为信息论的新学科的基础。在这个理论中，一个实验的两种等可能性的结果被用来定义为信息单位，称为1比特（b）*，等可能性和概率统计概念有关。以下的讨论只限于离散事件。一个特定事件发生的概率等于事件出现的次数与重复该试验次数之比。有理由认为：当试验的次数变得很大时，比率将趋于某一极限。例如，投掷一个均匀无偏的硬币一百次，将发现正面和反面向上的总数各接近五十。由此可以得出投掷硬币出现正面或反面的概率是0.5的结论。对于涉及多于两种可能的状态，可以得出每个事件的概率为P_i。

在各种事件彼此互不影响的假设条件下，表示信息量或信息内容的数学关系，有下列表达式

$$H = -p_1\log_2 p_1 - p_2\log_2 p_2 - \cdots - p_n\log_2 p_n$$
$$= -\sum_{i=1}^{n} p_i\log_2 p_i \quad \text{比特／符号（或消息）} \tag{1.1}$$

这里，$\log_2$表示以2为底的对数，且

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1 \tag{1.2}$$

$-\log_2 p_i$项可以当作每个事件的权或信息量。例如，假设邻居刚生了一个婴儿，问这个婴儿是男孩还是女孩？回答——是男孩——则给出一个明确的信息量——即$-\log\frac{1}{2} = \log 2 = 1$比特，这里假定男孩或女孩的可能性是相等的，这样先验概率是1/2。

例1.1 进行硬币投掷试验，求信息量。

解： 对于一个均匀无偏的硬币，可以写出

p_1=正面出现的概率=0.5

p_2=反面出现的概率=0.5

由式（1.1），

$$H = -0.5\log_2 0.5 - 0.5\log_2 0.5$$
$$= -\log_2 0.5 = \log_2 2 = 1\,\text{b} \tag{1.3}$$

如果是一个非均匀有偏的硬币，概率分别为$p_1=0.8$和$p_2=0.2$，则$H=0.721\,\text{b}$。

关于事件消息的表达式（1.1）的另一种意义是：如果p_i表示第i次基本消息发生的概率，则$-\sum_i p_i\log p_i$代表所有i个$p_i\log p_i$值的总和，其中n是基本消息的总数。假设在进行试验的任何时间，研究的事件一定发生。例如，我们拿起电话机总是听到“你好”的词是一个必然事件，即$p=1$，则$H=-\log_2 1=0$。这个试验的结果是既定的结论，这一结论所带来的信息是零。另一个例子，考虑已有六个男孩的家庭的第七个孩子将诞生，预测下一个孩子还是男孩，但医生的报告却说这个新婴儿是女婴，这个信息就比是男婴的信息要多。可见，事件的概率越小，其消息的信息量越大。

在信息论中，H代表熵。和热力学中相似，信息论中熵是随机性的或不可预测性的度量。如果由1和0构成的声流，若给定比特的熵是1b，过去的全部声流已知，则下一个比特是1或0的概率是相等的。

对于数据符号流，通常H以每个字符熵计算，即是传输一个符号（在此之前的一些符号

* 术语比特有两种意义，一是信息单位，二是数字系统中用来表示二进制的数位。

是已知的，已经给出）所必需的平均最小比特数。熵率和比特率的对比是很直观的。考虑9600 b/s的数据传输，它由每秒2400个离散信号事件实现，即每个离散信号具有4 b（按16个不同幅度一相位组合编码）。将每秒1个离散信号事件称为1波特，这样，现在的情况就是2400波特。考察一下字母数字编码数据，比如10 b。其中第一个比特是空的，其后七个比特是信息，再下一个比特是极性指示，最后的比特是标记。在信息源，每10个比特中有3个具有0熵，如果所有符号是等概率的，则对于一个通过1000 b/s的信道，

$$\text{熵率} = \frac{7}{10}\ \text{千波特}$$

如果源是英文文本，每个字母的概率不同，则信道波特数较其比特率的一半还要小（见习题2）

信息定量是很有用的，一个有趣且重要的例子是通过光纤信息的传输。已作过估算，在理想条件下通过一根单模光纤可以传送100 Gb/s = 10^{11} b/s的数据速率。这个数值表示什么含意呢？其值可以认为是一本书的符号的信息量。假定每个字的字母或空格在传输中相等机会地出现（其实这个假定不是真的，见习题2），在这种情况下，每个字母或空格需 $-\log_2(1/27) = 4.76$ b。因为书的每一行包括空格在内大约有60个字母，每一页大约40行，因此一本500页的书含有 $60\times 40\times 500 = 1.2\times 10^6$ 个字母和空格。经过光纤传输这本书需要 $1.2\times 10^6\times 4.76 = 5.71\times 10^6$ b；因此细小的理想的光纤能传输 $10^{11}/(5.71\times 10^6) = 1.75\times 10^4$ 本书/s。实际上由于许多因素，实际的数据速率要低得多。

更准确地说，当光纤通信技术在1977年首次公开表演时，一个1.5 Mb/s系统应用多模光纤和AlGaAs/GaAs激光源在0.85 μm波段传输电话业务，其中继距离在10 km以下。AT&T TAT-8跨大西洋光缆应用1.3 μm单频激光二极管和单模光纤以296Mb/s的速率同时传输32000路双向数字电话电路（或等效的数据、话音和视频的组合），其电－光中继器之间的距离大于35 km。最近，光纤特性有惊人的发展，使用单模光纤和产生1.55 μm波长的InGaAsP/InP激光源，在传输1 Gb/s数据速率时，中继器之间的距离超过120 km。1984年几个长距离载波采用单模传输系统，工作速度高于400 Mb/s（同时传送600路64kb/s的话音电路），其中继器间距离超过25 km。

目前，光纤通信实际的数据速率受许多因素限制，这些因素包括光纤的衰减特性（下界由瑞利散射引起）和光纤的色失真而引起的脉冲畸变等。这个问题的产生是由于脉冲注入激光二极管时，激光器的折射率变化引起激光波长的改变。这样，由于光纤的色散，——不同波长的光在光纤中传输的速度不同——一个对所有波长都定位的脉冲将遭受涂抹。在很高的比特率时（大于1 Gb/s），此脉冲涂抹严重地限制了所能达到的比特速率和距离乘积。

1.4 信号的函数表示

周期连续时间信号

在我们的研究中，遇到的最基本的周期连续时间函数是三角正弦函数，如图1.2所示。此波形之所以重要，是因为任一周期信号均可由仔细挑选出来的正弦和余弦波形的和来逼近。用正弦函数和余弦函数相加来描述一般的周期函数的思想始于巴比伦人，他们在预测天文事件时应用了这一类思想。18世纪，欧拉发现了振动的弦是作正弦波运动。半个世纪之后，傅

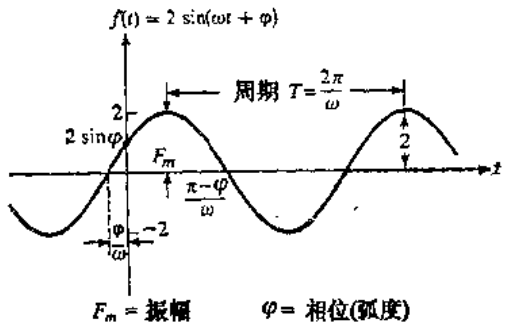


图1.2 正弦函数

里叶提出任一周期信号可用无限的正弦、余弦函数的和来表示，虽然每一函数各有不同，但却是整数倍关系的频率。这一表示法对于非周期函数也是正确的，这种情况下会涉及到连续频率的问题，这将在后面的章节中详细讨论。

有时，将构成一个复杂信号的频率中某些频率消除，这在实际上会引起不良的影响。电话交谈就是我们最熟悉的一个例子。为了最佳利用线路的传输容量，电话公司在同一线路上传输许多声音通道。为了最佳选取使用电缆线的数目，他们不得不把每个声道的最高频率（或带宽）限制为 4000 Hz 。由于限制了带宽，以致有时不能识别所熟悉的人在线路的另一端发出的声音。

当我们想要购买一个高保真系统的放大器时，带宽就是一个重要的问题。实质上，这种放大器会在标定的范围内再现所有频率而没有衰减。但由于相位随频率变化，在频率范围内也会产生失真。

正弦波形是周期连续函数。任意函数 $f(t)$，如果下式成立，则它就是周期为 T 的周期函数。

$$f(t\pm T)=f(t) \tag{1.4}$$

一个周期性非正弦函数（方波）如图 1.3(a) 所示，一些由不同的乐器产生的周期波形如图 1.3(b) 所示。

通常，信号是时间的实函数，因为它们表示物理现象的结果。然而，就数学的方便性来说，把正弦函数表示为时间复值函数（称之为复信号）的分量是很有用的。一种重要的复信号是指数函数 $e^{j\omega t}$，将指数函数 e^x 展开成麦克劳伦幂级数，则

$$e^x=1+x+x^2/2!+x^3/3!+\cdots,$$

将 x 写为 $j\omega t$，则有

$$e^{j\omega t}=1+j\omega t+\frac{(j\omega t)^2}{2!}+\cdots+\frac{(j\omega t)^n}{n!}+\cdots$$

$$=\left[1-\frac{(\omega t)^2}{2!}+\frac{(\omega t)^4}{4!}-\cdots\right]+j\left[\omega t-\frac{(\omega t)^3}{3!}+\frac{(\omega t)^5}{5!}-\cdots\right] \tag{1.5}$$

这个表达式的实部和虚部分别等于 $\cos\omega t$ 和 $\sin\omega t$，则有

$$e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t \tag{1.6}$$

如果式（1.6）中的 j 用 $-j$ 代替，可得

$$e^{-j\omega t}=\cos\omega t-j\sin\omega t \tag{1.7}$$

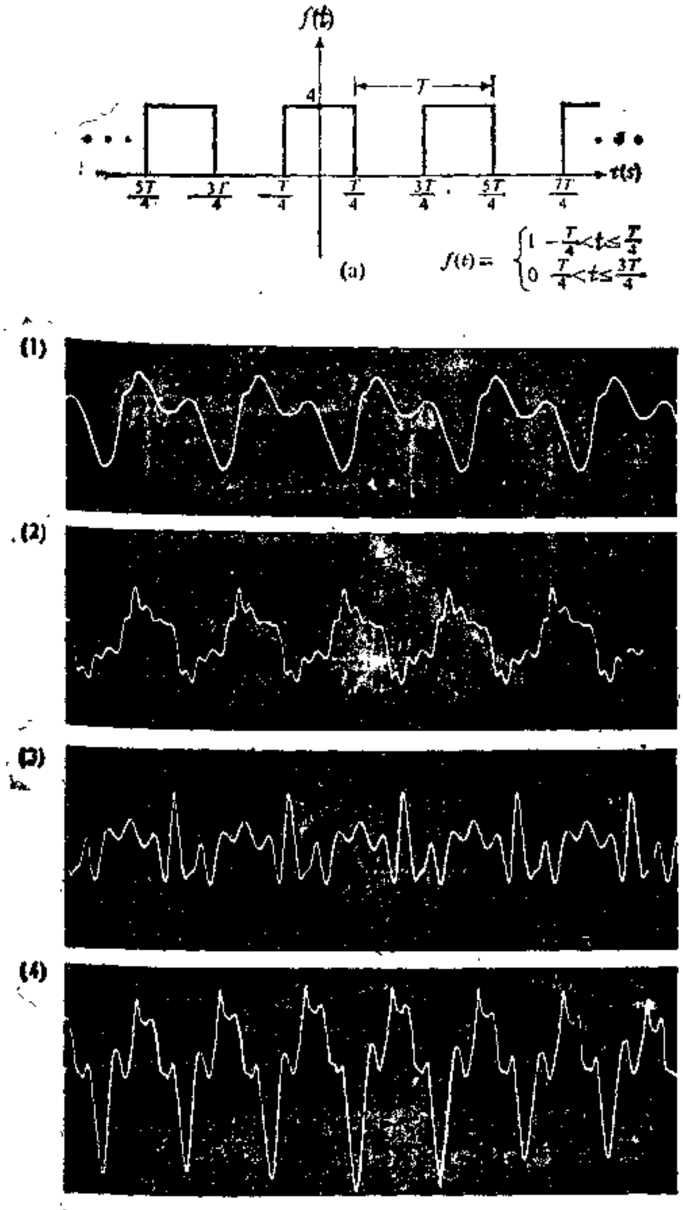
将式（1.6）和式（1.7）结合在一起，便得到欧拉公式

$$\cos\omega t=\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}\qquad \sin\omega t=\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j} \tag{1.8}$$

还可以把式（1.6）写成

$$\cos\omega t=\mathrm{Re}(e^{j\omega t})\text{和}\sin\omega t=\mathrm{Im}(e^{j\omega t})$$

其中 Re 和 Im 分别表示实部和虚部这字眼。注意这里的虚部也是实型的。



(b)

(a) 方波，(b) (1) 长笛波，(2) 单簧管波，
(3) 双簧管波，(4) 萨克管波

图 1.3 连续周期波形

周期离散时间信号

将连续信号转换成等效的离散形式非常重要，在后面将详细地研究。这里，只考虑典型离散信号的某些特性。图 1.4 给出了几种离散信号。图中，t_k表示离散时间，$f(t_k)$ 表示在某一特定时间 t_k 上的函数 $f(t)$ 的值，因为 $f(t)$ 只在离散时间 t_k 上有定义，为方便起见，用 $f(k)$ 代替 $f(t_k)$，把它作为 t_k 时刻的函数值。

周期离散时间信号的定义是

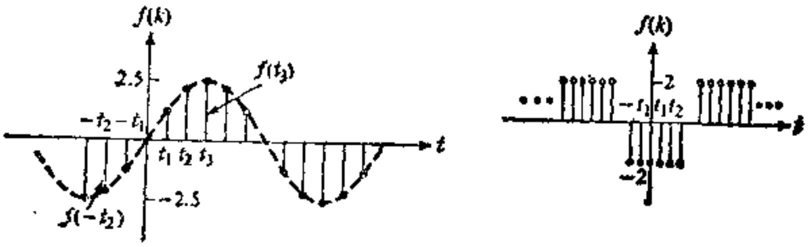


图 1.4 典型的离散周期信号

$$f(k) = f(k + nT) \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{1.9}$$

式中T是函数的周期。一个余弦离散函数可以写为

$$f(k) = \cos k(2\pi/N)n = \cos k\omega_s \tag{1.10a}$$

式中 $\omega_s = 2\pi n/N$ 。上式还可以写为如下形式

$$f(k) = \mathrm{Re}\{e^{jk\omega_s}\} \tag{1.10b}$$

其中 k、n 和N是整数，由于 $f(k)$ 是周期的，所以对每个 n 和N必须有

$$\exp\left(jk\frac{2\pi}{N}n\right) = \exp\left\{j(k + N_0)\frac{2\pi}{N}n\right\} = [\exp(jk\omega_s)]$$

$$\exp\left\{j\frac{2\pi}{N}n\frac{N}{\gcd(n, N)}\right\} = \exp(jk\omega_s) \tag{1.11}$$

式中N_0是基本周期，它等于N除以 n 和N的最大公约数(gcd)，即

$$N_0 = \text{基本周期} = \frac{N}{\gcd(n, N)} \tag{1.12}$$

从以上推导我们得出在频率 ω_s 的 2π 整数倍上，函数 $\exp(jk\omega_s)$ 的值是一样的。所以对波形进行完整的描述，只需考虑在 $0 \leqslant \omega_s \leqslant 2\pi$ 或 $-\pi \leqslant \omega_s \leqslant \pi$ 区间选择 ω_s 就可以了。若 n 和N不存在最大公约数，则该离散指数函数不是周期的。

非周期连续信号

这部分将介绍一些描述特殊类型信号的特殊函数，这些函数多数具有可以直接或间接地用来描述解决工程问题的其它函数的特性，就这一点讲，只介绍几个信号及其数学描述。

1. 单位阶跃函数

在分析研究中，单位阶跃函数是一个很重要的函数，它有很多的实际应用。注意，阶跃函数在它作用以后是连续的，而在作用瞬间是不连续的，因此数学上阶跃函数不是一个正规函数，如图 1.5 所示。举一个人人皆知的阶跃函数的例子：当用汽车钥匙启动汽车时，实际

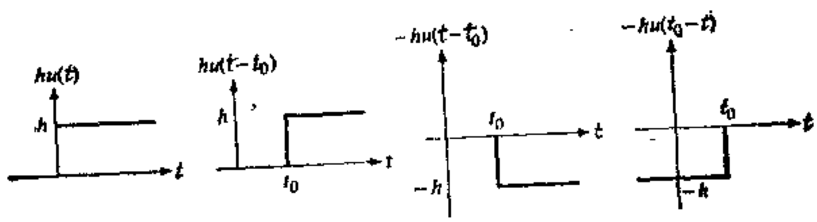


图 1.5 阶跃函数和它的某些位移和倒置形式

上是引进一个阶跃电压函数（蓄电池电压）来驱动马达。同样，从某一时刻 t 开始对一个物体施加一个恒力也可用阶跃函数来描述。

单位阶跃函数由下面关系式定义

$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases} \quad 或 \quad u(t-t_0)=\begin{cases}1 & t-t_0>0\\ 0 & t-t_0<0\end{cases} \tag{1.13}$$

从以上定义可以很明显地看出，当自变量为正时，单位阶跃函数值为 1；当自变量为负时，函数值为零；在 $t=0$ 时，函数无定义，但我们发现这一点对我们研究问题并无影响。图1.5画出了高度为 h 的阶跃函数和它的一些移位形式。

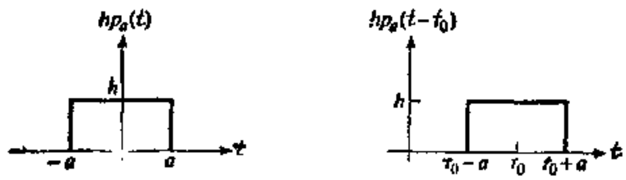


图 1.6 矩形脉冲函数

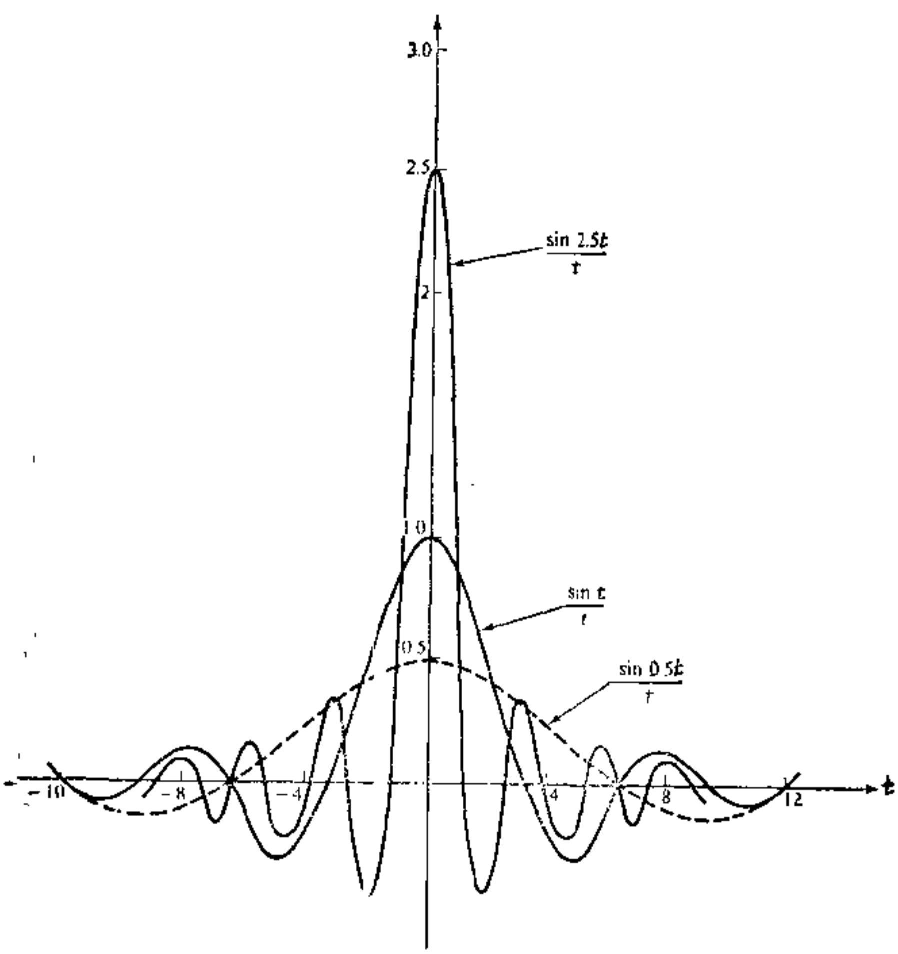


图 1.7 三种不同 a 值的 sinc 图形

2. 矩形脉冲函数

脉冲函数是由电路中恒定电压源的开-关切换操作产生的。这种函数波形有很多实际用途。例如，它的窄脉冲可用来调制雷达设备中的发射机；又因它是重复时间信号（时钟脉冲）的波形，可用来控制任何数字计算机的全部操作。

图 1.6 给出了高度为 h 的矩形脉冲函数及其移位形式。它的数学表达式是从相应的阶跃函数导出的，脉冲函数定义为

$$p_a(t)=[u(t+a)-u(t-a)]=\begin{cases}0 & |t|>a\\ 1 & |t|<a\end{cases}$$

$$\begin{aligned}p_a(t-t_0)&=[u(t-t_0+a)-u(t-t_0-a)]\\&=\begin{cases}0 & |t-t_0|>a\\ 1 & |t-t_0|<a\end{cases}\end{aligned}\tag{1.14}$$

3. sinc 函数

sinc（抽样）函数对特殊函数的再现起很重要的作用。这种函数作为 W 的函数，也表示脉冲函数的频率成分。这将在后面的章节中学习。sinc 函数由下面的表达式定义

$$\mathrm{sinc}_a(t)=\frac{\sin at}{t}\qquad -\infty<t<\infty\tag{1.15}$$

图 1.7 给出了三种不同 a 值的sinc 图形。

非周期离散信号

1. delta 函数

delta 函数 $\delta(t)$ 也叫做冲激函数或狄拉克△函数，在信号分析中占有重要位置。很多物理现象如点源、点电荷、结构上的集中载荷及在很短时间内电压或电流的作用等都可典型化为 delta 函数。delta 函数有很特殊的性质，它仅存在于 t_0 时刻，其表达式如下：

$$\delta(t-t_0)=0\quad t\neq t_0\tag{1.16a}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}f(t)\delta(t-t_0)\,dt=f(t_0)\quad t_1<t_0<t_2\tag{1.16b}$$

由式（1.16）可知，delta 函数只在 $t=t_0$ 时存在（幅角为零）。另外，上式还表明了冲激函数能够用来从函数 $f(t)$ 中提取存在于 t_0 时刻的具体值 $f(t_0)$，其中 $f(t)$ 在 t_0 时是连续的。图 1.8 示出了若干个不同的 delta 函数，图 1.8(b) 用图解法说明式（1.16b）。要注意，delta函数的定义是不能以函数的形式表示出来的，但能够用积分表示它的特性。尽管 delta 函数不

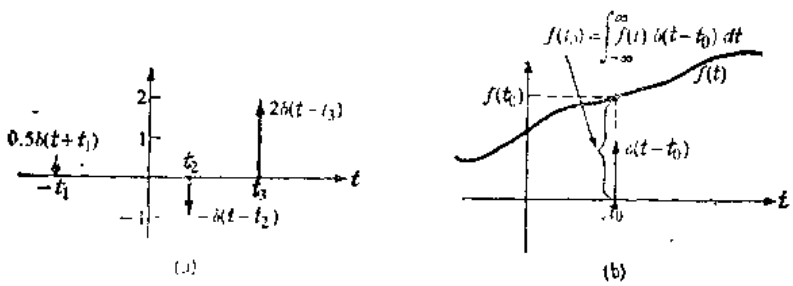


图 1.8 (a) 几个 delta 函数的表示；
(b) 一个性能良好的函数和 delta 函数相乘效果的图解说明。