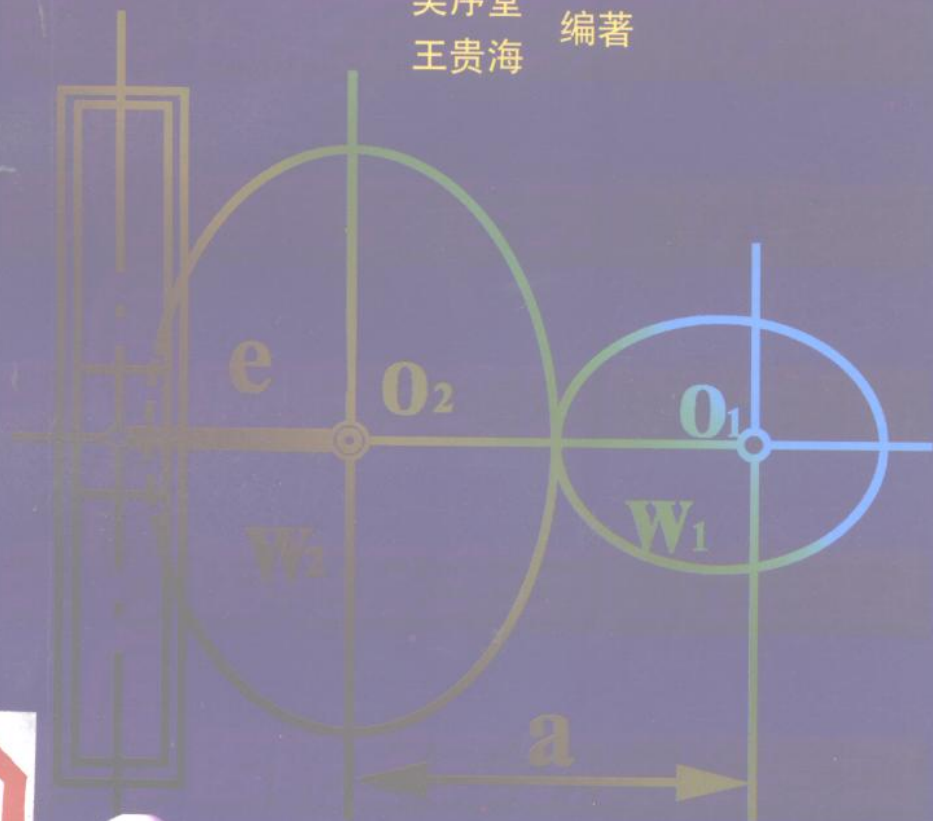


非圆齿轮及非匀速比传动

吴序堂 编著
王贵海



机械工业出版社

非圆齿轮及非匀速比传动

本书是在总结国内外先进经验和技术的基础上编著而成的。书中全面系统地介绍了非圆齿轮的啮合原理、设计计算方法、先进制造工艺技术、工业应用实例；详细讨论了非匀速比传动的各种问题。全书共分七章，分别为非圆齿轮的节曲线、非圆齿轮的设计、非圆齿轮轮系、非圆齿轮及非匀速比传动的啮合原理、非圆齿轮及非匀速传动机构的应用、非圆链轮及非圆带轮、非圆齿轮的加工。

本书内容先进、科学、实用，可供从事非圆齿轮设计、研究、制造和应用的工程技术人员及有关专业的大专院校师生学习和参考。

DW02 / 27
图书在版编目 (CIP) 数据

非圆齿轮及非匀速比传动/吴序堂, 王贵海编著. —北京: 机械工业出版社, 1997.8

ISBN 7-111-05777-5

I. 非… II. ①吴… ②王… III. 非圆齿轮-齿轮传动
IV. TH132.424

中国版本图书馆CIP数据核字 (97) 第12310号

出版人: 马九荣 (北京市百万庄南街1号 邮政编码100037)
责任编辑: 蒋有彩 版式设计: 王颖 责任校对: 杨兴祥
封面设计: 范如玉 责任印制: 路琳
机械工业出版社印刷厂印刷 · 新华书店北京发行所发行
1997年10月第1版第1次印刷

850mm×1168mm^{1/32} · 11.125印张 · 289千字

0 001—4 000册

定价: 20.00元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

前 言

非圆齿轮是用来传递两轴间非匀速运动的。它的节曲线形状是按运动要求专门设计的，和其他能得到非匀速比传动的机构（如凸轮、连杆等）相比，具有明显的特点，如非圆齿轮副可以精确地按要求的运动关系设计和制造，运动精度高；节曲线封闭的非圆齿轮副可以单向连续地转动，获得周期性的变速比运动；齿轮副的结构紧凑、刚性好、传动比较平稳，容易实现动平衡等。

非圆齿轮传动在本世纪 30 年代就已出现。到 50 年代，原苏联的学者 Ф. Л. Литвин 在他的专著^[42]中，就当时的技术水平，对非圆齿轮作了比较系统和完整的论述。可是，非圆齿轮却长期没有得到广泛的应用，有关资料也很少。形成这种局面的原因，主要是非圆齿轮副的设计计算比较复杂，制造也很困难。例如，只要看一下文献 [42] 中那些用机械改装的机床，或用成形法加工非圆齿轮的方法，就可以知道，它的生产率 and 加工精度低、通用性差、成本高。这些困难都使工程技术人员望而却步，不敢问津。

自从 70 年代计算机技术及数控技术日益发展，并且深入应用到机器设计、制造领域中之后，这种情况发生了很大的变化。通过 CAD/CAM 技术，过去视为畏途的非圆齿轮设计、制造，现在显得简单容易多了，非圆齿轮也步入了一个新的实用化的时期。这些年来，它的具体应用愈来愈多，对它的研究也日益增加，以至有的文献把这种情况称为非圆齿轮的“再发明”^[48]。不仅如此，近年来非圆传动已经逐渐从单对齿轮副发展到各种轮系，从齿轮扩展到带、链等传动形式，形成了一个内容丰富的非匀速比传动领域。

作者多年来从事非圆传动的研究和设计制造，深感目前这方面的文献零乱分散，没有一本系统地反映这一领域新成果的书，使

有志从事这项工作的人不知从何入手。为此，我们编写了本书，以便系统地论述非圆传动及非匀速传动的基本理论及近期发展情况。

全书分为七章。第1、2章分别讨论非圆齿轮节曲线的计算及非圆齿轮的设计方法。这是非圆齿轮的理论基础。第3章讨论各种非圆齿轮轮系，阐明这种轮系可以使输出轴实现摆动、间歇运动等普通圆齿轮轮系无法实现的运动。其中还对当前这方面的研究热门：中心距可变、不可变的非圆行星传动作了详细的讨论。第4章讨论了非圆传动的啮合原理，包括共轭齿廓的计算、曲率关系及滑动率等。还讨论了啮合原理在其他非匀速比运动机构（主要是各种凸轮机构）中的应用。这也是一个时期来国内研究得较多的一个方向。第5章广泛论述了非圆齿轮的一些工程应用，其中有在工艺上（加工等螺旋角锥形立铣刀、凸轮轴变速磨削）、设备上（滚筒式飞剪机、轮式步行机、汽车刮水器、变传动比汽车转向器）、液压元件上（偏心齿轮泵）的各种应用，还有非圆齿轮和其他机构的组合及它在几种纺织机械中的应用等。第6章讨论非圆链轮及非圆带轮。它们可以传递距离较大的两轴线间的非匀速比运动。除了它们的节曲线计算原理外，还介绍了实际应用，特别是在自行车中的应用。第7章讨论非圆齿轮的制造问题，重点是数控插齿和滚齿加工的工艺参数计算方法。

本书的特点：①尽量全面地反映非圆齿轮及非匀速比传动领域内的新成果，包括我们近几年的研究成果，同时也包含了必要的基本理论，并力求叙述得深入浅出，使一般的技术人员也能读得懂。②广泛介绍了这个领域的各种实际应用，内容涉及重工、液压、轻纺、汽车以及工艺、装备等各个方面。由此可以了解非圆齿轮及非匀速比传动当前的发展情况并扩展科技人员的思路。③实际的算例比较多，文中的公式尽量推导成明显而易于计算的形式，并对一些重要的实例作了计算，列出了简单的图表，避免过去一些论述啮合理论的书中光有理论公式，读者看了仍摸不着头脑，不会应用的缺点。

总之，我们希望这本书能为从事机械传动的科研和技术人员所接受，特别是对于具体从事机械设计工作的同志，读了本书以后，在实际工作中遇到非匀速比运动问题时，能够把非圆齿轮作为一个重要的结构选择方案，并作深入的分析。

本书承北京联合大学纺织工程学院雷光教授和西安理工大学阮忠唐教授仔细审阅，提出了不少宝贵的修改建议。本书的部分计算工作，由第二炮兵工程学院刘生林博士协助进行。在此，我们一并表示衷心的感谢！限于我们的水平，本书内容一定会有不妥甚至错误之处，希望广大读者批评指正。

作者

1996年6月于西安

目 录

前言

第 1 章 非圆齿轮的节曲线	1
1.1 节曲线的方程式	1
1.1.1 按要求的传动比函数计算节曲线	1
1.1.2 按要求再现的函数计算节曲线	3
1.1.3 齿轮齿条传动的节曲线计算	5
1.2 节曲线的曲率半径及凸性的校验	6
1.3 典型的节曲线	8
1.3.1 传动比随主动轮转角均匀变化的节曲线	8
1.3.2 对数螺线非圆齿轮副	9
1.3.3 再现函数 $y = kx^2 (x_1 \leq x \leq x_2)$ 的非圆齿轮节曲线	11
1.3.4 给定中心距 a 及转角函数求节曲线	12
1.3.5 给定中心距 a 及要求再现的函数求节曲线	13
1.4 节曲线封闭的条件	14
1.4.1 实现传动比函数 $i_{12} = f(\varphi_1)$ 的非圆齿轮副	15
1.4.2 再现函数 $y = f(x)$ 的非圆齿轮副	16
1.5 常用的封闭非圆齿轮节曲线	17
1.5.1 主动轮是椭圆时的非圆齿轮副	17
1.5.2 主动轮是高阶椭圆时的非圆齿轮副	23
1.5.3 变性椭圆非圆齿轮	28
1.5.4 偏心圆齿轮及与其共轭的非圆齿轮	31
第 2 章 非圆齿轮的设计	34
2.1 非圆齿轮共轭齿廓形成的基本概念	34
2.2 非圆齿轮传动的压力角	35
2.3 非圆齿轮的根切校验	37
2.4 非圆齿轮的基本参数	38
2.5 节曲线不封闭的非圆齿轮设计	39

2.5.1	轮齿在节曲线上的位置	40
2.5.2	齿顶曲线与齿根曲线	40
2.6	节曲线封闭的非圆齿轮设计	42
2.6.1	椭圆的弧长计算	42
2.6.2	高阶椭圆的弧长计算	45
2.7	非圆齿轮的变位问题	47
2.8	非圆齿轮副啮合时的重合度	49
2.9	非圆齿轮的设计实例	50
2.9.1	椭圆齿轮副	50
2.9.2	卵形齿轮副	52
2.9.3	高速双滚飞剪匀速机构用非圆齿轮副	54
2.10	非圆齿轮的计算机辅助设计 (CAD)	56
第3章 非圆齿轮轮系		57
3.1	非圆齿轮定轴轮系	57
3.1.1	定轴轮系的转角关系及传动比	57
3.1.2	相位相同的椭圆齿轮定轴轮系	58
3.1.3	相位不同的椭圆齿轮定轴轮系	60
3.1.4	两对相同的非圆齿轮组成的定轴轮系	62
3.2	非圆齿轮行星轮系	64
3.2.1	W-W型非圆行星轮系	64
3.2.2	定中心距N-G-W型非圆行星轮系	82
3.2.3	变中心距N-G-W型非圆行星轮系	100
3.3	非圆齿轮副与差动轮系的组合	112
第4章 非圆齿轮及非匀速比传动的啮合原理		115
4.1	非圆齿轮的节曲线、齿廓及啮合线的关系	115
4.1.1	基本关系	115
4.1.2	已知啮合线 $r = r(\zeta)$ 及节曲线求齿条的齿廓	117
4.1.3	已知节曲线及一个齿廓求与它共轭的另一齿廓	120
4.1.4	共轭盘形分度凸轮机构的廓形设计	122
4.1.5	滚齿时工作台有运动误差切出的齿轮齿廓	128
4.2	滚线及其方程式	131
4.3	非圆齿轮的齿廓曲率	134
4.4	共轭齿廓的滑动率	139

4.5 非圆齿轮啮合原理在非匀速传动中的应用	142
4.5.1 滚子直动从动件盘形凸轮机构	142
4.5.2 平底直动从动件盘形凸轮机构 ($\alpha \neq 0$)	146
4.5.3 平底直动从动件盘形凸轮机构 ($\alpha = 0$)	149
4.5.4 滚子摆动从动件盘形凸轮机构	150
4.5.5 平底摆动从动件凸轮机构	153
4.6 已知齿轮副齿廓求它们的运动关系	154
4.6.1 槽轮机构的运动分析	154
4.6.2 正弦机构的运动分析	157
第5章 非圆齿轮及非匀速传动机构的应用	160
5.1 非圆齿轮副在加工等螺旋角锥形立铣刀中的应用	160
5.1.1 概述	160
5.1.2 圆锥螺旋线的方程式	161
5.1.3 锥形立铣刀的铣削加工	163
5.2 非圆齿轮副在变速磨削凸轮时的应用	165
5.3 非圆齿轮副在滚筒式飞剪机中的应用	168
5.3.1 基本原理	168
5.3.2 非圆齿轮副节曲线的设计	172
5.4 非圆齿轮副在轮式步行机中的应用	182
5.4.1 基本原理	184
5.4.2 非圆齿轮副的节曲线	185
5.4.3 轮式步行机传动的结构方案	190
5.5 应用非圆齿轮传动的汽车刮水器	193
5.6 变传动比汽车转向器用的非圆齿轮副	200
5.6.1 变传动比转向器齿轮副的传动比、节线及啮合线	200
5.6.2 齿扇的齿廓	206
5.6.3 变传动比齿轮副的设计	207
5.6.4 余弦函数传动比的转向器齿轮副	210
5.7 偏心齿轮副传动及其应用	212
5.7.1 偏心齿轮副的运动关系	213
5.7.2 偏心齿轮副的设计	221
5.7.3 偏心齿轮泵	222
5.8 非圆齿轮和其他机构的组合	226

5.8.1 非圆齿轮与正弦机构组合的机构	226
5.8.2 非圆齿轮与曲柄滑块机构的组合	241
5.8.3 非圆齿轮副与带、链传动的组合	246
第6章 非圆链轮及非圆带轮	248
6.1 非圆链轮副的传动比	248
6.2 链轮的节曲线方程式	249
6.2.1 给定主动轮1的节曲线求从动轮2的节曲线	249
6.2.2 给定从动轮2的节曲线求主动轮1的节曲线	251
6.2.3 计算实例	252
6.3 已知两链轮的节曲线求传动比	256
6.3.1 计算公式	256
6.3.2 计算实例	257
6.4 非圆钢带传动	260
6.4.1 上带轮廓形计算	260
6.4.2 下带轮廓形计算	261
6.4.3 计算实例	263
6.5 变杆长连杆机构	266
6.6 基于瞬心机构的带轮-钢带函数机构	275
6.7 非圆链轮在自行车传动中的应用	276
6.7.1 概述	276
6.7.2 按恒张力非圆链轮传动的要求设计非圆链轮	278
6.7.3 按拉力最大的要求设计非圆链轮副	285
6.8 减小链长变化量的偏心圆链轮传动	290
6.9 非圆链轮的设计特点	297
6.9.1 轮齿位置的确定	297
6.9.2 非圆链轮的齿廓	299
第7章 非圆齿轮的加工	300
7.1 非圆齿轮的齿廓	300
7.1.1 非圆齿轮齿廓的形成原理	300
7.1.2 齿廓的方程式	302
7.1.3 过渡曲线及根切界限	306
7.1.4 用标准齿轮滚刀加工的非圆齿轮齿廓	307
7.1.5 工具齿条齿廓为正弦曲线时加工的非圆齿轮齿廓	310

7.2 用成形法加工非圆齿轮	311
7.2.1 线切割加工	311
7.2.2 在铣床上成形铣削	311
7.3 用经机械改装的机床加工非圆齿轮	316
7.3.1 插齿机改装示例	316
7.3.2 滚齿机改装示例	317
7.4 插齿加工	318
7.4.1 沿中心联线退刀方式的调整计算	318
7.4.2 沿节曲线法线退刀方式的调整计算	321
7.5 滚齿加工	323
7.5.1 用环形梳刀切削	324
7.5.2 用齿轮滚刀切削	325
7.6 粗、精切的加工余量分布问题	326
7.7 非圆齿轮的 CAD/CAM	329
附录	331
附录 A 曲线的切线极坐标方程	331
附录 B 法向等距线	336
参考文献	340

第 1 章 非圆齿轮的节曲线

非圆齿轮副是用来传递非匀速比运动的，两齿轮的节曲线一般不是圆形。设计非圆齿轮主要有两个步骤：一、确定齿轮副的节曲线；二、确定齿轮的其他几何参数，特别是齿轮的齿廓，以保证齿轮副能正确地按求得的节曲线传动。

1.1 节曲线的方程式

1.1.1 按要求的传动比函数计算节曲线

设齿轮副的中心距为 a (图 1-1)，主动轮 1 的转角为 φ_1 ，瞬时角速度为 ω_1 ，从动轮 2 的转角为 φ_2 ，瞬时角速度为 ω_2 。在起始位置， $\varphi_1=0$ ， $\varphi_2=0$ 。又设要求齿轮副传递的转角函数关系为

$$\varphi_2 = F(\varphi_1) \quad (1-1)$$

则齿轮副的传动比函数 i_{12} 为

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d\varphi_1/dt}{d\varphi_2/dt} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} = f(\varphi_1) \quad (1-2)$$

$$f(\varphi_1) = \frac{1}{F'(\varphi_1)} \quad (1-3)$$

在 φ_1 的变化范围内，传动比函数 $f(\varphi_1)$ 应该是有限正值光滑函数。

可以证明^[1]，两齿轮在任一瞬时，总有一个相对运动速度等于零的点 P ，称为瞬时回转中心(简称瞬心)。它位于联心线 O_1O_2 上，且满足条件 $\omega_1 \cdot \overline{O_1P} = \omega_2 \cdot \overline{O_2P}$ ，分别用 r_1 、 r_2 表示 $\overline{O_1P}$ 及 $\overline{O_2P}$ ，则瞬时传动比又可表示为

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{a - r_1}{r_1} \quad (1-4)$$

当传动比 i_{12} 是变数时，瞬心 P 的位置及 r_1 、 r_2 是变化的。瞬

心在齿轮 1、2 回转平面上的轨迹，称为两齿轮的瞬心线，也就是齿轮的节曲线。

由式 (1-4) 可得主动轮 1 的节曲线方程为

$$r_1(\varphi_1) = \frac{a}{1 + i_{12}} = \frac{a}{1 + f(\varphi_1)} \quad (1-5)$$

由式 (1-4) 及 (1-2) 可得从动轮 2 的节曲线方程为

$$\left. \begin{aligned} r_2 &= a - r_1(\varphi_1) = \frac{ai_{12}}{1 + i_{12}} \\ \varphi_2 &= \int_0^{\varphi_1} \frac{1}{i_{12}} d\varphi_1 = \int_0^{\varphi_1} \frac{1}{f(\varphi_1)} d\varphi_1 \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

上面二式是以极坐标形式表示的外啮合非圆齿轮副节曲线方程。注意按此式计算节曲线时，极角 φ_1 、 φ_2 的计量方向与相应的回转角速度 ω_1 、 ω_2 方向相反 (见图 1-1)。

当传动比 i_{12} 是常

数时， $r_1 = \frac{a}{1 + i_{12}}$ ， $r_2 = a - r_1$ ， r_1 、 r_2 都是常数，这就是普通的圆齿轮。

如果给定的条件是齿轮副的中心距 a 及主动轮 1 的节曲线方程

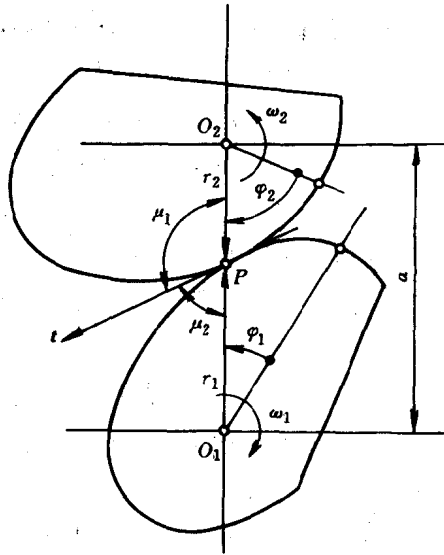


图 1-1 外齿轮传动及其节曲线

$$r_1 = r_1(\varphi_1)$$

则传动比函数为

$$i_{12} = f(\varphi_1) = \frac{a - r_1(\varphi_1)}{r_1(\varphi_1)} \quad (1-7)$$

从动轮 2 的节曲线方程则为

$$\left. \begin{aligned} r_2 &= a - r_1(\varphi_1) \\ \varphi_2 &= \int_0^{\varphi_1} \frac{1}{i_{12}} d\varphi_1 \\ &= \int_0^{\varphi_1} \frac{r_1(\varphi_1)}{a - r_1(\varphi_1)} d\varphi_1 \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

如果齿轮 2 是内齿轮 (图 1-2), 则回转角速度 ω_1 和 ω_2 的方向相同, 用同样的方法可以求得主、从动轮 1 和 2 的节曲线方程为

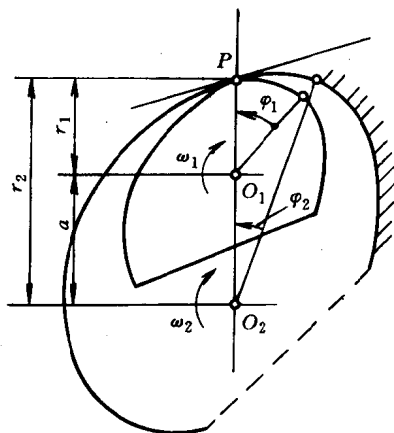


图 1-2 内齿轮传动及其节曲线

$$r_1 = \frac{a}{i_{12} - 1} = \frac{a}{f(\varphi_1) - 1} \quad (1-9)$$

$$\left. \begin{aligned} r_2 &= a + r_1 = a \frac{i_{12}}{i_{12} - 1} \\ \varphi_2 &= \int_0^{\varphi_1} \frac{1}{i_{12}} d\varphi_1 = \int_0^{\varphi_1} \frac{1}{f(\varphi_1)} d\varphi_1 \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

1.1.2 按要求再现的函数计算节曲线

设要求非圆齿轮传动再现某个函数 $y = f(x)$, x 在闭区间 $[x_1, x_2]$ 内连续可导。可以令主动轮 1 的转角 φ_1 与自变量 x 成正比, 从动轮 2 的转角 φ_2 与 $f(x)$ 成正比, 即写成

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= k_1(x - x_1) \\ \varphi_2 &= k_2[f(x) - f(x_1)] \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

则传动比为

$$i_{12} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} = \frac{k_1}{k_2 f'(x)} \quad (1-12)$$

上面两式中的 k_1, k_2 是比例常数, $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 对 x 的一阶导数。

自变量 x 的变化区间为 $[x_1, x_2]$, 则 φ_1, φ_2 的最大值分别为

$$\varphi_{1\max} = k_1(x_2 - x_1)$$

$$\varphi_{2\max} = k_2 [f(x_2) - f(x_1)]$$

为了提高函数的再现精度，在结构许可的条件下，应该把转角 φ_1 、 φ_2 设计得大些，一般可取在 $300^\circ \sim 330^\circ$ ，由此确定比例常数 k_1 、 k_2 的值。

由式 (1-5)、式 (1-6)、式 (1-11) 及式 (1-12)，可得到外啮合主、从动轮 1 和 2 的节曲线方程式分别为

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= k_1(x - x_1) \\ r_1 &= \frac{ak_2 f'(x)}{k_1 + k_2 f''(x)} \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2 &= k_2 [f(x) - f(x_1)] \\ r_2 &= a - r_1 = \frac{ak_1}{k_1 + k_2 f''(x)} \end{aligned} \right\} \quad (1-14)$$

设齿轮 1 的节曲线在 P 点的切线 t 的正方向（转角 φ_1 加大的方向），与 r_1 的正向的夹角用 μ_1 表示（见图 1-1），则由节曲线方程 $r_1 = r_1(\varphi_1)$ 可知，

$$\tan \mu_1 = \frac{r_1}{\frac{dr_1}{d\varphi_1}} \quad (1-15)$$

对于传递传动比函数 $i_{12} = f(\varphi_1)$ 的非圆齿轮副，由式 (1-5) 可得

$$\tan \mu_1 = -\frac{i_{12} + 1}{i'_{12}} \quad (1-15a)$$

对于再现函数 $y = f(x)$ 的非圆齿轮副，由式 (1-13) 可得

$$\tan \mu_1 = \frac{f'(x)[k_1 + k_2 f''(x)]}{f''(x)} \quad (1-16)$$

同样设齿轮 2 的节曲线在 P 点的切线的正方向（转角 φ_2 加大的方向），与 r_2 正向的夹角用 μ_2 表示，则由节曲线方程 $r_2 = r_2(\varphi_2)$ 可知

$$\tan \mu_2 = \frac{r_2}{\frac{dr_2}{d\varphi_2}}$$

由式(1-6)及(1-14)均可得 $\tan\mu_2 = -\tan\mu_1$, 即 $\mu_1 + \mu_2 = 180^\circ$ 。这也证明了两齿轮的节曲线在 P 点有共同的切线, 它们在 P 点相切。此外, 还可证明两节曲线在传动过程中是作纯滚动的, 在同一时间内, 两节曲线切点间滚过的弧长相等。

对于圆齿轮, $\mu_1 = \mu_2 = 90^\circ$ 。

1.1.3 齿轮齿条传动的节曲线计算

设齿轮的瞬时回转角速度为 ω_1 , 转角为 φ_1 (图 1-3)。齿条的瞬时平移速度为 v , 平移距离为 s 。在起始位置时, $\varphi_1 = 0, s = 0$, 且要求实现的运动关系为

$$s = F(\varphi_1) \quad (1-17)$$

同样可以证明^[1], 齿轮齿条的瞬时回转中心 P , 位于通过齿轮中心 O_1 且垂直于齿条平移方向的直线 (图 1-3 中的 y 轴) 上。在 P 点, 齿轮齿条的运动线速度相等, 即 $\omega_1 \cdot \overline{O_1P} = v$ 。 P 点在齿轮、齿条运动平面上的轨迹, 分别是齿轮、齿条的瞬心线 (节曲线)。若用 r_1 表示 $\overline{O_1P}$, 则齿轮的节曲线方程为

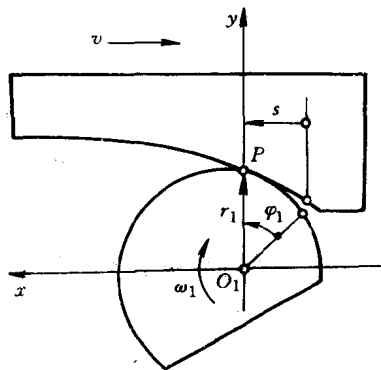


图 1-3 齿轮齿条传动及其节曲线

$$r_1 = \frac{v}{\omega_1} = \frac{ds}{d\varphi_1} = F'(\varphi_1) \quad (1-18)$$

一般定义上式的 $\frac{ds}{d\varphi_1}$ 为传动比并用 i 表示, 即

$$i = F'(\varphi_1) = f(\varphi_1) \quad (1-19)$$

齿条的节曲线不适宜用极坐标表示, 为此, 通过齿轮中心 O_1 作固定的坐标系 (O_1xy), y 轴与齿条的平移方向垂直。齿条节曲线在此坐标系中的方程式为

$$\left. \begin{aligned} x &= \int_0^{\varphi_1} r_1 d\varphi_1 = s \\ y &= r_1 = f(\varphi_1) \end{aligned} \right\} \quad (1-20)$$

x 是齿轮从起始位置转过角度 φ_1 时, 相应的齿条平移的距离。

若要求齿轮齿条传动再现某个函数 $y = f(x)$, x 在闭区间 $[x_1, x_2]$ 内连续可导。和前面一样, 可以令

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= k_1(x - x_1) \\ s &= k_2[f(x) - f(x_1)]\end{aligned}$$

k_1, k_2 是比例常数, 则传动比 i 为

$$i = \frac{ds}{d\varphi_1} = \frac{k_2}{k_1} f'(x) \quad (1-21)$$

于是由式 (1-18) 及式 (1-20) 得到齿轮的节曲线方程为

$$r_1 = \frac{k_2}{k_1} f'(x) \quad (1-22)$$

齿条节曲线在坐标系 (O_1xy) 中的方程为

$$\left. \begin{aligned}x &= s = k_2[f(x) - f(x_1)] \\ y &= r_1\end{aligned} \right\} \quad (1-23)$$

1.2 节曲线的曲率半径及凸性的校验

非圆齿轮的节曲线不是圆, 其上各点处的曲率半径是不同的。上一节推导的节曲线方程式 (1-5) 和式 (1-6), 都是用极坐标表示的, 可以概括成 $r = r(\varphi)$ 的形式。根据微分几何, 它上面各点曲率半径的计算式为^[67]:

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right]^{3/2}}{r^2 + 2 \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - r \frac{d^2r}{d\varphi^2}} \quad (1-24)$$

式中的 $\frac{dr}{d\varphi}$ 及 $\frac{d^2r}{d\varphi^2}$ 分别是 r 对 φ 的一阶导数及二阶导数。

对于主动轮 1 的节曲线, 由式 (1-5)

$$\begin{aligned}r_1 &= \frac{a}{1 + i_{12}} = \frac{a}{1 + f(\varphi_1)} = r_1(\varphi_1) \\ \frac{dr_1}{d\varphi_1} &= - \frac{a}{(1 + i_{12})^2 i'_{12}}\end{aligned}$$

$$\frac{d^2 r_1}{d\varphi_1^2} = \frac{-a[(1+i_{12})i_{12}'' - 2(i_{12}')^2]}{(1+i_{12})^3}$$

式中的 $i_{12}' = f'(\varphi_1)$, $i_{12}'' = f''(\varphi_1)$, 分别是传动比函数 $f(\varphi_1)$ 对 φ_1 的一阶导数及二阶导数。把上二式代入式 (1-24), 化简后得

$$\rho_1 = \frac{a\left[1 + \left(\frac{i_{12}'}{1+i_{12}}\right)^2\right]^{3/2}}{1+i_{12}+i_{12}''} \quad (1-25)$$

对于从动轮 2 的节曲线, 由式 (1-6)

$$r_2 = \frac{ai_{12}}{1+i_{12}}$$

$$\frac{dr_2}{d\varphi_2} = \frac{dr_2}{d\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} = \frac{ai_{12}i_{12}'}{(1+i_{12})^2}$$

$$\frac{d^2 r_2}{d\varphi_2^2} = ai_{12} \frac{(1+i_{12})[i_{12}i_{12}'' + (i_{12}')^2] - 2i_{12}(i_{12}')^2}{(1+i_{12})^3}$$

把它们代入式 (1-24), 化简后得

$$\rho_2 = \frac{ai_{12}\left[1 + \left(\frac{i_{12}'}{1+i_{12}}\right)^2\right]^{3/2}}{1+i_{12}-i_{12}i_{12}''+(i_{12}')^2} \quad (1-26)$$

根据微分几何, 按式(1-25)和式(1-26)计算的 ρ_1 及 ρ_2 如果是正的, 则节曲线在相应点处是外凸的; 反之, 当 ρ_1 或 ρ_2 是负值时, 节曲线在相应点处是内凹的。我们知道, 节曲线的内凹部分是不能用齿条形刀具或齿轮滚刀加工的, 只能用适当直径的插齿刀插制, 所以设计非圆齿轮时, 要对节曲线的凸性进行必要的校验。

如上所述, 节曲线上没有内凹部分的条件, 是整条节曲线上各点的曲率半径都大于零。由于式 (1-24) 的分子是恒大于零的, 因此, 条件就成为该式的分母大于或等于零了。对于要求传递传动比函数 $i_{12} = f(\varphi_1)$ 的齿轮副, 主动轮 1 节曲线上无内凹部分的条件为

$$r_1^2 + 2\left(\frac{dr_1}{d\varphi_1}\right)^2 - r_1 \frac{d^2 r_1}{d\varphi_1^2} \geq 0$$

$$\text{或} \quad 1 + i_{12} + i_{12}'' \geq 0 \quad (1-27)$$