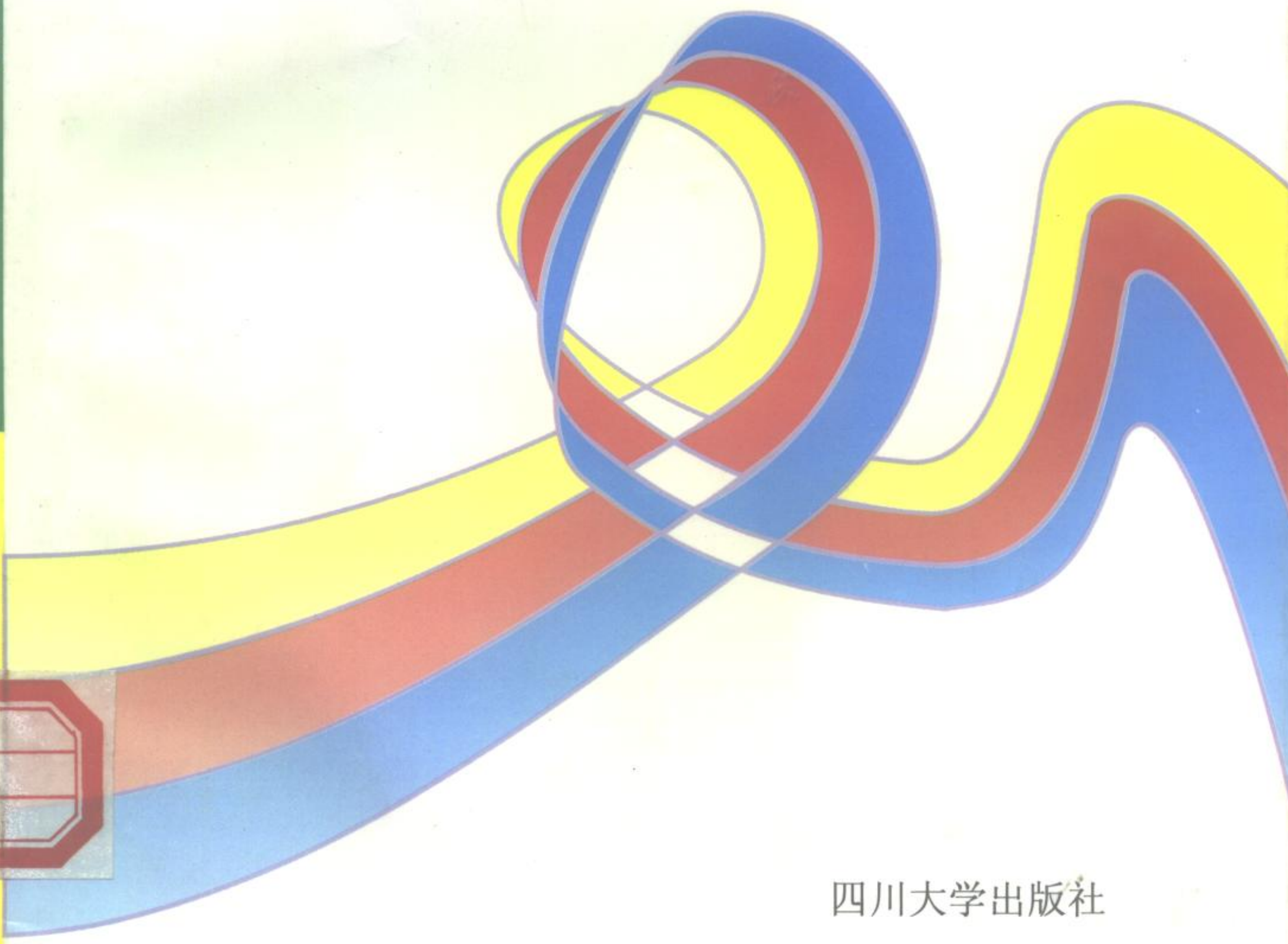
数学模型实用教程

主　编　费培之
副主编　程中瑗



四川大学出版社

数学模型实用教程

主　编　费培之
副主编　程中瑗
编　著　邹述超　费培之
　　　　舒慕增　程中瑗
　　　　黄南京　周　杰

四川大学出版社
1998年·成都

(川)新登字 014 号

责任编辑:石大明　方亦均
封面设计:唐利民
责任校对:林　志
技术设计:徐高明
责任印制:李　平

内 容 简 介

本书从现实中提出问题，建立数学模型，着重分析建模思想，阐明建模过程和求解方法，培养如何把现实世界与数学世界结合起来的应用能力和创造精神. 内容包括数学模型基础：最优化模型、图论模型、离散模型、微分方程模型、概率统计模型；模拟技术和数学建模实例分析等三个部分，共七章，并配有习题.

本书是数学模型课和全国大学生数学建模竞赛培训的一本实用教程，也可供有关管理人员和科技工作者参考.

数学模型实用教程
主　编　费培之
副主编　程中瑗
四川大学出版社出版发行　(成都市望江路 29 号)
新华书店经销　成都市郫县犀浦印刷厂印刷
787×1092mm　16 开本　17.625 印张　390 千字
1998 年 3 月第 1 版　1998 年 3 月第 1 次印刷
印数:1—3000 册
ISBN 7-5614-1714-4/O · 114　定价:20.00 元

前　言

本书是为数学模型课和全国大学生数学建模竞赛而编写的一本实用教程.

通常我们把现实的一个模拟称为模型，如交通图、地质图、地球仪、航空模型和电子模型等. 利用数学的语言、公式、图、表或符号等来模拟现实的模型称为数学模型. 本书所讨论的是数学模型，并常常把数学模型和建立数学模型分别简称为模型和建模.

我们知道，对一个现实问题的研究，一般不需要甚至不可能直接研究现实问题本身，而是研究模拟该现实问题的模型. 举个简单例子. 某司机欲把某货物从甲地运到乙地，应如何选择运输路线使总路程最短？该司机总不会开着汽车去试探，而是利用交通图来确定自己的行车路线. 这就是为什么必须讨论数学模型的非常明白的道理. 在今天，人们已经认识到，无论在自然科学、工程技术、经济管理、生态环境，还是在人文社会科学领域，数学模型都是不可或缺的. 其原因就在于，如何把现实世界与数学世界结合起来，正是数学模型所要研究的问题.

模拟现实问题建立数学模型，不仅要有一定的数学知识与技巧，还要有锐敏的洞察力与理解力，善于抓住问题的内在联系，作出合理的假设与简化，找出影响问题的各种因素及其相互关系. 在建立模型之后，就要求解模型，并对解的现实意义作出解释，检验模型的正确性. 现实与模型的关系可表示如下：

$$\boxed{\text{现　实}} \xrightarrow{\text{分析，建立}} \boxed{\text{模　型}} \xrightarrow{\text{求解，检验}} \boxed{\text{现　实}}$$

现实世界千差万别，从不同侧面和不同角度所建立的模型也各具特色. 显而易见，如何建立数学模型的问题并无普遍适用的规则，只能靠自己在学中用，在用中学. 正如一门艺术，依样画葫芦是学不好的，只有靠自己的实践才能提高、顿悟和升华. 因此可以说，如何建立好数学模型就是一门艺术.

建立数学模型涉及广泛的知识领域，其中有的知识是自己懂得的，有的知识甚至很多知识是自己不懂的. 因此，如何拓广自己的知识面，提高解决实际问题的综合能力，就是一个具有挑战性的问题.

由此可见，数学模型课的开设对于培养学生把现实与数学结合起来的应用能力与创新精神，对于加强素质教育，对于大学数学教学改革，都有着重要的不可替代的作用.

考虑到数学模型课面对的学生有数学专业的，也有非数学专业的；有高年级的，也有低年级的，因此我们根据实际需要适当介绍了有关的数学基本概念和理论，一般不证明，着重讲清楚在建立模型和模型的求解中如何灵活地、正确地运用.

全书分三个部分，共七章．第一部分是数学模型基础，即第一至五章，包括最优化模型、图论模型、离散模型、微分方程模型和概率统计模型．第二部分是计算机模拟，即第六章．第三部分是建模实例分析，即第七章．这些内容完全从数学模型课和全国大学生数学建模竞赛的实际需要出发，既注意了系统性、可读性与实用性，又注意了各部分内容的相对独立性，便于在教学和培训中根据实际情况选用．

书中选编了适量的习题．利用这些习题进行课堂讨论，或者作为课外练习自己动手独立完成，是学好数学模型课的一个十分重要的教学环节．

我校从 1987 年开始讲授数学模型课．现在“数学模型”是我校数学系的必修课，全校的选修课．本书是我们在数学模型课和数学建模竞赛培训中多次使用的讲义的基础上，由校教材基金委员会重点资助编写出版的．费培之和程中瑗分别担任主编和副主编．具体执笔为：第一章、第七章的第一节——邹述超；第二章、第三章的第三至七节、第七章的第四节——费培之；第三章的第一二节、第四章的第八九节——舒慕增；第四章的第一至七节、第七章的第二三节——程中瑗；第五章、第七章的第五节——黄南京；第六章——周杰．全书由费培之统稿，由周杰作图．

编写本书时参考了许多有关文献、资料，各章末列出了其中主要的，在此一并表示衷心的谢意．

感谢学校对本书出版的资助，感谢数学系和四川大学出版社的大力支持．

限于编者水平，对于本书的不足，恳请批评指正．

编　者

一九九七年十二月

目　　录

第一章　最优化模型

一个复杂系统往往要受诸多因素的影响，而这些因素又要受到一定的限制. 最优化就是在一定约束下，如何选取这些因素的值，使某项(或某些) 指标达到最优的一门学科. 它包括数学规划、决策分析、最优控制等等. 最优化方法在经济、军事、科技等领域内都有广泛的应用. 本章着重介绍线性规划、整数规划、非线性规划、动态规划问题的建模与求解.

§1.1　最优化模型的建立

若描述实际问题的关系式都是线性的，则问题为线性规划问题，相应的数学模型为**线性规划模型**，一般形式为

$$\min z(\text{或} \max z) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = (\text{或} \leqslant, \text{或} \geqslant) b_i, \quad && i = 1,2,\cdots,m, \\ & x_j \geqslant 0, && j = 1,2,\cdots,n. \end{aligned}$$

其中，$c_j(j=1,2,\cdots,n)$，$b_i(i=1,2,\cdots,m)$，$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 为已知常数；$x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 叫**决策变量**；$z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ 叫**目标函数**；约束等式或不等式叫**约束条件**，简记为 $s.t.$；满足约束条件的解 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 叫**可行解**或**可行点**；全体可行解所成之集合叫**可行域**，记为 S. 既满足约束条件又使目标函数达最小(或最大) 的可行解叫**最优解**，记为 X^*，相应的目标函数值记为 z^*.

如果决策变量 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 还要求取整数值，则称模型为(线性) **整数规划模型**；若只有其中一部分变量取整数值，则称模型为**混合整数规划模型**；若 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 只取 0 或 1 两个值，则称模型为 0 － 1 规划模型. 若目标函数或某个约束条件是非线性的，则称模型为**非线性规划模型**.

下面举出若干类型的例子来说明如何建立模型.

一、运输问题

例 1.1　设某产品有 m 个产地 $A_1,A_2,\cdots,A_m$，n 个销地 $B_1,B_2,\cdots,B_n$. 各产地的产量，各销地的需求量以及各产地运往各销地的单位运价如表 1.1，且设 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. 问在满

足各地需求以及生产能力允许的条件下，如何调运使总运费最少.

表 1.1

运价 销地 / 产地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产 量
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
需求量	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

解 设 x_{ij} 表示从产地 A_i 运往销地 B_j 的数量，则可得线性规划模型如下：

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\quad i = 1,2,\cdots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\quad j = 1,2,\cdots,n,$$

$$x_{ij} \geqslant 0,\quad i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n.$$

二、分派问题

例 1.2 设有工作 m 件，人员 m 个，且一人做一件工作，第 i 人做第 j 件工作的时间（或费用）为 c_{ij}，问如何分派这些人员使总时间（或总费用）最少.

解 设

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 人做第 } j \text{ 件工作}, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases}$$

则得 0－1 规划模型：

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1,\quad i = 1,2,\cdots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1,\quad j = 1,2,\cdots,m,$$

$$x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1,\quad i,j = 1,2,\cdots,m.$$

问题中的 c_{ij} 可以换成第 i 人做第 j 件工作的效益，模型中的目标函数换成极大化. 可以看出，分派问题实际上是运输问题的变形.

例 1.2 中所采用的将“做或不做某件事”这类定性变量定量化的方法，是建立数学模型时常用的方法，如选址问题、背包问题以及网络问题等都可采用此法量化决策变量.

三、网络问题

运输问题与分派问题都是网络问题，下面再讨论若干网络问题的模型.

一个网络包括一些结点(用圆圈表示),每个结点由几条弧(用箭头表示)与其它结点相连接,如图 1.1.

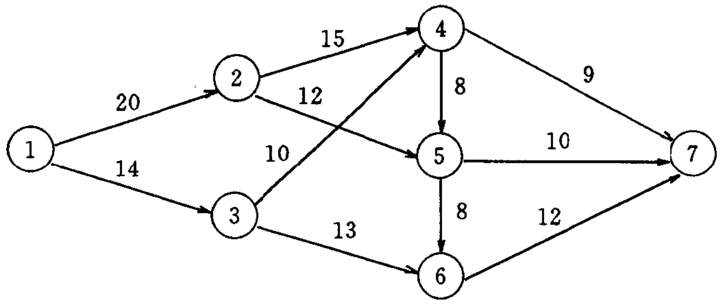


图 1.1

网络可作为许多真实系统的模型.例如,将图 1.1 看成地面交通图,结点可以表示城市,弧表示连接两城市的铁路或公路.若箭杆旁的数字表示路程,则问题可以是求起点城市(结点 ①)到终点城市(结点 ⑦)的最短路,即最短路问题.若箭杆旁的数字表示每小时的最大车流量,则问题可以是求起点城市到终点城市的最大车流量,即最大流问题.若将图 1.1 中的结点 ① 看成某种产品的产地,结点 ⑦ 看成销地,结点 ② ~ ⑥ 看成转运站的一个运输问题,则箭杆旁的数字解释为单位运费,问题是求给定产量和需求量时使总运费最少的运输方案,即最小费用流问题.

例 1.3(最短路问题)　设图 1.1 为公路交通图,弧上的数字为相邻两结点间的路程,求汽车从起点 ① 到终点 ⑦ 的最短路.

解　设

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{有从 } (i) \text{ 到 } (j) \text{ 的弧},\\ 0, & \text{否则},\end{cases}$$

则得 0 — 1 规划模型:

$$\min z = 20x_{12}+14x_{13}+15x_{24}+12x_{25}+10x_{34}+13x_{36}$$
$$+8x_{45}+9x_{47}+8x_{56}+10x_{57}+12x_{67}\quad\text{(总路程)}$$

$$\text{s.t.}\quad x_{12}+x_{13}=1\quad\text{(从 ① 出发的汽车为一辆)}$$

$$\left.\begin{aligned}&-x_{12}+x_{24}+x_{25}=0\\&-x_{13}+x_{34}+x_{36}=0\\&-x_{24}-x_{34}+x_{45}+x_{47}=0\\&-x_{25}-x_{45}+x_{56}+x_{57}=0\\&-x_{36}-x_{56}+x_{67}=0\end{aligned}\right\}\text{(进入 (i) 的汽车数等于离开 (i) 的汽车数)}$$

$$-x_{47}-x_{57}-x_{67}=-1\quad\text{(到达 ⑦ 的汽车为一辆)}$$

$$x_{ij}=0\text{ 或 }1,\quad i,j=1,2,\cdots,7.$$

第 2 到第 6 个约束条件称为平衡条件.一般,结点 (i) 所满足的约束条件可表示为

$$-\sum_j x_{ji}+\sum_j x_{ij}=\begin{cases}1, & i=\text{起点},\\ 0, & i\neq\text{起点、终点},\\ -1, & i=\text{终点},\end{cases}$$

其中“－”号表示汽车进入 ⓘ ,“＋”号表示汽车离开 ⓘ .

例 1.4(最小费用流问题)　设图 1.1 中弧上的数字为相邻两个结点间的单位运费，现将总量为 Q 的某种产品从产地 ① 运往销地 ⑦,求使总运费最少的运输方案.

解　设 x_{ij} 表示从结点 ⓘ 到结点 ⓙ 沿该弧的运量,则得线性规划模型:

$$
\begin{aligned}
\min z = {} & 20x_{12} + 14x_{13} + 15x_{24} + 12x_{25} + 10_{34} + 13x_{36} \\
& + 8x_{45} + 9x_{47} + 8x_{56} + 10x_{57} + 12x_{67} \quad \text{(总运费)} \\
s.t.\quad & x_{12} + x_{13} = Q \quad \text{(从产地运出的总量)} \\
& \left.\begin{aligned}
& -x_{12} + x_{24} + x_{25} = 0 \\
& -x_{13} + x_{34} + x_{36} = 0 \\
& -x_{24} - x_{34} + x_{45} + x_{47} = 0 \\
& -x_{25} - x_{45} + x_{56} + x_{57} = 0 \\
& -x_{36} - x_{56} + x_{67} = 0
\end{aligned}\right\}\text{(中间结点的运进量与运出量相等)} \\
& -x_{47} - x_{57} - x_{67} = -Q \quad \text{(运进销地的总量)} \\
& x_{ij} \geqslant 0,\quad i,j = 1,2,\cdots,7.
\end{aligned}
$$

例 1.5(最大流问题)　设图 1.1 中弧上的数字表示每小时两结点沿箭头方向的最大车流量,问从结点 ① 到结点 ⑦ 每小时的最大车流量是多少.

解　设 v 表示从结点 ① 发出的每小时车流量,x_{ij} 表示从结点 ⓘ 到结点 ⓙ 沿该弧的车流量,则得线性规划模型:

$$
\begin{aligned}
& \max v \\
s.t.\quad & x_{12} + x_{13} = v \quad \text{(从 ① 发出的车流量)} \\
& \left.\begin{aligned}
& -x_{12} + x_{24} + x_{25} = 0 \\
& -x_{13} + x_{34} + x_{36} = 0 \\
& -x_{24} - x_{34} + x_{45} + x_{47} = 0 \\
& -x_{25} - x_{45} + x_{56} + x_{57} = 0 \\
& -x_{36} - x_{56} + x_{67} = 0
\end{aligned}\right\}\text{(中间结点到达与发出的车流量相等)} \\
& -x_{47} - x_{57} - x_{67} = -v \quad \text{(到达 ⑦ 的车流量)} \\
& \begin{aligned}
& 0 \leqslant x_{12} \leqslant 20 \\
& 0 \leqslant x_{13} \leqslant 14 \\
& 0 \leqslant x_{24} \leqslant 15 \\
& 0 \leqslant x_{25} \leqslant 12 \\
& 0 \leqslant x_{34} \leqslant 10 \\
& 0 \leqslant x_{36} \leqslant 13
\end{aligned}
\qquad
\left.\begin{aligned}
& 0 \leqslant x_{45} \leqslant 8 \\
& 0 \leqslant x_{47} \leqslant 9 \\
& 0 \leqslant x_{56} \leqslant 8 \\
& 0 \leqslant x_{57} \leqslant 10 \\
& 0 \leqslant x_{67} \leqslant 12
\end{aligned}\right\}\text{(各弧上最大车流量限制)} \\
& v \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

最短路问题可看成是总运量为 1 的最小费用流问题.运输问题和分派问题可看成有 m 个发点与 n 个收点且无中转站的最小费用流问题.

四、生产活动问题

例 1.6　某公司有 m 种资源 $B_1,B_2,\cdots,B_m$(如机器的可用工时,劳力,原材料等),生

产 n 种不同的产品 $A_1,A_2,\cdots,A_n$. 其单位消耗，单位利润等有关数据如表 1.2. 问如何安排生产使总利润最大.

表 1.2

单耗 产品 / 资源	A_1	A_2	$\cdots$	A_n	资源量
B_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
B_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
B_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
单位利润	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	

解 设 x_j 表示第 j 种产品的产量，则可得线性规划模型：

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad i = 1,2,\cdots,m, \\ & x_j \geqslant 0, \qquad j = 1,2,\cdots,n. \end{aligned}$$

注 ① 若还要考虑固定成本，则需引入 $0-1$ 变量. 设第 j 种产品的固定成本为 M_j，第 j 种产品产量的上界为 L_j，引入 $0-1$ 变量

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{生产第 } j \text{ 种产品}, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases}$$

则模型为

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{j=1}^{n} M_j y_j$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad i = 1,2,\cdots,m, \\ & 0 \leqslant x_j \leqslant L_j y_j, \quad j = 1,2,\cdots,n, \\ & y_j = 0 \text{ 或 } 1, \qquad j = 1,2,\cdots,n. \end{aligned}$$

② 如果某些资源的使用是有选择的，即有些约束条件是互相排斥的，可引入 $0-1$ 变量将其统一在同一个模型中. 如 b_1,b_2 为不同型号的两台机器的可用工时，而 n 种产品可在任何一台上加工，这时第 1,2 两个约束条件就是互相排斥的，只能选择一个进入模型. 如果引入 $0-1$ 变量

$$y_i = \begin{cases} 0, & \text{在型号 } i \text{ 的机器上加工}, \\ 1, & \text{否则}, \end{cases} \quad (i = 1,2)$$

则可用下述约束条件来将它们统一在同一个模型中：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i + U_i y_i, \quad i = 1,2,$$

$$\sum_{i=1}^{2} y_i = 1,$$

$$y_i = 0 \text{ 或 } 1, \quad i = 1,2,$$

其中 U_i 为$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i\right)$ 的上界.

可用类似的方法处理满足其中 k 个约束条件的问题.

例 1.6 只考虑了一个阶段的生产安排,不考虑产品存贮,下面给出一个多阶段生产问题.

例 1.7 某公司生产某种产品,最大生产能力为 100 单位,每单位存贮费 2 元,预定的销售量与单位成本如表 1.3.

表 1.3

月份	单位成本(元)	销售量
1	70	60
2	72	70
3	80	120
4	76	60

求一生产计划,使

(1) 满足需求;

(2) 不超过生产能力;

(3) 成本(生产成本与存贮费之和)最低.

解 1 假定 1 月初无库存,4 月底卖完,当月生产的不存库,库存量无限制.

设 x_i 为第 i 月产量,d_i 为销售量,e_i 为存贮费,c_i 为单位成本,则可得整数规划模型:

$$\min z = \sum_{j=1}^{4} c_j x_j + \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{j} x_i - \sum_{i=1}^{j} d_i\right) e_{j+1}$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & \sum_{i=1}^{j} x_i \geqslant \sum_{i=1}^{j} d_i, \qquad j = 1,2,3, \\ & \sum_{i=1}^{4} x_i = \sum_{i=1}^{4} d_i, \\ & 0 \leqslant x_i \leqslant 100 \text{ 且为整数}, \quad i = 1,2,3,4. \end{aligned}$$

若把第 i 月初的库存量(记为 s_i)也作为决策变量,则问题可表示为

$$\begin{aligned} \min z = & \sum_{i=1}^{4} c_i x_i + \sum_{i=1}^{4} e_i s_i \\ s.t. \quad & s_{i+1} = s_i + x_i - d_i, \qquad i = 1,2,3,4, \\ & s_1 = 0, s_5 = 0, \\ & 0 \leqslant x_i \leqslant 100 \text{ 且为整数}, \quad i = 1,2,3,4, \\ & s_i \geqslant 0 \text{ 且为整数}, \qquad i = 1,2,3,4. \end{aligned}$$

解 2 化为运输问题.

设 x_{ij} 表示第 i 月生产的产品在第 j 月卖出的数量($i,j = 1,2,3,4$),c_{ij} 表示第 i 月生产的产品在第 j 月卖出时的生产成本与存贮费之和,如表 1.4.

表 1.4

费用 c_{ij} 需求月 / 生产月	1	2	3	4	产量
1	70	72	74	76	100
2	—	72	74	76	100
3	—	—	80	82	100
4	—	—	—	76	100
销量	60	70	120	60	

则得整数规划模型：

$$\min z = \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{j} c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & \sum_{i=1}^{j} x_{ij} = d_j, && j = 1,2,3,4, \\ & \sum_{j=i}^{4} x_{ij} \leqslant 100, && i = 1,2,3,4, \\ & x_{ij} \geqslant 0 \text{ 且为整数}, && i,j = 1,2,3,4. \end{aligned}$$

另外，对本问题还可建立动态规划模型，见 §1.5 例 1.28.

例 1.7 是关于一种产品的多阶段生产问题，且资源量没加限制. 例 1.6 则是要受多种资源量限制的多种产品的单阶段生产问题，也称资源分配问题. 下面给出一个多阶段资源分配问题.

例 1.8 某机械厂计划在1～6月份生产7种产品. 该厂有5种机床，其数量如表 1.5. 已知第 j 种产品在第 t 种机床上所需加工台时为 $a_{tj}(t=1,2,3,4,5; j=1,2,\cdots,7)$，第 j 种产品的单位利润为 $c_j(j=1,2,\cdots,7)$，第 i 月第 j 种产品的销售限量为 $d_{ij}(i=1,2,\cdots,6; j=1,2,\cdots,7)$. 每种产品一次至多贮存100件，每件月存贮费 a 元，1月初无存货，6月底每种产品要求余50件. 生产每天两班，每班8小时，一个月平均工作21天. 工厂规定，在半年内每台机床在某月必须停车维修一次，维修时间10天. 为使利润最大，工厂应该怎样安排生产.

表 1.5

类型(t)	1	2	3	4	5
数量(l_t 台)	4	2	3	1	1

表 1.6

类型(t)	1	2	3	4	5
月台时(b_t)	1344	672	1008	336	336

解 再假设当月生产的产品不入库贮存.

以 x_{ij} 表示第 i 月第 j 种产品的产量($i=1,2,\cdots,6; j=1,2,\cdots,7$)，$s_{ij}$ 表示第 i 月初第 j 种产品的库存量($i=1,2,\cdots,6; j=1,2,\cdots,7$)，$k_{it}$ 表示第 t 种机床在第 i 月内的维修台数($t=1,2,\cdots,5; i=1,2,\cdots,6$).

由所给条件，在不停车维修的情况下，可得第 t 种机床的月工作台时如表 1.6，一台机床维修一次需 160 台时. 则得整数规划模型：

$$
\begin{aligned}
\max z = &\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{7} c_j x_{ij} - a\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{7} s_{ij} \\
s.t.\quad & s_{ij} + x_{ij} - d_{ij} - s_{i+1j} = 0, && i = 1,2,\cdots,6; j = 1,2,\cdots,7, \\
& \sum_{j=1}^{7} a_{tj} x_{ij} \leqslant b_t - 160k_{it}, && t = 1,2,\cdots,5; i = 1,2,\cdots,6, \\
& \sum_{i=1}^{6} k_{it} = l_t, && t = 1,2,\cdots,5, \\
& 0 \leqslant k_{it} \leqslant l_t \text{ 且为整数}, && i = 1,2,\cdots,6; t = 1,2,\cdots,5, \\
& 0 \leqslant s_{ij} \leqslant 100 \text{ 且为整数}, && i = 2,3,4,5,6; j = 1,2,\cdots,7, \\
& s_{1j} = 0, s_{7j} = 50, && j = 1,2,\cdots,7, \\
& 0 \leqslant x_{ij} \text{ 且为整数}, && i = 1,2,\cdots,6; j = 1,2,\cdots,7.
\end{aligned}
$$

五、选址问题

实际中常遇到在某区域内选择工厂或仓库或其它公共设施的位置，以满足区域内客户的需要，并且使总的“费用”最少的问题．这类问题称为选址问题．

选址问题可分为离散型选址问题和连续型选址问题．离散型选址问题中，在所论区域内事先拟定了有限个供选择的位置，而且客户到这些位置的“费用”已知．而连续型选址问题的可能位置可以在所论区域内的任何位置．

选址问题又可根据需选设施是一个或多个分成单源选址问题和多源选址问题．在多源选址问题中，不但要确定新设施的位置，还须确定哪个设施应为哪些客户服务，因此，多源选址问题也称为选址—分配问题．

例1.9 某公司拟定在东、西、南三区建立门市部，拟议中有7个地址 $A_1, A_2, \cdots, A_7$ 可供选择，并规定：

在东区，A_1, A_2, A_3 中至多选两个；

在西区，A_4, A_5 中至少选一个；

在南区，A_6, A_7 中至少选一个；

若选 A_i，投资 b_i 元，每年可获利估计为 c_i 元，总投资不超过 b 元．问如何选择门市部的地址使公司的年利润最大．

解 设
$$
x_i = \begin{cases} 1, & \text{选择 } A_i, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases}
$$

则得 $0-1$ 规划模型：

$$
\max z = \sum_{i=1}^{7} c_i x_i
$$

$$
\begin{aligned}
s.t.\quad & \sum_{i=1}^{7} b_i x_i \leqslant b, \\
& x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 2, \\
& x_4 + x_5 \geqslant 1, \\
& x_6 + x_7 \geqslant 1, \\
& x_i = 0 \text{ 或 } 1, \qquad i = 1,2,\cdots,7.
\end{aligned}
$$

下一例子将涉及到客户的分配问题.

例1.10 某地区拟议在m个地点建立仓库以存放某种物资,用于供应n个客户. d_i为仓库选在地址i所需的固定费用,c_{ij}为地址i的仓库供应第j个客户全部需求量时的运费.问题是如何选择仓库地址使总费用最少.

解 设x_{ij}为地址i的仓库供应第j个客户需求量的百分数.

$$y_i=\begin{cases}1, & \text{在地址 } i \text{ 建立仓库},\\ 0, & \text{否则},\end{cases}$$

则可得混合整数规划模型:

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{m}d_iy_i$$

$$\begin{aligned}
s.t.\quad & \sum_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant ny_i, && i=1,2,\cdots,m,\\
& \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=1, && j=1,2,\cdots,n,\\
& x_{ij}\geqslant 0, && i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n,\\
& y_i=0\text{ 或 }1, && i=1,2,\cdots,m.
\end{aligned}$$

上一例子中的仓库均为新建的,但许多实际问题是在已有的基础上扩建或增建或关闭一些仓库以满足客户的需要,如下例.

例1.11 某公司有两个工厂A_1,A_2生产某种产品,生产能力分别为Q_1,Q_2,有四个容量为M_k的仓库$B_k(k=1,2,3,4)$存放该产品,工厂和仓库均可向n个客户$C_j(j=6,7,\cdots,n+5)$供货,客户需求量为$q_j(j=6,7,\cdots,n+5)$. 现公司有如下打算:扩建仓库B_1,其月费用为e_1,库容量增加M;新建仓库B_5,月费用为e_5,库容量为M_5;关闭仓库B_2或B_3,关闭后可节约费用e_2或e_3;并要求总的仓库个数不得超过四个. 已知工厂A_i向仓库或客户供货的运费每单位为$c_{ij}(i=1,2;j=1,2,3,4,5$为向仓库供货的运费,$j=6,7,\cdots,n+5$为向客户供货的运费). 第k个仓库向第j个客户供货的单位运费为$d_{kj}(k=1,2,3,4,5;j=6,7,\cdots,n+5)$. 见图1.2. 以上费用均由公司负担. 问公司该作何选择可使总费用最少.

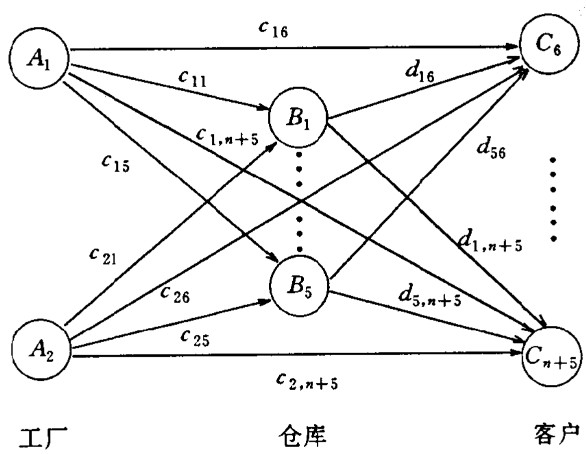


图 1.2

解 设 x_{ij} 表示每月从工厂 A_i 运至仓库或客户的数量($i=1,2$;$j=1,2,3,4,5$ 为运至仓库的数量,$j=6,7,\cdots,n+5$ 为运至客户的数量),y_{kj} 表示仓库 B_k 运至客户 C_j 的数量($k=1,2,3,4,5$;$j=6,7,\cdots,n+5$).

$$\delta_1=\begin{cases}1, & \text{扩建 } B_1,\\ 0, & \text{否则};\end{cases} \qquad \delta_2=\begin{cases}1, & \text{保留 } B_2,\\ 0, & \text{关闭 } B_2;\end{cases}$$

$$\delta_3=\begin{cases}1, & \text{保留 } B_3,\\ 0, & \text{关闭 } B_3;\end{cases} \qquad \delta_5=\begin{cases}1, & \text{新建 } B_5,\\ 0, & \text{否则};\end{cases}$$

则可得混合整数规划模型:

$$\min z=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n+5}c_{ij}x_{ij}+\sum_{k=1}^{5}\sum_{j=6}^{n+5}d_{kj}y_{kj}+e_1\delta_1+e_2\delta_2+e_3\delta_3+e_5\delta_5$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n+5}x_{ij}\leqslant Q_i,\quad i=1,2 \quad \text{(生产能力限制)}$$

$$\sum_{j=6}^{n+5}y_{kj}\leqslant\sum_{i=1}^{2}x_{ik},\quad k=1,2,3,4,5 \quad \text{(仓库输出限制)}$$

$$\sum_{i=1}^{2}x_{ij}+\sum_{k=1}^{5}y_{kj}\geqslant q_j,\quad j=6,7,\cdots,n+5 \quad \text{(客户需求限制)}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{2}x_{i1}\leqslant M_1+M\delta_1\\ &\sum_{i=1}^{2}x_{ij}\leqslant M_j\delta_j,j=2,3,5\\ &\sum_{i=1}^{2}x_{i4}\leqslant M_4\end{aligned}\right\}\text{(库容限制)}$$

$$\delta_2+\delta_3+\delta_5\leqslant 2 \quad \text{(仓库数量限制)}$$

$$x_{ij}\geqslant 0,\quad i=1,2;j=1,2,\cdots,n+5,$$

$$y_{kj}\geqslant 0,\quad k=1,2,\cdots,5;j=6,7,\cdots,n+5,$$

$\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_5$ 取 0 或 1.

例 1.12 计划在某地区建一发电厂,为 n 个城市服务.每个城市的供电所用输电线与该电厂连接起来.各供电所坐标为$(a_j,b_j)(j=1,2,\cdots,n)$,平均用电量为 $q_j(j=1,2,\cdots,n)$,输电费(元/度/公里)为 $p_j(j=1,2,\cdots,n)$.为使总的输电费最少,电厂应建在何处.

解 设电厂坐标为(x,y),电厂电量不受限制.从(x,y)到任一供电所的输电费为

$$p_jq_j[(x-a_j)^2+(y-b_j)^2]^{\frac{1}{2}},$$

从(x,y)到所有供电所的总输电费为

$$z=\sum_{j=1}^{n}p_jq_j[(x-a_j)^2+(y-b_j)^2]^{\frac{1}{2}},$$

问题为求使 z 最小的 x,y.这是一个无约束非线性规划模型.

例 1.13 在上例中,若计划建两个电厂,问厂址该选在何处以及各厂该负责供应哪几个城市的用电可使总的输电费最少.