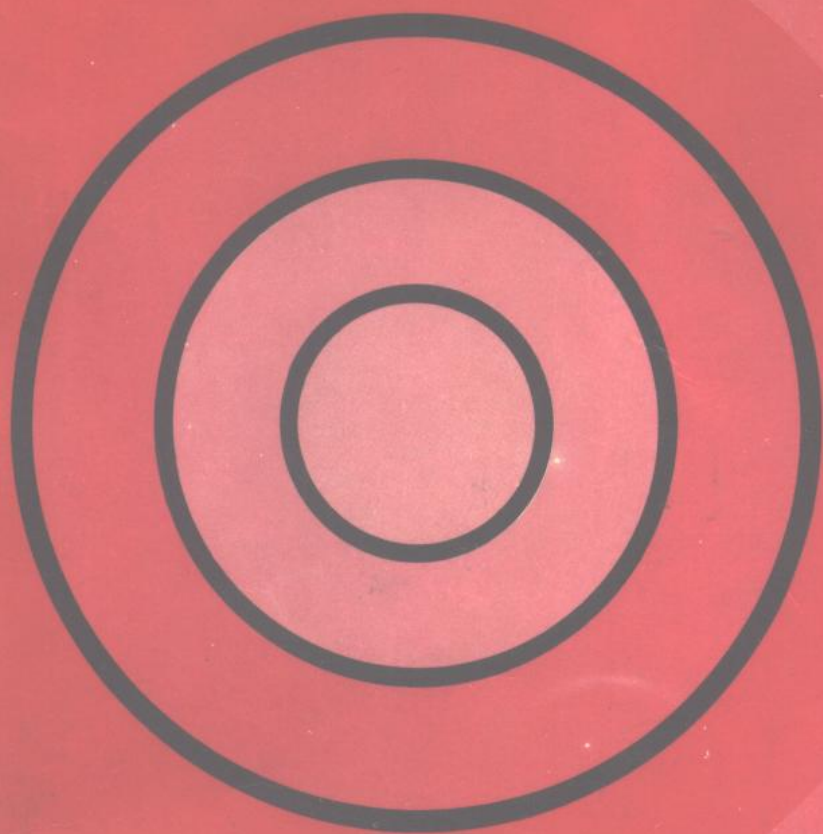


數函變復

莊圻泰 編著
張南岳



數 函 變 復

莊 圻 泰 編 著
張 南 岳

儒林圖書公司 印行

版 權 所 有
翻 印 必 究

復變函數

編 著 者：莊圻泰、張南岳

原 出 版 者：北京大學出版社

出 版 者：儒林圖書有限公司

地 址：台北市重慶南路一段121號8樓23室

電 話：3118971-3 • 3144000

郵政劃撥：0106792-1

吉豐印刷廠有限公司承印

板橋市三民路二段居仁巷一弄53號

行政院新聞局局版台業字第4336號

1991年5月初版

NT\$ 200

序 言

復變函數論發展到今天已成為一個內容非常豐富、應用極為廣泛的數學分支。作為大學必修課程的復變函數主要講述解析函數的基本理論和有關方法，通常它包括以下三方面內容：Cauchy 積分理論、Weierstrass 級數理論和 Riemann 共形映照理論。

本書是以我們在北京大學數學系多年講授復變函數課程的講義為基礎改寫成的。力圖做到取材精煉、安排緊湊、簡明扼要地敘述解析函數的基本內容。這門課程的研究對象除單值解析函數外，還不可避免地要涉及到初等多值函數，而這往往是教師難以講授、學生難以掌握的一部分內容。為此我們着重在第二章第三節分析產生多值性的原因，說明如何找出支點以及在什麼樣的域內多值函數可以分出單值解析分支，在什麼樣的域內則不能，並列舉了若干例子。幾年來的教學實踐表明，這樣做的效果是良好的。留數定理的一個重要應用是計算積分，書中對常見的積分計算作了比較系統的分類，使學生學完這部分內容後有所遵循。共形映照是解決實際問題的一個有力工具，書中專門安排了一節（第八章第三節）列舉若干共形映照的實例，目的在於使學生能應用初等函數實現常見圖形的共形映照。

選做一定數量的習題是掌握基本理論與方法的重要環節，本書除第八章第一節外，每節都配有足夠數量的習題，少數較難的習題都有提示。

北京大學 莊圻泰 張南岳

目 錄

第一章 復數	(1)
§ 1 復數的幾何表示	(1)
§ 2 復數的運算	(3)
§ 3 三角不等式	(10)
§ 4 復數的球面表示與擴充復平面	(12)
第二章 復變函數	(15)
§ 1 復平面上的點集	(15)
§ 2 解析函數的概念	(23)
§ 3 初等解析函數及其所構成的映照	(36)
第三章 Cauchy 定理與 Cauchy 公式	(64)
§ 1 積分	(64)
§ 2 Cauchy 定理	(70)
§ 3 Cauchy 公式	(89)
第四章 解析函數的級數展式	(105)
§ 1 函數項級數. Weierstrass 定理	(105)
§ 2 Taylor 級數	(122)
§ 3 Laurent 級數	(130)
第五章 留數定理及其應用	(148)
§ 1 留數定理	(148)
§ 2 留數定理對亞純函數的應用. 幅角原理與 Rouché 定理	(155)

§ 3	留數定理對積分計算的應用	(166)
第六章	整函數與亞純函數	(190)
§ 1	整函數展為無窮乘積	(190)
§ 2	亞純函數展為部分分式	(208)
§ 3	I' 函數	(216)
第七章	解析開拓	(230)
§ 1	冪級數的解析開拓	(230)
§ 2	函數越過邊界的解析開拓. 對稱原理	(242)
第八章	共形映照	(251)
§ 1	共形映照的若干性質	(251)
§ 2	分式綫性變換	(254)
§ 3	共形映照的例子	(271)
§ 4	Riemann 存在定理與邊界對應	(283)
§ 5	多角形的共形映照. Schwarz-Christoffel 公式	(296)

第一章 復 數

在中學代數課程里，由解一元二次方程引進了復數的概念，並且闡明了它的若干基本性質。在這裡，爲了今后的方便，我們來敘述有關復數的一些內容。

§ 1 復數的幾何表示

大家知道，所謂復數，即形如 $z = x + iy$ 的數，其中 i 是純虛數單位 $\sqrt{-1}$ ， x 與 y 都是實數，分別稱爲復數 z 的實部和虛部，記作 $\operatorname{Re} z$ 和 $\operatorname{Im} z$ 。

在平面上取正交坐標系 Oxy 。我們用坐標爲 (x, y) 的點 P 表示復數 $z = x + iy$ 。這樣復數就與平面上的點一一對應。實數與 x 軸上的點一一對應， x 軸稱爲實軸；虛數 iy 與 y 軸上的點一一對應， y 軸稱爲虛軸。與復數建立了這種對應關係的平面就稱爲復平面。今后，復數與復平面上的點就不再區別了。全體復數或復平面記作 C 。

有時我們也用向量 $\overrightarrow{OP}$ 來表示復數 $z = x + iy$ ， x 與 y 分別是 $\overrightarrow{OP}$ 在 x 軸和 y 軸上的投影。 $\overrightarrow{OP}$ 的長度 r 稱爲復數 z 的模，記作 $|z|$ 。顯然(圖 1-1)

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1)$$

容易看出

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|, \quad (2)$$

$$|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|.$$

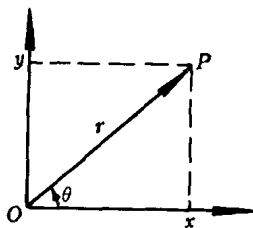


圖 1-1

假如 P 點不是原點(即 $z \neq 0$)，則稱向量 $\overrightarrow{OP}$ 與 x 軸正向之間的夾角 θ 爲 z

的幅角, 記作 $\text{Arg}z$. 幅角的方向規定為: 反時針方向為正, 順時針方向為負. 顯然, 一個復數有無窮多個幅角. 若 θ_1 是復數 z 的一個幅角, 那么

$$\theta = \theta_1 + 2k\pi \quad (k \text{ 是整數})$$

就給出了復數 z 的全部幅角. 在復數 z 的幅角中, 有一個 θ_0 滿足 $0 \leq \theta_0 < 2\pi$, θ_0 稱為復數 z 的主要幅角, 或幅角的主值, 記作 $\arg z$. 注意, 有時為了方便起見, 也取其他的主值範圍, 如 $-\pi \leq \theta_0 < \pi$. 但是不管 $\arg z$ 的範圍如何取, 總有

$$\text{Arg}z = \arg z + 2k\pi \quad (k \text{ 是整數}).$$

在平面上只有原點(即復數 $z=0$)的幅角是不定的.

如果取 Ox 為極坐標系的極軸, 那么, 復數 z 的模和幅角分別是向量 $\vec{OP}$ 的極徑和極角. 由直角坐標系與極坐標系的關係, 我們有

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \quad (3)$$

其中 r, θ 分別是復數 z 的模和幅角. 所以

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta). \quad (4)$$

(4)式稱為復數 z 的三角形式.

(3)式表明可以用 z 的模和幅角來表示 z 的實部和虛部, 反之亦然.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & z \text{ 在第 I 象限;} \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & z \text{ 在第 II, III 象限;} \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi, & z \text{ 在第 IV 象限.} \end{cases} \quad (5)$$

這裡 $0 \leq \arg z < 2\pi$.

復數 $x-iy$ 稱為復數 $z=x+iy$ 的共軛復數, 記作 $\bar{z}$. 顯然, z 和 $\bar{z}$ 關於實軸是對稱的(圖 1-2). 根據定義, 容易驗證

$$|\bar{z}| = |z|, \quad (6)$$

$$\operatorname{Arg} \bar{z} = -\operatorname{Arg} z, \quad (7)$$

$$\overline{(\bar{z})} = z. \quad (8)$$

注意, (7) 式的意義是: 對於 $\operatorname{Arg} \bar{z}$ 中的任意一個值, 必有 $\operatorname{Arg} z$ 中的一個值, 使得它們僅相差一個符號, 反之亦然.

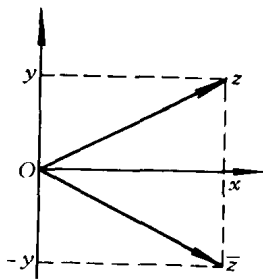


圖 1-2

習 題

1. 求下列復數的模和幅角的主值

$$1+i, \quad i, \quad 2-3i, \quad -1+i, \quad -5+12i.$$

2. 證明

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|) \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|.$$

§ 2 復數的運算

在定義運算之前, 我們首先注意兩個復數 $z_1 = x_1 + iy_1$ 與 $z_2 = x_2 + iy_2$ 是無大小可言的. 我們稱 z_1, z_2 是相等的, $z_1 = z_2$, 如果 $x_1 = x_2, y_1 = y_2$.

復數的加法和減法定義如下:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

若用 $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}$ 分別表示復數 z_1, z_2 對應的向量, 則復數的加減法與向量的加減法一致. 因此按平行四邊形法則, 向量 $\overrightarrow{OP}$ 表示復數 $z_1 + z_2$ (圖 1-3). 一般地, 若有 n 個復數 $z_k = x_k + iy_k (k=1, 2, \dots, n)$, 它們對應的向量是 $\overrightarrow{OP_k} (k=1, 2, \dots, n)$, 那麼 $z_1 + z_2 + \dots + z_n = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + i(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$ 對應的向量 (圖 1-4) 是

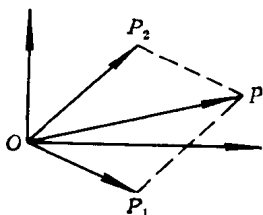


圖 1-3

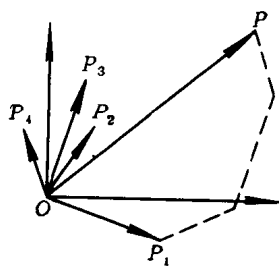


圖 1-4

$$\vec{OP} = \vec{OP}_1 + \vec{OP}_2 + \dots + \vec{OP}_n.$$

由于 $\vec{P_2P_1} + \vec{OP_2} = \vec{OP_1}$ (圖 1-5), 所以

$$\begin{aligned}\vec{P_2P_1} &= \vec{OP_1} - \vec{OP_2} \\ &= (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2),\end{aligned}$$

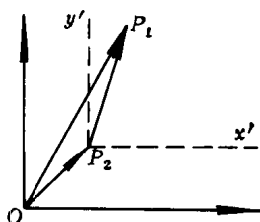


圖 1-5

即向量 $\vec{P_2P_1}$ 表示復數 $z_1 - z_2$. $\vec{P_2P_1}$ 的長為 $|z_1 - z_2|$, 也就是復平面上點 z_1, z_2 之間的距離.

如果過 P_2 作 P_2x', P_2y' 分別與 Ox 軸和 Oy 軸平行, 那么 $\vec{P_2P_1}$ 與 P_2x' 之間的夾角就是 $z_1 - z_2$ 的幅角.

在定義乘法時, 如同對實數作乘法一樣, 我們只要注意 $i^2 = -1$, 即

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).\end{aligned}$$

按照定義,

$$z\bar{z} = |z|^2. \quad (9)$$

我們假設 $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, 于是

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2 \{ (\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) \\ &\quad + i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_2 \cos\theta_1) \} \\ &= r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2) \}.\end{aligned}$$

因此得到

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|. \quad (10)$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2. \quad (11)$$

這表明：乘積的模等于模的乘積，乘積的幅角等于幅角的和。根據這一結果，我們可以給乘法一個幾何解釋。在 Ox 軸上取單位綫段 OI ，在綫段 Oz_2 上作 $\triangle Oz_2 P$ 和 $\triangle OIz_1$ 相似，那麼 P 點就表示乘積 $z_1 z_2$ (圖 1-6)。

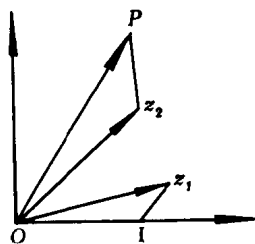


圖 1-6

設 $z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$ ($k=1, 2, \dots, n$)。應用歸納法得到

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n \{ \cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) \},$$

即 $r_1 r_2 \cdots r_n$ 和 $\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n$ 分別是 $z_1 z_2 \cdots z_n$ 的模和幅角。特別地，有

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta. \quad (12)$$

上式稱為 de Moivre 公式。

假設 $z_1 \neq 0$ 。由(9)式知， $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ 。我們定義除法 $\frac{z_2}{z_1}$ 為 $\frac{1}{z_1} \cdot z_2$ 。由(10)式得到

$$\left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \left| \frac{1}{z_1} \right| |z_2| = \frac{|z_2|}{|z_1|^2} |z_2|.$$

再由(6)式得到

$$\left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}. \quad (13)$$

由(11)式得到

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \operatorname{Arg} z_2 + \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z_1}\right) = \operatorname{Arg} z_2 + \operatorname{Arg} \bar{z}_1.$$

所以再由(7)式得到

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \operatorname{Arg} z_2 - \operatorname{Arg} z_1. \quad (14)$$

為了說明除法的幾何意義，只需說明運算 $w=1/z$ 的幾何意義。為此，我

們把這個運算分解爲

$$z' = \frac{1}{\bar{z}}, \quad w = \bar{z}'.$$

如果 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, 那么

$$z' = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{r}(\cos\theta + i\sin\theta).$$

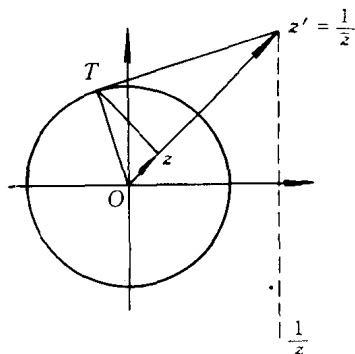


圖 1-7

這表明 θ 也是 z' 的一個幅角, z' 和 z 的模的乘積爲 1. 因此, 若 $|z| < 1$, 過 z 點作射綫 Oz 的垂綫, 交單位圓周于 T , 過 T 作單位圓周的切綫, 這條切綫與 Oz 的交點就是 z' . 事實上, 由直角三角形 $\triangle OzT$ 和 $\triangle OTz'$ 相似(圖 1-7)就得到

$$|z||z'| = 1, \quad \arg z' = \arg z.$$

若 $|z| > 1$, 情形是類似的, 只需先作切綫再作垂綫. 當 $|z| = 1$ 時, $z' = z$, 兩點重合.

從 z 到 z' 稱爲關於單位圓周的對稱變換. 至于 $w = \bar{z}'$, 顯然是關於實軸與 z' 對稱. 因此 $w = 1/z$ 是關於單位圓周的對稱變換與關於實軸對稱的復合.

例 1 求復數 $z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$ ($-\pi \leq \theta < \pi$) 的三角形式.

$$|z| = \sqrt{(1 + \cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| = 2 \cos \frac{\theta}{2}.$$

$$\arg z = \arctan \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} = \frac{\theta}{2}.$$

所以(圖 1-8)

$$z = 2 \cos \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right).$$

例 2 通過計算 $(5-i)^4(1+i)$, 證明 Machin 公式

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$

$$\begin{aligned}(5-i)^4(1+i) &= (24-10i)^2(1+i) \\ &= (476-480i)(1+i) \\ &= 4(239-i).\end{aligned}$$

若取 $-\pi \leq \arg z < \pi$, 那么

$$\arg(5-i)^4 = -4 \arctan \frac{1}{5}, \quad \arg(1+i) = \frac{\pi}{4},$$

$$\arg(239-i) = -\arctan \frac{1}{239}.$$

所以, 由(11)式得到

$$\frac{\pi}{4} - 4 \arctan \frac{1}{5} = -\arctan \frac{1}{239},$$

即

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$

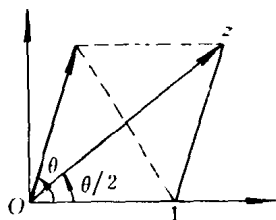


圖 1-8

習 題

1. 驗證 $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

2. 將下列復數表為 $a+bi$ 的形式:

$$\frac{1}{i}, \quad i^*, \quad \frac{1-i}{1+i}, \quad (1+i\sqrt{3})^3, \quad (1+i)^n + (1-i)^n,$$

其中 n 是正整數.

3. 設 $z = \cos \theta + i \sin \theta \neq 1$, 求 $\frac{1+z}{1-z}$.

4. 設 $|z| = r > 0$, 證明 $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2} \left(z + \frac{r^2}{z} \right)$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{r^2}{z} \right)$.

5. 證明: 若 $z = x + iy$ 不是負實數, 則存在唯一的 ζ , $\operatorname{Re} \zeta > 0$, 使得 $\zeta^2 = z$.

6. 證明: 以復數 α, β, γ 為頂點的三角形(由 α 到 β 再到 γ 是反時針方向), 其面積為

$$\frac{1}{2}|\gamma-\beta|^2 \operatorname{Im}\left(\frac{\alpha-\gamma}{\gamma-\beta}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta + \bar{\beta}\gamma + \bar{\gamma}\alpha).$$

7. 求復數 $z_0 \neq 0$ 關於直線 (1) $x-y=0$; (2) $x+y=0$ 的對稱點.

8. 求: (1) $1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta$;

(2) $\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta$.

9. (1) 若 $z = \cos\theta + i\sin\theta \neq 0$, 則 $\frac{1}{z} = \cos\theta - i\sin\theta$;

(2) 若 $z \neq 0$, 定義 $z^{-n} = 1/z^n$. 證明 de Moivre 公式對於所有的整數 n 成立.

10. 證明 $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$, 並說明其幾何意義.

11. 證明: (1) $|1 + z_1\bar{z}_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_2|^2)(1 + |z_1|^2)$;

(2) $|1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$;

(3) $|z_1(1 + |z_2|^2) - z_2(1 + |z_1|^2)|^2 = |z_1 - z_2|^2 |1 - z_1\bar{z}_2|^2 - (z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2)^2$.

12. 證明當 $|z_1| = 1$ 或 $|z_2| = 1$ 之一成立時, $\left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right| = 1$. 若 $|z_1| = |z_2| = 1$, 上式在什麼條件下成立?

13. 證明復數 α, β, γ 共綫的充要條件是

$$\begin{vmatrix} \alpha & \bar{\alpha} & 1 \\ \beta & \bar{\beta} & 1 \\ \gamma & \bar{\gamma} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

14. 證明: 以 z_1, z_2, z_3 為頂點的三角形與以 w_1, w_2, w_3 為頂點的三角形相似, 其充要條件是

$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

15. 證明圓周的方程是 $z\bar{z} + \beta\bar{z} + \bar{\beta}z + c = 0$, 其中 c 是實常數, $|\beta|^2 - c > 0$. 求其圓心和半徑.

16. 求過不共綫三點 z_1, z_2, z_3 的圓周的方程.

17. 設 $z_1 \neq 0, 1$, 且 $0, z_1, z_2$ 三點不共綫, 證明: 過點 $z_1, z_2, 1/\bar{z}_1$ 的圓周的圓心和半徑分別爲

$$\frac{z_1(1 + |z_2|^2) - z_2(1 + |z_1|^2)}{z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2}, \quad \frac{|z_1 - z_2| |1 - \bar{z}_1z_2|}{|z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2|},$$

且點 $1/\bar{z}_2$ 位于這個圓周上.

18. 若 $|z_1| = \lambda |z_2|, \lambda > 0$, 則 $|z_1 - \lambda^2 z_2| = \lambda |z_1 - z_2|$.

19. 設 $z_1 \neq z_2, \lambda$ 是不爲 1 的正實數, 證明 $\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = \lambda$ 是一圓周, 並求其圓心和半徑.

20. 設點 z 在圖 1-9 所示的角內 $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$,

且 $|z - 1| < \cos \alpha$. 證明 $\frac{|1 - z|}{1 - |z|} \leq \frac{2}{\cos \alpha}$.

21. 證明 $\sqrt[n]{z}$ (復數 z 的 n 次方根) 的 n 個值是正 n 邊形的各頂點.

22. 設 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, 且 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, 證明 z_1, z_2, z_3 是內接于單位圓周的正三角形的頂點.

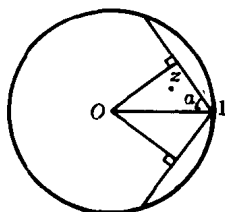


圖 1-9

23. 證明: 復數 α, β, γ 爲一個正三角形頂點的充要條件是 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$.

24. 證明: 復平面上三個不同點 α, β, γ 作成以 γ 爲頂點的等腰三角形, 當且僅當存在正實數 k , 使得

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \cdot \frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta} = k.$$

25. 設 $|z_k| = 1 (k = 1, 2, 3, 4)$, 證明 z_k 是矩形頂點的充要條件是 $\sum_{k=1}^4 z_k = 0$.

26. 證明恒等式

$$\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \cdots \sin \frac{n-1}{n} \pi = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

揭示：考慮 $(z+1)^n - 1$ 不為零的 $n-1$ 個根的乘積。

27. 利用 de Moivre 公式，證明：

(1) 當 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 時，

$$\sin(2m+1)\theta = \sin^{2m+1}\theta P_m(\cot^2\theta),$$

其中 $P_m(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_{2m+1}^{2k+1} x^{m-k}.$

(2) $\sum_{k=1}^m \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3}.$

28. 求下列關係式的幾何意義：

(1) $\left| \frac{z-z_1}{z-z_2} \right| \leq 1 \quad (z_1 \neq z_2); \quad (2) \operatorname{Re} \frac{z-z_1}{z-z_2} = 0 \quad (z_1 \neq z_2);$

(3) $\operatorname{Im} \frac{z-z_1}{z-z_2} = 0 \quad (z_1 \neq z_2); \quad (4) 0 < \arg \frac{z+i}{z-i} < \frac{\pi}{4};$

(5) $0 < \operatorname{Re}(iz) < 1; \quad (6) |z+c| + |z-c| \leq 2a, a > 0, |c| < a;$

(7) $|z-2| - |z+2| > 3; \quad (8) |z| < 1 - \operatorname{Re} z;$

(9) $\operatorname{Re} \frac{z(z+i)}{z-i} > 0; \quad (10) |z^2-1| = \lambda \quad (\lambda > 0).$

§ 3 三角不等式

根據初等幾何中三角形兩邊之長的和不小於第三邊的長，兩邊之長的差不大於第三邊的長；以及復數加減法的定義，我們立即得到

$$|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad (15)$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|. \quad (16)$$

這兩個式子稱為三角不等式。下面給出它們的分析證明。

由(9)式，有

$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2). \end{aligned}$$

因爲 $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1 \bar{z}_2| = |z_1| |z_2|$, 所以

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| |z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2,$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

(15)式得證. 因爲 $|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2|$, 由(15)式得到

$$|z_1| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|, \quad |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|.$$

同理有 $|z_2| - |z_1| \leq |z_1 - z_2|$, 所以

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

(16)式得證.

從證明的過程中, 我們看到, (15)式的等號成立的充要條件是 $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = |z_1| |z_2| = |z_1 \bar{z}_2|$. 但是一個復數 z 的實部等於其模的充要條件是: z 爲非負實數, 即 $z \geq 0$. 因此(15)式成爲等式, 其充要條件是 $z_1 \bar{z}_2 \geq 0$, 也就是

$$\frac{z_1}{z_2} |z_2|^2 \geq 0 \quad (\text{若 } z_2 \neq 0), \quad \frac{z_1}{z_2} \geq 0.$$

于是得到(15)式的等號成立的充要條件是 z_1, z_2 有相同的幅角.

例 3 設 $z \neq 0, -\pi \leq \arg z < \pi$, 證明

$$|z - 1| \leq ||z| - 1| + |z| |\arg z|.$$

設 $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta), -\pi \leq \theta < \pi$.

$$\begin{aligned} |z - 1| &= |z - |z| + (|z| - 1)| \leq |z - |z|| + ||z| - 1| \\ &= |z| |(\cos \theta + i \sin \theta) - 1| + ||z| - 1| \\ &= |z| \sqrt{(\cos \theta - 1)^2 + \sin^2 \theta} + ||z| - 1| \\ &= |z| \left| 2 \sin \frac{\theta}{2} \right| + ||z| - 1| \\ &\leq |z| |\theta| + ||z| - 1|. \end{aligned}$$

即得到(圖 1-10)

$$|z - 1| \leq ||z| - 1| + |z| |\arg z|.$$

習 題

1. 證明 $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$, 並求出等號成立的條