

船舶耐波性

陶尧森 编著



上海交通大学出版社

U661
T44
(2)

386097

船舶耐波性

(第二版)

陶尧森 编著



U661
T44
(2)

上海交通大学出版社

内 容 简 介

本书内容包括三大部分,即平稳随机过程、海浪和由海浪引起的船舶的一系列随机现象。以六章篇幅叙述平稳随机过程的基本原理、海浪谱、船在波浪中运动的实用计算方法、船在波浪中的阻力增加和失速、波浪诱导弯矩、甲板淹湿、砰击等。本书的特点是着重物理概念的阐述,避免繁复的数学推导,系统介绍目前比较成熟的船舶耐波性的各种预报方法。书中除叙述多种问题的基本原理外,还提供了船舶设计应用的具体计算方法和有关参考资料。

本书为高等院校船舶及海洋工程专业本科生“船舶耐波性”课程的教材,亦可供从事船舶设计、性能和结构强度教学的教师、科研工作者及工程技术人员参考。

D209/33



船 舶 耐 波 性 (第二版)

出版:上海交通大学出版社

(上海市华山路1954号) 邮政编码:200030

发行:新华书店上海发行所

印刷:立信常熟印刷联营厂

开本:787×1092(毫米) 1/16

印张:12 字数:292,000

版次:1996年1月 第1版

印次:1996年3月 第1次

印数:1—1,200

ISBN 7-313-01585-2/U·051

定价:9.80元

第二版说明

1985年《船舶耐波性》一书出版后,深受读者的厚爱。这些年来,读者要求能及时提供新版书。80年代末以来,教学上为本科生设置了“船模试验技术”、“计算船舶流体力学”、“波浪能利用动力学”等课程。“船舶耐波性”只为本科生开设。编者研究生新开设了“船舶耐波性非线性理论及其长期预报”、“计算方法及数据分析”等课程。从而使原来在“船舶耐波性”课程中的内容有所分流和进一步发展。特别是进入90年代计算机技术在工程设计中已普及和广泛应用,设计初期已无必要应用现成的系列计算和模型试验结果。近年,气垫船、小水线面双体船及各类高速船耐波性研究进展很大,有形成专门方向的趋势。考虑到这些因素,修订时对原书作了较大变动。其中第四、五、九、十和十一章的内容分别纳入相应的其他课程,并删除耐波性系列计算、试验资料 and 快艇的内容。减摇和水舱等内容归入编者开设的“波浪能利用动力学”,有关横摇的非线性特性在“船舶耐波性非线性理论及其长期预报”课程中叙述。对于这一调整,恳请广大读者批评指正。编者力争后两门教学用书也能尽早与读者见面,并以此献给交通大学建校100周年纪念和编者从教40周年。

编著者

于上海交通大学

1995年3月

目 录

第一章 船舶耐波性的随机过程	1
§ 1.1 随机函数的概念和特性	1
§ 1.2 平稳随机过程和谱	3
§ 1.3 平稳随机过程的幅值分布及其特征	9
§ 1.4 泊松随机过程	18
§ 1.5 平稳线性系统中的频谱变换	18
第二章 海浪	21
§ 2.1 风和浪的基本概念	21
§ 2.2 规则波	25
§ 2.3 风浪的成长	28
§ 2.4 海浪谱的概念	30
§ 2.5 海浪谱的表达式	35
§ 2.6 方向波谱	40
§ 2.7 浪级和海况	41
§ 2.8 实用中风浪等级的划分	46
第三章 船在波浪中的运动实用计算	52
§ 3.1 船在波浪中运动的概述	52
§ 3.2 船在规则波中的纵摇和升沉运动	55
§ 3.3 船在规则波中的横荡、横摇和首尾摇运动	59
§ 3.4 二因次阻尼系数和附连质量计算	64
§ 3.5 船舶的自摇周期	77
§ 3.6 船在不规则波中的运动	83
第四章 甲板淹湿的预报	85
§ 4.1 概述	85
§ 4.2 升沉加速度和相对运动的预报	85
§ 4.3 甲板淹湿和螺旋桨出水等预报	89
第五章 船舶纵向波浪弯矩和砰击	99
§ 5.1 船舶纵向波浪弯矩的概念	99
§ 5.2 波浪诱导弯矩长期分布的预报	107
§ 5.3 波浪诱导弯矩的极值估算	116
§ 5.4 砰击的物理现象	123
§ 5.5 砰击压力的计算	123
§ 5.6 不规则波中砰击概率和压力的预报	134
§ 5.7 砰击弯矩的预报	138
第六章 船在波浪中阻力的增加和失速	145

§ 6.1 波浪中阻力增加的概念	145
§ 6.2 波浪中阻力平均增值的理论计算	149
§ 6.3 不规则波中阻力平均增值的预报	152
§ 6.4 船舶名义失速	161
§ 6.5 海上允许航速的估算	172
参考文献	178
中外文人名对照表	182

第一章 船舶耐波性的随机过程

§ 1.1 随机函数的概念和特性

概率论中的随机变量是指某些保持不变的确定条件下由实验测得的随机量，它的统计特征可在实验中得到一个唯一的值，但预先未知。在实际问题中常常必须涉及到在实验的测量过程中连续改变的随机变量，譬如：在某一海区的许多点连续记录的波高，船在海上航行时连续记录的各种摇摆运动，舰炮用人工控制或自动瞄准过程中炮弹的轨道与理论轨道的偏差，船体在波浪中所受的弯矩和应力。这些在实验的测量过程中随时间而变化的随机变量称为随机函数。它是研究随机性表现为过程形式的随机现象。对于实验结果由随机函数表示的这样一种物理过程，称为随机过程。可以形象地把它比喻为“随机现象的动力学”。相应地随机变量就像在“静力学”中研究随机现象。

随机函数在每次实验测量中所取的具体形式称为随机函数的现实。假使对随机函数引入一组实验，可得到一族随机函数的现实。如船在海上受波浪扰动要产生摇摆运动，而且是时间的函数。船航行一次作为一次实验，那末摇摆角随时间变化的曲线就是随机函数的一个确定的现实。不同次数的航行得到随机函数的不同现实。综合几次航行的结果可得一族随机函数的现实。

用大写字母 $X(t)$, $Y(t)$, ... 表示随机函数以区别于非随机函数 $x(t)$, $y(t)$, ...。现研究某个随机函数 $X(t)$ 。设对它进行了 n 次独立的实验，得到 n 个现实（见图1-1），分别记为 $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ 。若时间取为某固定值 t_1 ，这时的随机函数变成了一般意义下的随机变量。若引进一族现实在给定的时间 t_1 ，就得到随机变量 $X(t_1)$ 在 n 次实验中所取的 n 个值。

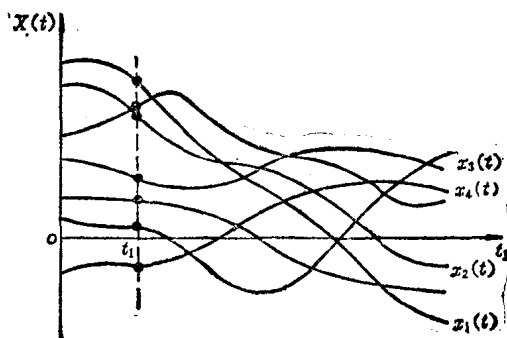


图1-1 随机函数的现实

由此可见，随机函数兼有随机变量和函数的特点，即若固定某一时间值，它变成一般的随机变量；而每次实验记录所得的现实为通常的非随机函数。

对于随机函数也引入类似于随机变量数字特征的那种最简单的基本特征，它们对于解决许多实际问题已是足够的了，所不同的是随机函数的特征在一般的情况下不是确定的数，而是函数。

随机函数 $X(t)$ 的数学期望以下列方式确定。考虑对应于一个给定的 t_1 值的随机函数，这时它变成了通常的随机变量，于是可确定它的数学期望，记作 $E[X(t_1)]$ ：

$$E[X(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} \omega f(\omega, t_1) d\omega \quad (1-1)$$

式中: $f(x, t_1)$ 是随机函数在 $t = t_1$ 的分布密度。显然, 在一般情况下数学期望应依赖于 t , 它是某个 t 的函数:

$$m_1(t) = E[X(t)] \quad (1-2)$$

这样, 随机函数 $X(t)$ 的数学期望就是非随机函数 $m_1(t)$, 它对自变量 t 的每个值, 等于相应时间的随机变量的数学期望。事实上, 随机函数的数学期望是某个平均函数, 随机函数就在其附近变动。图1-2中以细线指明随机函数的现实, 而粗线是它的数学期望。

非随机函数 $\sigma_x^2(t)$ 称为随机函数 $X(t)$ 的方差, 对于给定的 t_1 值, 它等于相应 t_1 值的随机变量的方差, 即中心化随机变量平方的数学期望, 可表示为:

$$\sigma_x^2(t_1) = E[(X(t_1) - E[X(t_1)])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X(t_1)])^2 f(x, t_1) dx \quad (1-3)$$

对于每一个 t 值, 随机函数的方差表示随机函数的可能现实对于平均值的离散状况。

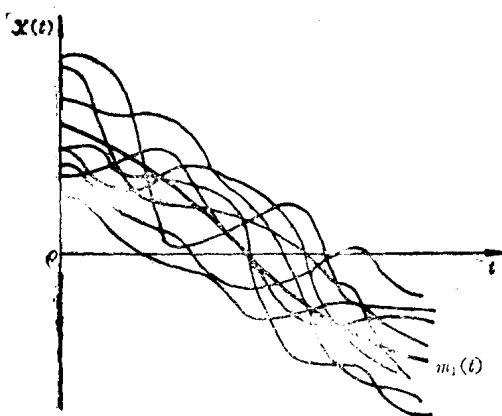


图1-2 随机函数的数学期望

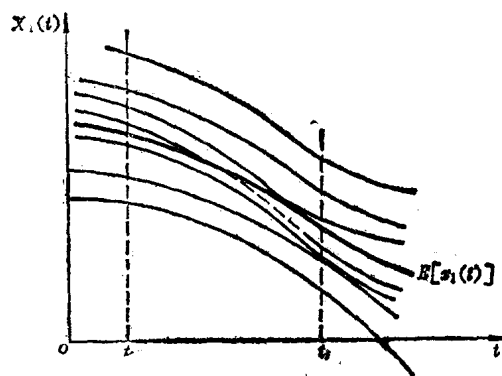


图1-3 平滑的随机函数

$\sigma_x(t)$ 称为随机函数的均方差(或标准差)。

随机函数 $X(t)$ 的均方值是其平方的数学期望。因此, 在 $t = t_1$ 时的均方值可表示为:

$$E[X^2(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, t_1) dx \quad (1-4)$$

根据式(1-3)可得方差、均方值和数学期望的关系为:

$$\sigma_x^2(t_1) = E[X^2(t_1)] - E[X(t_1)]^2 \quad (1-5)$$

从力学意义上讲是惯性矩的移轴定理。

数学期望、方差和均方值是随机函数很重要的特征, 但对于描述随机函数的基本特性它们还不够。为了说明这个问题, 现讨论两个随机函数 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$, 图1-3和图1-4直观地表示它们的一族现实。

随机函数 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ 有几乎一样的数学期望和方差, 但这两个随机函数的特点显著地不同。由图1-3给出的随机函数 $X_1(t)$, 它的特点是平滑而缓慢地随时间变化着。如考虑 t_k 和 t_l 的两个不同时刻, 则成为两个随机变量 $X_1(t_k)$ 和 $X_1(t_l)$ 。当 t_k 和 t_l 很近时, $X_1(t_k)$ 和 $X_1(t_l)$ 的值有密切的关系: 如 $X_1(t_k)$ 取为某个值, 则 $X_1(t_l)$ 将以相当大的概率临近于 $X_1(t_l)$ 所取的值。至于随机函数 $X_2(t)$, 如图1-4所示它有着显著的、不规则摆动的特点。具有这种特点的函数, 随着 t 之间的距离加大, 它们各值之间的关系很快就消失。

显然,这两个随机函数的内部结构是完全不同的,但是这种不同无论从数学期望或方差都不能觉察到,必须用专门的特征来表示,这种特征称相关函数。它表征随机函数在不同时间所

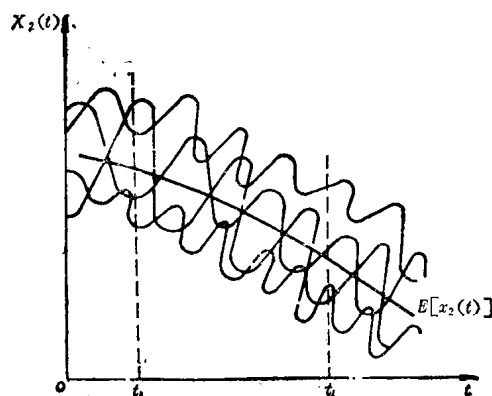


图1-4 显著摆动的随机函数

取值之间的相关程度,可用两不同时刻的一阶中心矩的乘积来描述,也称相关矩。

随机函数 $X(t)$ 的相关函数是一个二元的非随机函数 $R_x(t_k, t_l)$, 它是每一对 t_k 和 t_l 值时中心化随机变量乘积的数学期望, 也称随机函数 $X(t)$ 的两变量 $X(t_k)$ 和 $X(t_l)$ 的相关矩。可表示成:

$$R_x(t_k, t_l) = E[\{X(t_k) - m_1(t_k)\} \cdot \{X(t_l) - m_1(t_l)\}] \quad (1-6)$$

从图1-3和图1-4看出, $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ 两随机函数有相同的数学期望和方差, 但相关函数 t_k 完全不同。由式(1-6)可知, 随机函数 $X_1(t)$ 的相关函数随 t_k 和 t_l 的区间增大而减小得很慢, 但 $X_2(t)$ 的相关函数则随区间增大而迅速减小。

当相关函数 $R_x(t_k, t_l)$ 两自变量相同时, 即 $t_k = t_l = t$, 则

$$R_x(t_k, t_l) = R_x(t, t) = E[(x(t) - m_1(t))^2] = \sigma_x^2(t) \quad (1-7)$$

即这时相关函数就是方差。所以, 方差作为随机函数的特征之一的必要性没有了。数学期望和相关函数将是随机函数的基本特征。

§ 1.2 平稳随机过程和谱

在自然科学和工程技术中经常会碰到这样一类随机过程, 它的过去情况对未来情况的发生有着很强的影响。其中很重要的一类是平稳随机过程。它的特点粗略地说起来就是统计特性不随时间的推移而变化。

这类过程会在平均值周围连续地随机波动, 如海浪总在其静水面周围连续波动; 船受波浪扰动引起的摇摆围绕其初始平衡位置连续地随机摆动等等。它们的平均振幅(或摇幅)和振荡特性随着时间的增长基本上没有变化。显然, 对于平稳随机过程它离运动的起点是充分远的, 运动的初始条件对平稳随机过程已不起作用。

因此, 每一个平稳过程都可作为很长时间内研究的继续; 研究平稳过程时初始时间可任意选取。如果在任一段时间内研究平稳过程, 所得特征应和所取时间起点无关。平稳过程是“无头无尾”的。

由此可知, 如果一个随机函数 $X(t)$ 所有的概率特征都与时间 t 无关, 则称此函数 $X(t)$ 是平稳的。

下面将叙述平稳随机函数的统计特征。

因为平稳随机函数的变化与时间无关, 因此必然要求平稳随机函数的数学期望是常数:

$$m_1(t) = m_1 = \text{const} \quad (1-8)$$

显然, 平稳随机函数应满足的第二个条件是方差等于常数:

$$\sigma_x^2(t) = \sigma_x^2 = \text{const} \quad (1-9)$$

还要建立平稳随机函数的相关函数应满足的条件。现约定随机函数 $X(t)$ 在图上以虚线形式表示出, 此曲线应理解为 $X(t)$ 的全部可能现实的集合而不是某个具体的现实。用图 1-5 表示 $X(t)$, 设在式 $R_x(t_k, t_l)$ 中, $t_l = t_k + \tau$ 且把 $R_x(t_k, t_l)$ 作为随机函数在两个时间相隔为 τ 的两个随机变量来研究。显然, 若随机过程是平稳的, 则在不同位置时由式(1-6)给出的相关函数值是相同的。如图 1-5 中的相关函数 $R_x(t_k, t_k + \tau)$ 和 $R_x(t'_k, t'_k + \tau)$ 相同。一般说来, 平稳随

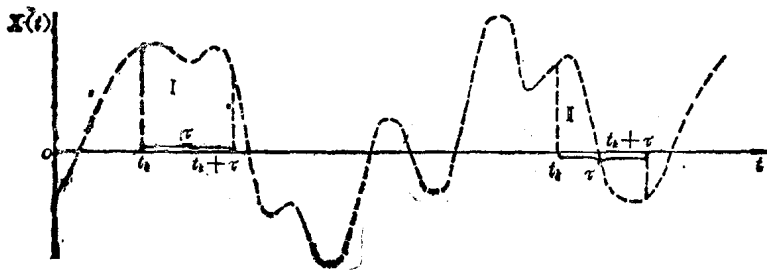


图1-5 相关函数表达意义

机过程的相关函数不依赖于第一个自变量在 t 轴上的位置, 只依赖两自变量的区间长度 τ :

$$R_x(t_k, t_k + \tau) = R_x(\tau) \quad (1-10)$$

因而, 平稳随机过程的相关函数只是一个自变量的函数。应注意, 式(1-9)的条件只是式(1-10)的特殊情况。实际上, 在式(1-10)中令 $t_k + \tau = t, \tau = 0$, 则得:

$$R_x(t, t) = R_x(0) = \sigma_x^2(t) = \sigma_x^2 = \text{const} \quad (1-11)$$

这样 式(1-11)给出的条件就是平稳随机函数应该唯一满足的。因为知道相关函数, 也就决定了随机过程的方差。

在多数实际情况中, 数学期望 $m_1(t)$ 和相关函数 $R_x(\tau)$ 足够充分地描述了平稳随机过程的统计特征。只限于利用这两个统计矩的理论称为随机过程的相关理论。

平稳随机过程常有各态历经的显著特征。为了从数学意义上描述随机过程 的各态历经性, 必须先说明随机函数的两种可能取平均的方法。其一是, 在某给定的时间, 对随机函数的总体进行平均, 称为统计平均(或称对空间的平均)。在这种情况下平均值依赖于作为参数的时间 t 。另一方法是将随机函数某一给定的现实, 对时间进行平均。

具有各态历经性的平稳随机过程, 用数学的语言来说, 就是过程对于(充分长的)时间的平均近似地等于观察总体的平均。

为了进一步弄清随机过程各态历经性的意义, 现研究有如下特点的随机函数: 该随机函数的每一个现实绕同一个数学期望振荡, 且它们的平均振幅相等。在这些现实中任取一个, 且想象将此现实的实测时间 T 放长。显然, 当 T 很大时这个现实可很好地代表随机函数整个的性

质。这个现实对时间的平均值应为随机函数的数学期望的近似值；现实对于该平均值的偏差平方的平均值应为方差的近似值等。对于这样的随机函数，我们说它有各态历经性质。

各态历经性建立在：随机过程每一个现实能“代表”所有可能的现实；一个充分长的时间的现实能代替同一个时期现实的总体。换句话说，在时间过程中，一给定的现实平均说来经历着该总体中任一现实所经历的变化。

因此，在相关理论范围内，只研究单个现实并计算该过程的有关特征就足够了。实际上通常只取一个现实（充其量是几个现实），只是由于各态历经特征，才允许将理论与实测结果加以比较。因为理论上用的是统计平均，而实践上得到的是时间平均。

在处理海浪和船的运动、波浪中船体所受的弯矩等假设满足各态历经性，甚至对水池造的波通常也认为具有各态历经性。

下面将叙述刻划随机过程内部结构的谱。

任何随机函数的相关函数具有对称性。因此对于平稳随机过程，设 $t_1 - t_k = \tau$ ，则有：

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau) \quad (1-12)$$

即相关函数 $R_x(\tau)$ 是偶函数。

因为任一偶函数都可展开成只有余弦项的富里哀级数，所以将 $R_x(\tau)$ 在区间 $(-T, T)$ 上展开：

$$R_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{xk}^2 \cdot \cos \omega_k \cdot \tau \quad (1-13)$$

式中系数为：

$$\sigma_{xk}^2 = \frac{2}{T} \int_0^T R_x(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau \quad (1-14)$$

且 $\omega_k = k \frac{\pi}{T}$ 。这时，平稳随机过程可分解成频率为 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ 的谐和振荡，而且这些振荡的幅值是随机变量。

可以证明，式(1-13)中的系数 σ_{xk}^2 就是各谐和分量的方差。同样可以得到平稳随机函数的方差等于所有谐和分量的方差之和，即

$$\sigma_x^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{xk}^2 \quad (1-15)$$

因为 σ_{xk}^2 是频率的函数，所以式(1-15)说明了随机函数 $X(t)$ 的方差依不同的频率且按一定的方式分布着：有一部分频率对应的方差较大，而别的则较小。这种不同频率的方差分布称为平稳随机函数的方差谱，而工程实用上习惯称为能量谱或功率谱，简称平稳随机过程的谱。

如果把某一频率时方差的平均密度作为纵坐标，以 $\Delta\omega$ 表示相邻两频率间的距离， $\Delta\omega = \frac{\pi}{T}$ ，可得方差谱的阶梯分布图，如图1-6所示。

在 $\Delta\omega$ 区间的方差平均密度为：

$$S_x^{(T)}(\omega_k) = \frac{\sigma_{xk}^2}{\Delta\omega}$$

显然，图上每一小长方形面积是相应频率 ω_k 时的方差 σ_{xk}^2 。总面积是随机函数的方差

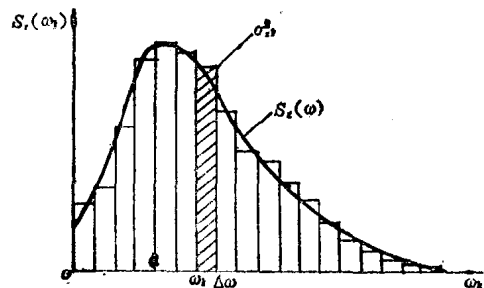


图1-6 方差谱分布图

σ_x^2 。

如果无限增多间隔,且令 $\Delta\omega \rightarrow 0$,则图1-6的阶梯曲线将无限接近于光滑曲线 $S_x(\omega)$ 。后者描述了方差连续谱的频率分布密度,而函数 $S_x(\omega)$ 称为方差谱密度,或能量谱密度、功率谱密度,简称平稳随机函数 $X(t)$ 的谱密度。

显然,曲线 $S_x(\omega)$ 下的面积,由前述可知应等于随机函数的方差 σ_x^2 :

$$\sigma_x^2 = \int_0^\infty S_x(\omega) d\omega \quad (1-16)$$

而用 m_n 表示谱密度 $S_x(\omega)$ 对原点的 n 阶矩,即

$$m_n = \int_0^\infty \omega^n S_x(\omega) d\omega \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (1-17)$$

当 $n=0$ 时,式(1-17)和式(1-16)相等:

$$m_0 = \int_0^\infty S_x(\omega) d\omega = \sigma_x^2$$

即谱密度 $S_x(\omega)$ 对原点的0阶矩就是随机函数 $X(t)$ 的方差 σ_x^2 。

这样,就引进了描述随机过程频率结构的谱密度。谱密度是刻画平稳随机过程的一个新特征。然而这个性质不是独立的,它完全取决于该过程的相关函数。

下面将导出谱密度与相关函数的关系。

以 $\Delta\omega$ 除式(1-14)的两边,并以 $\Delta\omega = \frac{\pi}{T}$ 代入式(1-14)的右边,则得

$$S_x^{(T)}(\omega_k) = \frac{2}{\pi} \int_0^T R_x(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau \quad (1-18)$$

将 $\sigma_{xk}^2 = S_x^{(T)}(\omega_k) \Delta\omega$ 代入式(1-13),得

$$R_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} S_x^{(T)}(\omega_k) \cos \omega_k \tau \Delta\omega \quad (1-19)$$

如 $T \rightarrow \infty, \Delta\omega \rightarrow 0$,这时方差的变量 ω_k 趋近于一个连续变化的变量 ω ;和式将趋近于与变量 ω 有关的积分;方差的平均密度 $S_x^{(T)}(\omega_k)$ 趋近于方差密度 $S_x(\omega)$ 。因此,式(1-18)和(1-19)分别成为:

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau \quad (1-20)$$

和

$$R_x(\tau) = \int_0^\infty S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega \quad (1-21)$$

式(1-20)是用相关函数来表示谱密度;而式(1-21)是用谱密度来表示相关函数。上述把谱密度 $S_x(\omega)$ 和相关函数 $R_x(\tau)$ 相互联系起来表示的公式在数学上称为富里哀变换。

如果知道了平稳随机函数的相关函数,则从式(1-20)可得到它的谱密度,由式(1-16)得方差。

在许多场合为了数学变换的简便,常利用复数的谱分解式、相关函数和谱密度等。对于复数的富里哀变换,如果将式(1-20)和式(1-21)用欧拉公式代换:

$$\cos \omega \tau = \frac{e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}}{2}$$

并令 $S_x(\omega) = 2S_x^*(\omega)$ 且积分上下限取为 $+\infty$ 和 $-\infty$,则得:

$$S_x^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (1-22)$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (1-23)$$

在式(1-23)中令 $\tau=0$,则得随机函数的方差:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega) d\omega \quad (1-24)$$

比较复数谱密度 $S_x^*(\omega)$ 和实数谱密度 $S_x(\omega)$ 可知, $S_x^*(\omega)$ 是定义在 $(-\infty, \infty)$ 上,且纵坐标比 $S_x(\omega)$ 小1倍,如图1-7所示。因此,在实际应用时可取实数谱,为了运算的简单也常取复数谱。

下面叙述用实验数据决定相关函数。

从实验结果计算相关函数是在已知随机函数的有限个现实的情况下,通过这些现实可以得到数学期望及相关函数的近似值。然后求这些近似值的平均数。显然,这个处理方法是复杂的。事实上,对于平稳随机过程它有各态历经的显著特性。因此,它可用一个充分长时期的现实代替一个时期现实的总体。这样,随机函数特征可近似地用关于时间的平均而不是用实验测量的总体的平均决定。如当时间 T 充分大时,数学期望 m_1 有下列近似公式:

$$m_1 \approx \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (1-25)$$

式中: $x(t)$ 是随机函数的一个现实。

对任何 τ 给出相关函数的近似公式。这时不采用整个区间 $(0, T)$,而是某个较小的区间。因为 $[x(t+\tau) - m_1]$ 只对 $(t+\tau) \leq T$ 为已知。根据相关函数的定义,算出关于时间的平均值为:

$$R_x(\tau) \approx \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - m_1][x(t+\tau) - m_1] d\tau \quad (1-26)$$

实用上常取有限和代替积分式(1-25)和(1-26)。把所讨论的一个现实定义的时间 T 分成 Δt 的 n 等分,以 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 表示。把积分式(1-25)表示为子区间 Δt 的和,且在子区间内 $x(t_i)$ 可近似看成常数,以其代替积分符号下的函数 $x(t)$ (见图1-8),则得近似公式:

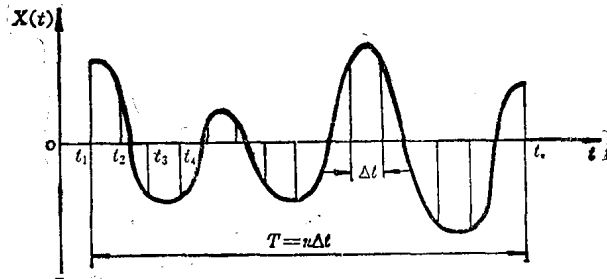


图1-8 相关函数的有限和形式

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(t_i) \quad (1-27)$$

同样地,可在 τ 为 $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$ 时计算 $R_x(\tau)$, 例如

$$\tau = k\Delta t = \frac{kT}{n}$$

计算积分式(1-26)。把积分区间:

$$T - \tau = T - \frac{kT}{n} = \frac{n-k}{n} T$$

等分为 $n-k$ 个长度为 Δt 的区间,则得

$$R_x\left(\frac{kT}{n}\right) = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} [x(t_i) - m_1(\tau)][x(t_{i+k}) - m_1(\tau')] \quad (1-28)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} m_1(\tau) &= \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} x(t_i) \\ m_1(\tau') &= \frac{1}{n-k} \sum_{i=1+k}^n x(t_i) \end{aligned} \right\} \quad (1-29)$$

由式(1-28)对 $k=0, 1, 2, \dots$ 计算出相关函数之值,直到使相关函数变为零或开始在 τ 轴附近发生不大的振荡为止。

如果把相关函数 $R_x(\tau)$ 表示成标准相关函数 $r_x(\tau)$,则

$$r_x\left(\frac{kT}{n}\right) = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} \frac{[x(t_i) - m_1(\tau)][x(t_{i+k}) - m_1(\tau')]}{\sigma_x(\tau) \cdot \sigma_x(\tau')} \quad (1-30)$$

式中: $m_1(\tau)$ 和 $m_1(\tau')$ 由式(1-29)计算,而 $\sigma_x^2(\tau)$ 、 $\sigma_x^2(\tau')$ 为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^2(\tau) &= \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} x(t_i)^2 - m_1(\tau)^2 \\ \sigma_x^2(\tau') &= \frac{1}{n-k} \sum_{i=1+k}^n x(t_i)^2 - m_1(\tau')^2 \end{aligned} \right\} \quad (1-31)$$

对于海浪以及船的运动、加速度、船体应力等在 T 充分大时的一个现实,可按式(1-29)、(1-30)、(1-31)进行能谱的分析。

例如取时间间隔 $\Delta t = 0.5$ 秒,读出相应的 $x(t_1), x(t_2), x(t_3), \dots, x(t_n)$ 。计算到 $n = 450$, $k = 1, 2, 3, 4, \dots, 60$ 为止,作成相关函数,如图 1-9。

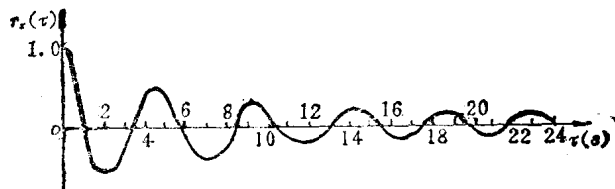


图1-9 相关函数曲线

然后,按照式(1-20)的关系展开成:

$$S'_x(\omega) = \frac{\Delta t}{\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^n r_x \left(\frac{kT}{n} \right) \cos \left(\frac{kT}{n} \right) \omega \right\} \quad (1-32)$$

求出标准谱密度函数，对此乘以方差

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(t_i)^2 - m_1^2 \quad (1-33)$$

即可得相应现实的谱密度 $S_x(\omega) = \sigma_x^2 \cdot S'_x(\omega)$ 。

§ 1.3 平稳随机过程的幅值分布及其特征

一、正态随机过程

对于波面纵坐标、船摇摆角和船体在波浪中所受应力的现实，分析其瞬时值表明它们每一个值对总和所起的作用均相仿，因此这些瞬时值总和的分布近似于正态分布，常称其为正态随机过程。

正态分布有如下形式的概率密度：

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-(x-m_1)^2/2\sigma_x^2} \quad (1-34)$$

分布曲线形状如图1-10所示。曲线最高点纵坐标为 $1/\sigma_x \sqrt{2\pi}$ ，对应于横轴上 $x = m_1$ 点；分布密度之值随着与 m_1 的距离增大而逐渐减小，当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时曲线渐趋于横轴。

式(1-34)中的参数 m_1 就是随机变量的数学期望，而 σ_x 则是均方差。由式可看出， m_1 是分布曲线的对称中心。如改变 m_1 值，则分布曲线形状不变而沿横轴移动 图 1-11 所示。均方差 σ_x 是描述分布曲线本身的形状。曲线最大纵坐标与 σ_x 成反比，当 σ_x 增大时，分布曲线越平坦地伸展在横轴上。图1-12中画出了三条 $m_1 = 0$ ； $\sigma_x = 1, 2, 3$ 的正态分布曲线。

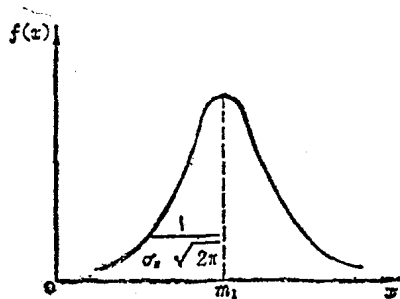


图1-10 正态分布曲线

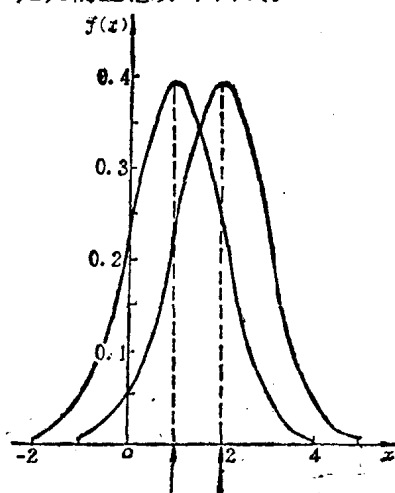


图1-11 $\sigma_x = 1$, $m_1 = 1$ 和 2 的正态分布曲线

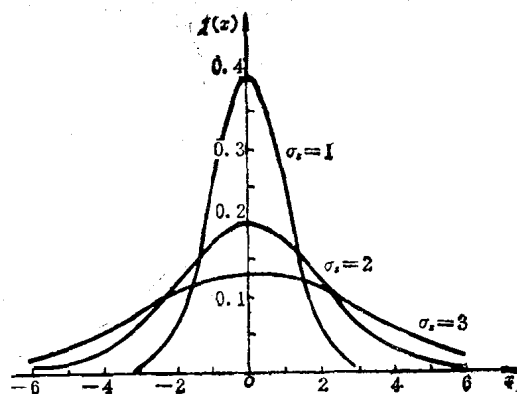


图1-12 $m_1=0, \sigma_x=1, 2, 3$ 的三条正态分布曲线

二、随机过程幅值的雷利分布

随机过程的任何一个现实可作出其谱密度随频率变化的关系。如果谱密度限制在一个狭频带中,谱所包含的频带宽度与此频带的中央频率相比很小,则称此过程为狭带随机过程。这一现实 $x(t)$ 是缓慢变化的余弦曲线,如图1-13所示。 $x(t)$ 被一对光滑的包络线 $A(t)$ 限定了它缓慢变化的幅值。幅值是从零线至 $x(t)$ 的峰或谷的垂直距离。

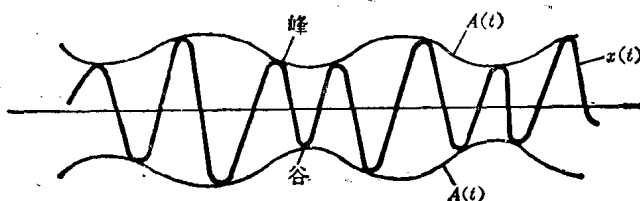


图1-13 狭带随机过程的时间历经

狭带过程的现实可用下式表示:

$$x(t) = A(t) \cos\{\omega_0 t + \varepsilon(t)\} \quad (1-35)$$

式中包络曲线 $A(t)$ 和相位 $\varepsilon(t)$ 是时间的函数,而 ω_0 是谱带的平均频率,或称主频率。

对于随机过程的概率分布是正态的(即 $x(t_1), x(t_2), x(t_3), \dots, x(t_n)$ 具有正态概率密度函数),且有一个狭带谱,则可证明此过程的包络线概率密度函数符合于雷利分布。

因为式(1-35)又可表示为:

$$x(t) = x_c(t) \cos \omega_0 t + x_s(t) \sin \omega_0 t \quad (1-36)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} x_c(t) &= A(t) \cos \varepsilon(t) \\ x_s(t) &= A(t) \sin \varepsilon(t) \end{aligned} \right\} \quad (1-37)$$

所以可得:

$$\left. \begin{aligned} A(t) &= \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)} \quad (A(t) \geq 0) \\ \varepsilon(t) &= \text{tg}^{-1}\{x_s(t)/x_c(t)\} \quad (0 \leq \varepsilon(t) \leq 2\pi) \end{aligned} \right\} \quad (1-38)$$

根据式(1-36),可将包络用 $\dot{x}(t)$ 和 $x(t)$ 表示:

$$A(t) = \pm \sqrt{\{x(t)\}^2 + \left\{\frac{\dot{x}(t)}{\omega_0}\right\}^2} \quad (1-39)$$

如图1-14(a)中所示,在随机过程 $x(t)$ 的时间历经上画出一对光滑对称曲线,

为了要得到包络的概率密度函数,用随机过程的相平面(即 $x(t) \sim \dot{x}(t)$ 平面)讨论它的特征。在图1-14中给出一随机过程 $x(t)$,该过程的相轨线为图中(b)所示的一个随机形式的螺旋线。

正态过程的重要特性是从一个正态过程按线性运算而推得的任意随机过程都是正态过程。因此, $\dot{x}(t)$ 和 $x(t)$ 一样也是正态随机过程,且是互相独立的。它们分别具有零平均值和方差 $\sigma_{\dot{x}}^2, \sigma_x^2$,且 $\omega_0 = \sigma_{\dot{x}}/\sigma_x$ 。所以,它们的联合分布可由各自概率密度函数的乘积给出,即

$$f\left(x, \frac{\dot{x}}{\omega_0}\right) = \omega_0 f(x, \dot{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} e^{-A^2/2\sigma_x^2} \quad (1-40)$$

为了获得包络的概率密度函数,应用如下极坐标 (A, ϵ) :

$$\left. \begin{aligned} x &= A \cos \epsilon \\ \frac{\dot{x}}{\omega_0} &= A \sin \epsilon \end{aligned} \right\} \quad (1-41)$$

而 A 与 ϵ 的联合分布可由式(1-40)用改变变量的方法得到:

$$\left. \begin{aligned} f(A, \epsilon) &= \frac{A}{2\pi\sigma_x^2} e^{-A^2/2\sigma_x^2} \\ (0 \leq A < \infty, 0 \leq \epsilon \leq 2\pi) \end{aligned} \right\} \quad (1-42)$$

因此,包络 A 的概率密度函数为:

$$f(A) = \int_0^{2\pi} f(A, \epsilon) d\epsilon = \frac{A}{\sigma_x^2} e^{-A^2/2\sigma_x^2} \quad (0 \leq A < \infty) \quad (1-43)$$

此式称为雷利分布。

因为狭带随机过程的幅值在有限时间内可看成是随时间均匀变化的,所以其幅值的概率分布和它的包络概率分布相近,也是雷利分布。

式(1-43)的雷利分布也可用参数 R 的形式给出。使 $R = 2\sigma_x^2$ 可得另一形式的雷利概率分布:

$$f(A) = \frac{2A}{R} e^{-A^2/R} \quad (R > 0) \quad (1-44)$$

参数 R 可根据最大似然估计值得到:

$$R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i^2 \quad (1-45)$$

因此, R 可看作幅值变量 A 的均方值。而式(1-43)中的 σ_x^2 为正态随机过程的随机变量方差。

$f(A)$ 的分布形状如图1-15所示。雷利分布的众数是在 $A = \sqrt{R/2}$ 处,相应的 $f(A) =$

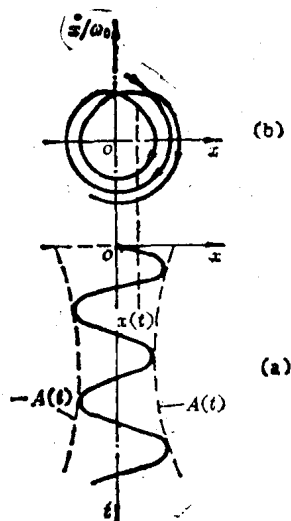


图1-14 狭带随机过程的相平面图