高等学校教学用書

# 微积分学

H. A· 福罗洛夫著

高等教育出版社

高等学校教学用書

# 微积分学

H. A. 福罗洛夫著
叶乃膺譯

本書是根据俄罗斯苏維埃联邦社会主义共和国教育部教科書出版社(Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР) 出版的福罗洛夫 (Н. А. Фролов) 著“微积分学”(Дифференциалвное и интегральное исчисление) 1955 年版譯出的，原書經俄罗斯苏維埃联邦社会主义共和国教育部审定为师范学院的教学参考書。

本書共分九章，主要講函数，导数与微分，不定积和定积分以及定积分的应用等等。

本書由叶乃膺翻譯成中文。


# 微　积　分　学

A. H. 福罗洛夫著

叶乃膺譯

高等教育出版社出版 北京宣武門内承恩寺7号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第051号)

京华印書局印刷　　新华書店發行

統一書号13010·386　開本850×1168 1/32　印張10 13/16　字數249,000　印數11 001–13,000

1958年1月第1版　1959年1月北京第3次印刷　定價(8) ¥1.10

# 序

本書是作为师范学院物理数学系的数学分析簡明教材第一部分的。

“微积分学”包括着“数学”專業的数学分析教学大綱中一年級所学的那一部分。

B.И.列文教授与 A.Φ.列昂节夫教授在我編写这本書时提出許多意見和指示，給以很大的帮助，借此机会我对他們深志謝忱。

承蒙高尔基城师范学院与沃龙涅什师范学院数学分析教研組的工作同志对拙稿提出許多宝貴的意見，我也在此致以眞摯的謝意。

H.福罗洛夫

1955 年

# 目　录

# 緒　論

以往和現在，数学都是在实际需要的影响之下發展起来的。恩格斯在他的一部著作中写道：

“和所有其他科学一样，数学起源于人們的实际需要——如田亩的丈量、容器的测定、时間的計算、以及力学的需要等等。”

在中学里学習的所謂初等数学很早以前就蔚然成科了；它滿足了最初的实际需要。

初等数学的主要特色就在于它是和常量打交道的。但是，在16—17世紀期間，由于自然科学的蓬勃發展，于是有必要来对变化的现象与变化的过程加以研究。客观实际給数学提供了重要的課題：如何去研究速度与加速度之类的变量？

初等数学——常量的数学——不能胜任这个任务，于是有必要去創立具有一些嶄新的概念和嶄新的研究方法的另一支数学。由于在16—18世紀間長期探討鑽研的結果，这一新支得以应运而生。

在数学上为了掌握运动的概念于是引入了变量。把研究物体运动的速率化成了去研究变量的变率。从而引起了新概念——导数与微分——的建立与研究。这样便形成了所謂微分学——变量的数学。

由此可見，微分学和初等数学主要的区别就在于：初等数学是和常量打交道的，而微分学則是和变量打交道的。

这个主要的区别恩格斯曾屡次强調地指出过。他在“反杜林論”一書中写道：

“数学本身由于研究变量而进入了辯証法的領域，而且，很明

显的正是辯証法的哲学家笛卡兒[①]使数学有了这种进步。变量数学对常量数学的关系，一般説来是和辯証思維对形而上学思維的关系一样的。”

在这本書的另一处他写道：

“初等数学、常量的数学、至少就总的說来，是在形式邏輯的范圍內活动；变量的数学——其中最重要的部分是無穷小量分析——按其本質来說不是別的，正是辯証法在数学方面的应用。”

探求一般的方法：以計算圖形的面积、立体的体积与表面积、曲綫的長、以及解决其他各种問題，便引起了积分学。

16—17 世紀数学的进展就在于：在这期間确立了积分問題就是微分問題的反面。如果將圖形的面积、立体的体积和表面积看成变量的話，那么这个重大的事实就得以确立。由此可見，变量的概念在这里起着特別显著的作用。

創立微积分学的特殊功勛是屬于牛頓[②]和萊布尼茲[③]的，但是不应該以为他們独个兒就發明了这支数学。关于这点恩格斯在“自然辯証法”中写道：

“笛卡兒的变量是数学中的轉折点。因此，运动与辯証法便进入了数学，因此，微积分学也就立刻成为必要的了，而它也就立刻产生出来，并且整个講来它是由牛頓和萊布尼茲所完成的，而不是由他們所發明的。”

在 18—19 世紀期間，数学分析的發展盛極一时，微积分学的基础予以巩固，数学分析的新支也如雨后春笋，紛紛勃起。

在数学分析的發展事迹中，俄罗斯和苏联的数学家們起着很

---

① 笛卡兒（R. Descartes, 1596—1650），著名的法国哲学家、物理学家、数学家和生理学家，其“几何学”一書奠定了解析几何的基础。——譯者。

② 牛頓（I. Newton, 1642—1727），天才的英国物理学家、力学家、天文学家和数学家。——譯者。

③ 萊布尼茲（G. W. Leibniz, 1646—1716），德国大数学家和唯心主义哲学家，他的祖先是斯拉夫人。——譯者。

大的作用。

彼得堡科学院院士欧拉[①]創作了第一部富有卓越見解的眞正微积分学敎本。欧拉的"無穷小量分析引論"一書标志着一个新时代的开端：这部巨著不仅在內容方面，同时就是在修辞工整方面，也都成了典范，它决定了数学科学的进一步發展。

达朗倍尔[②]在他致拉格蘭日的信中称欧拉为"魔怪"，以示欧拉的工作乃人类力量之所不逮。

拉普拉斯說得好："讀欧拉的著作、讀罢！他是我們大伙兒的导师。"

彼得堡科学院院士 M.B. 奥斯特罗格拉特斯基[③]在数学分析發展中起了杰出的作用，他在数学各支、特別是积分学中得到了一系列重要的結果，其中大多都已載入敎科書中而成为經典的东西。

数学分析最重要的概念之一——函数概念——其科学的定义就是非欧几何的創始人、天才的数学家 H. И. 罗巴契芙斯基[④]所給出的。

俄罗斯大数学家 П. Л. 契伯雪夫[⑤]在数学分析的發展中有着偉大的功績。

П. Л. 契伯雪夫創立了最佳近似函数的理論，由是开拓了数学

---

① 欧拉(L. Euler, 1707—1783)，偉大的数学家、物理学家与天文学家，彼得堡与柏林科学院院士，原籍瑞士，曾三十多年在俄罗斯居住和工作，其生平著作异常丰富，对于当时科学的發展，有重大的影响。——譯者。

② 达朗倍尔 (J. D'Alembert, 1717—1783)，法国数学家和物理学家。——譯者。

③ 奥斯特罗格拉特斯基 (M. B. Остроградский, 1801—1861)，俄罗斯数学家。——譯者。

④ 罗巴契芙斯基(H. И. Лобачевский, 1792—1856)，俄罗斯大数学家和唯物主义思想家。——譯者。

⑤ 契伯雪夫(П. Л. Чебышев, 1821—1894)，俄罗斯大数学家，彼得堡科学院院士和彼得堡数学学派的奠基人。——譯者。

分析的一个分支——函数構造論，这一分支主要是为苏联学者所継續發展的。全世界学者公認 П. Л. 契伯雪夫卓越的研究工作对整个数学的發展前途是有着巨大影响的。

例如，著名的瑞典数学家米塔格-列甫列尔就把 П. Л. 契伯雪夫誉为历代分析大师之一。

还有許多苏联数学家、都是以自己卓越的研究与杰出的成果丰富了数学分析的內容，我們就不在这里一一列举了。

# 第一章　实数集

## §1. 集

集这一概念是一种不能定义的原始概念。

我們只能設法对集这一概念的涵义加以說明，同时主要是采用一些例子来說明。

可以說到某一頁書上所有不同文字的集、某一方程之根的集、正整数的集、等等。

这样說来，我們認为集就是某些对象的聚合。

用以構成一集的对象称为这集的元素。

若$A$表示一个集，則記号

$$x \in A$$

就表示$x$是集$A$的一个元素（$x$含于$A$，$x$屬于$A$）。

若$x$不含于集$A$，則記作：

$$x \overline{\in} A.$$

若$x$是集$A$的任意元素的一般标志，則記作：

$$A = \{x\}.$$

例如，全体自然数（即正整数）的集$N$可以写成：

$$N = \{n\},$$

式中$n$表示任意自然数。

如果可能的話，有时在花括号中把集的全体元素一一列举出来。在有些情形下，要把集的全体元素列举尽净成为不可能时，便在花括号中写出几个元素，以能表出可据以得到这集的所有其余元素的規律为度。例如，集$N$可写成下列形狀：

$$N = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}.$$

若集 $A$ 的每一元素都含于集 $B$ 之中，則 $A$ 称为集 $B$ 的子集，或集 $B$ 的部分，并且記作：

$$A \subset B,$$

或

$$B \supset A.$$

例如，全体偶数的集是全体整数的集的子集。

注意恒有

$$A \subset A,$$

所以集的子集可能与全集相同。

若 $A \subset B$，而 $A$ 不与 $B$ 相同，則 $A$ 称为集 $B$ 的眞子集。

若二集 $A$ 与 $B$ 相同，即 $A \subset B$、且 $B \subset A$，則記作：

$$A = B.$$

連一个元素也沒有的集称为空集。

空集的概念并不是無用的，因为根据某一規則把諸元素聚合成为一集时，我們不見得就总能肯定这种元素一定存在，即是說所構成的集未見得就不是空集。

在这里所引进的概念和記号使我們有可能更簡單而明了地来陈述数学分析的各种定义和命題。

## §2. 有理数集

由一切正負整数、零以及正負分数所組成的集 $R$ 称为全体有理数的集。

这个集具有下列性質：

1. 有序性，就是对于任何兩个有理数 $a$ 与 $b$，下列三种关系中必定成立一个，而且只成立一个：

$$a = b,\ a < b,\ a > b,$$

并且，若 $a < b$、且 $b < c$，則 $a < c$。

2. 稠密性，就是在任何兩个有理数 $a$ 与 $b$ 之間必定含有一个有理数，从而含有無限个有理数。例如，若 $a < b$，則对于 $r = \dfrac{a+b}{2}$

来說，就有$a<r<b$。于是又可証明在$a$与$r$之間以及$r$与$b$之間都含有有理数，以下类推。

所有有理数都可用直綫上的点来表示。其作法如下：在双方無限的直綫上任取一点，作为数0的像。即得零点或原点。在原点右方任取一点，作为数1的像。这样就决定了長度的單位，就是以0与1为端点的綫段。現在用單位長度从原点向右量$n$次，得到的点就是数$n$的像，但是从原点向左量$n$次所得到的点就是数$-n$的像。用这样的方法就得到各个整点。要得到分数$\pm\frac{p}{q}$的像，只須把單位長度分成$q$个等分，然后取其中的一个等分从原点向右量$p$次，就得到$\frac{p}{q}$的像，而从原点向左量$p$次，就得到$-\frac{p}{q}$的像。这样就在直綫上得到了有理点集。

有理点集处处稠密，就是說隨便怎样短的綫段总含有一个有理点（从而，总含有無限个有理点）。

这个命題实际就是关于我們的直綫概念的公設。

但是可以看出：要表示有理数并用不了直綫上所有的点，这就是說，并不是直綫上所有的点都是有理点。

要証实这件事，只須作一个各边为單位長度的正方形，而把正方形的对角綫从原点向右放置在直綫上去。这样就得到一点$\alpha$。我們来証明$\alpha$不是有理点。事实上，設$\alpha$是有理点，即$\alpha$与原点的距离等于某一有理数$r$。但因这距离等于边長为1的正方形的对角綫長，故应有$r^2=2$。因此，假設$\alpha$是有理数，就等于說假設存在一个有理数、其平方等于2。現在証明：这种假設將导致矛盾。設$r^2=2$，其中$r$是有理数，即可写成既約分数$r=\frac{p}{q}$的形狀。由此$\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$，即$p^2=2q^2$，故$p^2$是偶数。因而$p$就必須是偶数，因为假如$p$不是偶数，則$p^2$也就不会是偶数（若$p$不能被2除尽，則$p^2=p\cdot p$也就不能被2除尽）。于是$p=2p'$，但由$(2p')^2=2q^2$即$2p'^2=q^2$，可見$q^2$必是偶数，从而$q$也就必是偶数，即$q=2q'$。于

是分数 $\frac{p}{q}=\frac{2p'}{2q'}$ 就是可約的了，然而我們原来假設数 $r$ 是旣約分数 $\frac{p}{q}$。这个矛盾就証明了幷不存在平方等于 2 的有理数，同时也就証明了 $\alpha$ 不是有理点。

## §3. 实数

要想用算术分析来研究直綫上的几何問題，就必須有这样的数集：使每一数都可用直綫上一定的点来表示，而直綫上的每一点都是一定的数的像。

作为这样的数集，有理数集是不能胜任的，因为有理点分布在直綫上尽管是处处稠密的，但它們幷未塡滿整个直綫——幷非直綫上所有的点都是有理点。因此，仅由有理数組成的数集还不够，必須添加新的元素，幷且还要使在所添的全体新数与直綫的全体非有理点之間能够建立起彼此的对应关系。

这个問題可由（仅仅借助于有理数来定义的）所謂無理数之引进而得以解决。

有理数与無理数統称为实数。

在这里，我們不預备去講实数的理論。我們仅仅指出：在全体实数所成的集与直綫上全体的点所成的集之間存在着一一对应的关系，也就是說，每一实数为直綫的一点所表示，幷且反过来說，直綫的每一点又为一实数所表示，这一实数就称为这一点的横坐标。

在实数与直綫的点之間的对应关系保持着一定的次序，也就是說，如果数 $\alpha_1$ 小于数 $\alpha_2$ 的話，那末与数 $\alpha_1$ 对应的点 $\xi_1$ 必位于与数 $\alpha_2$ 对应的点 $\xi_2$ 之左。

一直綫如其上諸点与諸实数之間有了一一对应的关系，那么就称这直綫为数直綫或数軸。

我們認为直綫是連續的，即具有下述公理所表示的性質：

若直綫的一个分割$(X, Y)$業已作成，也就是說，如果直綫的諸点已被分成了$X$与$Y$兩部，使$X$部的每一点都在$Y$部的每一点之左，那末必定存在一个确定这个分割的分界点$\xi$，使凡位于$\xi$之左的每一点都屬于$X$部，而凡位于$\xi$之右的每一点都屬于$Y$部。

由于諸实数与直綫的諸点之間有一一对应的关系，所以全体实数所成的集也具有連續性，这就是說，对于实数集的任一分割$(X, Y)$(其定义与直綫的分割相仿)必定存在一个确定这一分割的分界数$\alpha$，使凡小于$\alpha$的每一数都屬于$X$部，而凡大于$\alpha$的每一数都屬于$Y$部。①

## §4. 絕对值的性質

对于正实数$\alpha$，就把数$\alpha$本身称为它的絕对值。如果数$\alpha<0$，那末就把数$-\alpha$即与数$\alpha$对称的正数，称为它的絕对值。零的絕对值是零。

数$\alpha$的絕对值用$|\alpha|$来表示。

由絕对值的定义，可見：恒有

$$|\alpha|=|-\alpha|.$$

容易注意到：不等式

$$|\alpha|\leqslant C$$

与双重不等式

$$-C\leqslant\alpha\leqslant C$$

是等价的。

实际上，当$\alpha\geqslant 0$时这是显而易見的，因为在这种情形下，$|\alpha|=\alpha$。如果$\alpha<0$，那末$|\alpha|=-\alpha$，而不等式$-\alpha\leqslant C$与$-C\leqslant\alpha$是

① 这就是戴德金定理，其証明可参看較詳細的教程，在这里可以看成公理而不加証明。

戴德金(R. Dedekind, 1831—1916)，德国数学家，他的無理数理論对于数学分析的严格奠基起了重大的作用。——譯者。

等价的。

关于基本的算术运算，絕对值具有下列性質:

1. $$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|.$$

事实上，不等式

$$-|\alpha|\leqslant\alpha\leqslant|\alpha|,$$
$$-|\beta|\leqslant\beta\leqslant|\beta|$$

是显而易見的。把这些不等式边边相加，即得双重不等式

$$-(|\alpha|+|\beta|)\leqslant\alpha+\beta\leqslant|\alpha|+|\beta|,$$

而这是与不等式

$$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$$

等价的。

运用数学归納法可以証明这个性質对于任意多少項之和也能成立。

2. $$|\alpha-\beta|\geqslant|\alpha|-|\beta|.$$

实际上，因为

$$|\alpha|=|(\alpha-\beta)+\beta|\leqslant|\alpha-\beta|+|\beta|,$$

所以 $$|\alpha|-|\beta|\leqslant|\alpha-\beta|.$$

3. $$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|.$$

这个性質由乘积与絕对值的概念即可直接导出，并且在任意多少个因子的情形，这个性質都能成立。

4. $$\left|\frac{\alpha}{\alpha'}\right|=\frac{|\alpha|}{|\alpha'|}.$$

这个性質也是显而易見的。

## §5. 点集

在这里我們將要来討論以数直綫的点为元素的集。

因为在实数集与数直綫的点集之間的一一对应关系既已建

立，所以，如果用几何語言去表示算术概念的話，那末点的研究就是实数集的研究。例如，代替数、大于、小于这些概念，我們便說：点、在右、在左。其結果常常使数学上抽象而艰深的概念一变而为淺显而容易学懂的概念。

我們首先来定义一些最简單、而又最常見的点集。

1. 数直綫上所有满足条件

$$a \leqslant x \leqslant b$$

的点 $x$ 所成的集称为綫段或綫节，用 $[a, b]$ 来表示。

2. 数直綫上所有满足条件

$$a < x < b$$

的点 $x$ 所成的集称为区間或間隔，用 $(a, b)$ 来表示。

由是，綫段 $[a, b]$ 不仅含有介于 $a$ 与 $b$ 間的諸点，而且也含有这个綫段的端点，即 $a$、$b$ 二点本身；但是区間 $(a, b)$ 則只含有介于 $a$ 与 $b$ 間的諸点，至于区間的端点①——$a$ 与 $b$ 二点——那便不屬于这个区間了。这就是 $[a, b]$ 与 $(a, b)$ 二者的差別，这个差別初看起来好像不甚重要，但在数学分析的許多基本問題上却有着深刻的意义。

3. 数直綫上所有满足条件

$$a \leqslant x < b \quad 或 \quad a < x \leqslant b$$

的点 $x$ 所成的集称为半开区間，并且分别用 $[a, b)$ 或 $(a, b]$ 来表示。

区間与半开区間也可以是無限的。例如区間 $(-\infty, +\infty)$ 就是数直綫上全部的点所成的集；区間 $(a, +\infty)$ 就是所有满足条件 $a < x$ 的点 $x$、即数直綫上位于 $a$ 之右的所有諸点所成的集；半开区間 $(-\infty, a]$ 就是所有适合 $x \leqslant a$ 的点 $x$ 所成的集。

4. 包含所給点 $x_0$ 的任一区間称为点 $x_0$ 的鄰域。

我們来講与数直綫上的任一点集有关的几个概念的定义。

① 按"端点"一詞对于区間并不十分恰当，而宜改称"界点"。(可参看 H. H. Лузин 所著微分学，(中譯本系高等教育出版社出版，§ 20.)——譯者。