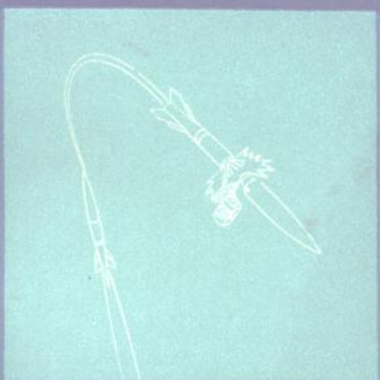
理论力学教学参考丛书

变质量力学基础

北京航空学院　程　勉　编



人民教育出版社

52·14

理论力学教学参考丛书

变质量力学基础

北京航空学院　程　　勉　编

人民教育出版社

内 容 提 要

本书是《理论力学教学参考丛书》的一册。

《理论力学教学参考丛书》是为了高等学校工科理论力学课程的教学需要而编写的，结合理论力学教材中的某些专题或内容加深加宽，作了进一步的阐述。这套教学参考丛书可作为理论力学教材的补充，供有关专业的大学生、研究生和教师在教学中参考选用。

本书内容包括：变质量质点运动的基本方程式、变质量质点动力学的普遍定理、具有控制面的变质量质点系的动量方程与动量矩方程。各章均附有习题。

理论力学教学参考丛书
变质量力学基础
北京航空学院 程 勉 编
*
人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
河北省香河县印刷厂印装
*
开本 850×1168 1/32 印张 3.25 字数78,000
1982 年 5 月第 1 版 1983 年 6 月第 1 次印刷
印数 00,001—9,500
书号 15012·0407 定价 0.36 元

前　言

变质量力学所研究的是质量变化的物体的力学问题。它的理论是在牛顿定律的基础上建立起来的，所以它属于经典力学的范畴，通常把它作为经典力学的一个专门问题或分支。

早在十八世纪，力学家们作出过不少贡献，使经典力学的理论更加系统完整与严密。到了十九世纪，由于工业的迅速发展，促进了空气动力学、弹性力学等某些应用力学分支的迅速发展。而欲利用火箭来实现人类到宇宙中去航行的科学理想，则对变质量力学提出了迫切需要解决的新课题，从而促进了这一力学分支的建立与发展。在十九世纪中叶，人们在对天体力学的研究中就曾提出了变质量力学的问题。由于对天体运动规律计算的进一步精确化，发现了月球在运行中，它的周期不断在减少，也就是月球绕地球公转的切向速度不断增加。科学家拉普拉斯曾就这个问题指出：影响月球运动周期变化的因素除了月球与地球间的引力变化以外，另一个因素就是由于不断有物质从太空落到地球及月球上，致使月球与地球的质量增加，因而影响到月球运动的周期。但直到1897年，俄国力学家米歇尔斯基在它的论文“变质量质点动力学”中才第一次给出了变质量质点的运动微分方程。俄国力学家齐奥尔科夫斯基对变质量力学也作出过重要贡献。以后，又有一些力学家对于使变质量力学的理论进一步完善作出了不少贡献，如关于对变质量质点系和变质量刚体等的研究，在变质量力学中建立拉格朗日方程及分析力学的各种理论等。此外，在近代变质量力学的发展中很重要的一方面就是与一些实际问题相联系，其中最典型的问题是对火箭运动的研究，如在比较复杂的条件下，火箭运动

方程的积分及计算问题。在天体力学的研究中，如计算各种行星的运动规律，其中特别是陨石，在计算它的运动时，必须考虑到由于它不断破碎而使其质量变化这一因素。在工程技术中也相继提出了不少变质量力学的问题，如石油钻井中随着钻探深度的增加，使得钻杆质量不断增加等。

本书是作为高等学校工科理论力学的教学参考书，所以其内容侧重于变质量力学的最基本理论，包括变质量质点动力学方程，质点的普遍定理以及最简单的变质量质点系（本书中称为具有控制面的质点系）的动力学理论。此外，书中还列举了应用变质量力学所解决的一些典型实际问题，如一级与多级火箭的运动，喷气飞机的运动方程及涡轮的转动方程等。书中每章后都附有一些习题，目的是巩固理论及训练解决实际问题的能力。

在本书的编写过程中，得到了黄克累、陈亚洪、谢传锋等同志的很多指导与帮助，谨致谢意。

由于水平有限，不当与错误之处在所难免，恳切地希望读者批评指正。

编　　者

一九八二年二月

目　录

第一章　变质量质点运动的基本方程式……(1)

§1-1　变质量质点运动的基本方程式……(1)

§1-2　例题……(7)

§1-3　齐奥尔科夫斯基的两个问题……(10)

§1-4　二级火箭及多级火箭……(18)

§1-5　变质量质点作曲线运动的例题……(27)

习题……(31)

第二章　变质量质点的动力学普遍定理……(35)

§2-1　变质量质点的动量定理……(35)

§2-2　变质量质点的动量矩定理……(39)

§2-3　在有心力场内变质量质点运动的一个实例……(44)

§2-4　变质量质点的动能定理……(54)

§2-5　例题……(56)

习题……(62)

第三章　具有控制面的变质量质点系的动量方程和动量矩方程……(64)

§3-1　变质量质点系的动量方程……(65)

§3-2　应用变质量质点系动量方程的一些实例……(70)

§3-3　变质量质点系的动量矩方程……(75)

§3-4　涡轮的转动方程……(80)

§3-5　例题……(83)

习题……(89)

参考书……(96)

第一章　变质量质点运动的基本方程式

在理论力学动力学的一般章节中，我们所研究的对象不论是质点或质点系都具有一个共同特点，就是它们的质量在运动过程中保持不变。但工程技术和自然现象中的不少实例表明，有一些物体在运动过程中，它们的质量在连续地变化。例如：火箭在喷射燃料而获得推力向前运动的过程中，火箭本身的质量在连续地减少；喷气式飞机在飞行过程中不断地有空气进入，同时又把这部分空气与燃料加在一起以很高的速度喷射出去；星体在宇宙空间运动时，由于俘获宇宙中星际间的一些物质而使其质量增加，或因放射性而使其质量不断地减少等。上述实例的一个共同特点就是物体在运动中或有外来的质量连续地加入其中，或体内的一些质量连续地从其中分离出去，或者兼而有之，使其质量随时间连续地变化。我们称这类物体为变质量物体。变质量力学所研究的就是这类物体的动力学问题。

变质量力学的所有理论都是在经典力学的基础上推出的，它属于经典力学的范畴，通常把它作为理论力学的一个专门问题。

某些变质量物体，在作平动或其转动可以忽略时，我们可以把该变质量物体看成为变质量质点。本章将研究变质量质点的动力学问题。下面根据动力学的动量定理推导变质量质点的基本方程式。

§1-1　变质量质点运动的基本方程式

一变质量质点，由于它在运动中连续地放出质量或有质量加入其中，而使其质量在连续地变化。如以 m 表示质点的质量，t 表

示时间，则m为t的单值连续函数。即

$$m=m(t) \tag{1-1}$$

用$\frac{dm}{dt}$表示$m(t)$对时间的导数，则在放出质量的情况下，$\frac{dm}{dt}<0$；而在加入质量的情况下，$\frac{dm}{dt}>0$。

在应用动量定理推导变质量质点运动的基本方程式时，要注意动量定理只适用于质量不变的对象，为此我们取变质量质点在瞬时t的质量m为研究对象，研究从瞬时t到$t+\Delta t$的微小时间间隔内它的运动过程。设质点在瞬时t和瞬时$t+\Delta t$的质量分别为m和$m+\Delta m$(图 1-1)(图中$\Delta m<0$)，其速度分别为$\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{v}$，亦即在$\Delta t$时间间隔内从质点中连续地放出质量为$|\Delta m|$，并设质量$|\Delta m|$以相对于质点的速度为$\boldsymbol{v}_r$从质点分出。因此在瞬时$t$，质量为$m$的质点的动量为$m\boldsymbol{v}$；在瞬时$t+\Delta t$，该质点分为两部分，其质量分别为$m+\Delta m$与$|\Delta m|=-\Delta m$，质量为$m+\Delta m$的质点的动量为

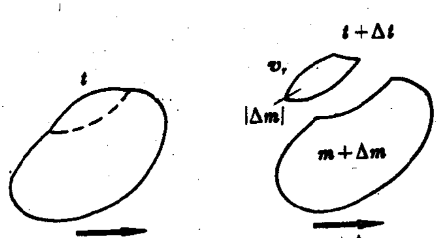


图 1-1

$$(m+\Delta m)(\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{v}) \tag{1-2}$$

在微小时间间隔Δt内，质点共放出质量为$|\Delta m|$，在忽略对动量的影响为二阶以上微小量的情况下，可以认为在此时间间隔内其绝对速度(相对于惯性坐标系的速度)为$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_r$。因此它的动量为

$$(-\Delta m)(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_r) \tag{1-3}$$

在 $t+\Delta t$ 瞬时，把被研究的对象看作是由变质量质点 $m+\Delta m$ 与 $|\Delta m|$ 所组成的质点系，其动量为式(1-2)与(1-3)之和。所以在 Δt 时间内，其动量变化为

$$
\begin{aligned}
&[\Sigma m\boldsymbol{v}]_{t+\Delta t}-[\Sigma m\boldsymbol{v}]_t= \\
&=(m+\Delta m)(\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{v})+(-\Delta m)(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_r)-m\boldsymbol{v} \\
&=m\Delta\boldsymbol{v}-\Delta m\boldsymbol{v}_r+\text{高阶微小量项} \qquad (1\text{-}4)
\end{aligned}
$$

将式(1-4)除以 Δt，并令 Δt 趋于零取极限，得到

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\Delta t\to 0}\frac{[\Sigma m\boldsymbol{v}]_{t+\Delta t}-[\Sigma m\boldsymbol{v}]_t}{\Delta t} \\
&=\lim_{\Delta t\to 0}\left(m\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}-\frac{\Delta m}{\Delta t}\boldsymbol{v}_r\right)
\end{aligned}
$$

亦即

$$\frac{d}{dt}(\Sigma m\boldsymbol{v})=m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}-\frac{dm}{dt}\boldsymbol{v}_r \qquad (1\text{-}5)$$

根据质点系动量定理可知

$$\frac{d}{dt}(\Sigma m\boldsymbol{v})=\Sigma\boldsymbol{F}^e \qquad (1\text{-}6)$$

式(1-6)右端 $\Sigma\boldsymbol{F}^e$ 表示作用于质点系上外力的主矢量。在我们所讨论的情况下，$\Sigma\boldsymbol{F}^e$ 应为作用于变质量质点上外力的合力，用 $\boldsymbol{F}$ 表示。于是将式(1-5)代入式(1-6)可得

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}+\frac{dm}{dt}\boldsymbol{v}_r \qquad (1\text{-}7)$$

式(1-7)是变质量质点在分出质量的情况下导出的。在加入质量的情况下，亦可得出相同的等式，其区别仅在于前者右端第二项中 $\frac{dm}{dt}<0$，而后者则 $\frac{dm}{dt}>0$。式(1-7)左端 $m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ 为变质量质点的质量与加速度的乘积，必须注意式中质量 $m=m(t)$ 为时间的函数，右端第一项 $\boldsymbol{F}$ 为作用于变质量质点上外力的合力，第二项用 $\boldsymbol{\Phi}$ 表示，即

$$\boldsymbol{\Phi}=\frac{dm}{dt}\boldsymbol{v}_r \tag{1-8}$$

其量纲为$\frac{[质量]}{[时间]}\frac{[长度]}{[时间]}=[质量][长度]/[时间]^2$，即$\boldsymbol{\Phi}$与力的量纲相同，我们称它为反推力。即反推力为一矢量，等于变质量质点质量的导数与分出(加入)质量的相对速度矢量的乘积。以火箭为例，在喷出质量时，$\frac{dm}{dt}<0$，$\boldsymbol{v}_r$ 与火箭速度相反，所以$\boldsymbol{\Phi}$的方向与$\boldsymbol{v}$的方向相同。其作用是使火箭的动量增加，即相当作用于火箭上一推力。对于喷气式飞机，则同时进入空气并排出燃气，进入空气时，$\frac{dm}{dt}>0$，而$\boldsymbol{v}_r$与飞机的速度$\boldsymbol{v}$相反，亦即进入的空气作用于飞机的反推力$\boldsymbol{\Phi}$与$\boldsymbol{v}$方向相反，对于飞机是阻力；而喷出燃气时，反推力$\boldsymbol{\Phi}$与$\boldsymbol{v}$方向相同，对于飞机是推力。将式(1-8)代入式(1-7)可得

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{\Phi} \tag{1-9}$$

式(1-7)与(1-9)表明：变质量质点运动时，其质量与加速度的乘积，等于作用于其上外力的合力与反推力的矢量和。该二式称为变质量质点运动的基本方程式。如将式(1-7)在直角坐标轴Ox、Oy、Oz上投影，则得到

$$\left.\begin{aligned}m\frac{dv_x}{dt}&=X+\frac{dm}{dt}v_{rx}\\m\frac{dv_y}{dt}&=Y+\frac{dm}{dt}v_{ry}\\m\frac{dv_z}{dt}&=Z+\frac{dm}{dt}v_{rz}\end{aligned}\right\} \tag{1-10}$$

式中，X、Y、Z为$\boldsymbol{F}$在Ox、Oy、Oz轴的投影。

将式(1-7)与动力学中质点运动微分方程比较便可看出，在变

质量质点的情况下，使质点产生加速度的除了作用于质点上的外力以外，还有由于加入或放出质量而作用于质点上的反推力。从前面的讨论还可看出：我们所研究的变质量质点本身就相当于一个加入质量或放出质量的中心，在任一瞬间(微小时间间隔)，质点放出或加入的质量为一微小量，但被放出或加入质量的速度有一突然的变化，亦即被加入的质量以不等于零的相对速度加入质点内，或被放出的质量当它脱离质点时具有不等于零的相对速度。所以变质量质点加入（放出）质量的过程是一个不断地碰撞的过程，这个假设在有些文献中称为接触作用。

如果加入或放出质量的相对速度 $\boldsymbol{v}_r=0$，亦即被加入或放出质量的速度与变质量质点相同，例如雨滴在干燥空气中运动时逐渐蒸发的情况，冰在运动过程中逐渐溶化的情况等，这时式(1-7)变为

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F} \tag{1-11}$$

这个公式具有与牛顿第二定律相同的形式，但本质上却不相同，因为式中变质量质点的质量 $m=m(t)$是时间 t 的函数。

前面讨论了变质量质点在运动过程中连续地加入或放出质量时的动力学基本方程式(1-7) 和 (1-9)。现把这个结果推广一下，假设质点在运动过程中同时有质量加入和放出，考察从任一瞬时 t 开始的微小时间间隔 Δt 内，变质量质点的运动(图 1-2)。设质

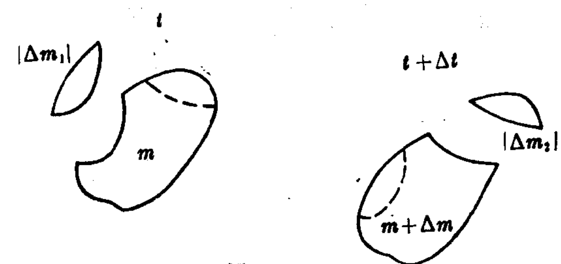


图 1-2

点在此时间间隔内加入的质量为 Δm_1，而放出的质量为 $|\Delta m_2|$ ($\Delta m_2<0$)。如果在瞬时 t 质点的质量为 m，则在瞬时 $t+\Delta t$ 质点的质量为

$$m+\Delta m=m+\Delta m_1-(-\Delta m_2)$$

或

$$\Delta m=\Delta m_1+\Delta m_2 \tag{1-12}$$

与推导动力学基本方程式(1-7)和(1-9)相同，观察从瞬时 t 到瞬时 $t+\Delta t$ 的微小时间间隔内变质量质点的运动过程。设质量 $|\Delta m_1|$ 的相对速度为 $\boldsymbol{v}_{r1}$，$|\Delta m_2|$ 的相对速度为 $\boldsymbol{v}_{r2}$，则在瞬时 t 质点及其要加入的质量 Δm_1 所组成的质点系的动量和为

$$\begin{aligned}[\Sigma m\boldsymbol{v}]_t&=m\boldsymbol{v}+\Delta m_1(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_{r1})\\&=m\boldsymbol{v}+\Delta m_1\boldsymbol{v}+\Delta m_1\boldsymbol{v}_{r1}\end{aligned}$$

在瞬时 $t+\Delta t$，上述质点系的动量则等于质点和已被放出的质量 $|\Delta m_2|$ 的动量和，即

$$\begin{aligned}[\Sigma m\boldsymbol{v}]_{t+\Delta t}&=(m+\Delta m_1)(\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{v})+(-\Delta m_2)(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_{r2})\\&=m\boldsymbol{v}+m\Delta\boldsymbol{v}+\Delta m_1\boldsymbol{v}-\Delta m_2\boldsymbol{v}_{r2}+\text{二阶微量}\end{aligned}$$

考虑到式(1-12)，从以上两式可算出在 Δt 时间间隔内质点系的动量变化为

$$m\Delta\boldsymbol{v}-\Delta m_1\boldsymbol{v}_{r1}-\Delta m_2\boldsymbol{v}_{r2}+\text{二阶微量}$$

将上式除以 Δt，并令 Δt 趋近于零取极限，再应用动量定理就得到

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}-\frac{dm_1}{dt}\boldsymbol{v}_{r1}-\frac{dm_2}{dt}\boldsymbol{v}_{r2}=\boldsymbol{F}$$

即

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}+\frac{dm_1}{dt}\boldsymbol{v}_{r1}+\frac{dm_2}{dt}\boldsymbol{v}_{r2} \tag{1-13}$$

式中，$\boldsymbol{F}$ 为质点所受外力的合力，$m=m(t)$ 为质点的质量。根据式(1-12)有

$$\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta m}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta m_1}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta m_2}{\Delta t}$$

或

$$\frac{dm}{dt}=\frac{dm_1}{dt}+\frac{dm_2}{dt} \tag{1-14}$$

式(1-13)是前面的动力学基本方程式(1-7)的推广方程。与式(1-7)比较可以看出：式(1-13)右端的反推力有两项，一项是由于加入质量而引起的，另一项是由于放出质量而引起的。可见，当同时有质量加入和放出时，变质量质点的质量与其加速度的乘积等于作用于质点上外力的合力与由于加入和放出质量而产生的反推力之和。事实上，这个方程还可以再推广到当质点以不同的相对速度同时加入并放出几个质量的情况。设从瞬时 t 到 $t+\Delta t$ 的时间间隔内，质点所加入或放出的质量分别为 $|\Delta m_1|$、$|\Delta m_2|$、…、$|\Delta m_n|$，其中凡是加入的质量 $\Delta m>0$，而放出的质量 $\Delta m<0$。这些质量的相对速度分别为 $\boldsymbol{v}_{r1}$、$\boldsymbol{v}_{r2}$、…、$\boldsymbol{v}_{rn}$。在这种情况下，基本方程式(1-7)变为

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}+\frac{dm_1}{dt}\boldsymbol{v}_{r1}+\frac{dm_2}{dt}\boldsymbol{v}_{r2}+\cdots+\frac{dm_n}{dt}\boldsymbol{v}_{rn} \tag{1-15}$$

等式右方 $\frac{dm_1}{dt}\boldsymbol{v}_{r1}$、$\frac{dm_2}{dt}\boldsymbol{v}_{r2}$、…分别为加入或放出质量而作用于质点上的反推力。而式中 $m=m(t)$ 为变质量质点的质量。且

$$\frac{dm}{dt}=\lim_{\Delta t\to0}\left(\frac{\Delta m_1+\Delta m_2+\cdots+\Delta m_n}{\Delta t}\right)$$

$$=\frac{dm_1}{dt}+\frac{dm_2}{dt}+\cdots+\frac{dm_n}{dt} \tag{1-16}$$

§1-2 例 题

例 1-1 单位长度的质量为 γ 的链条从桌上滑下(图 1-3)，已知链条从

静止开始运动，求链条下滑的运动规律。

解： 取进入运动的一段链条为研究对象，设其长度为 x，坐标轴 Ox 如图，注意到链条在进入运动时的绝对速度等于零，亦即其相对速度 $v_{rx}=-v_x$。根据式(1-10)可以写出

$$m\frac{dv_x}{dt}=mg-\frac{dm}{dt}v_x$$

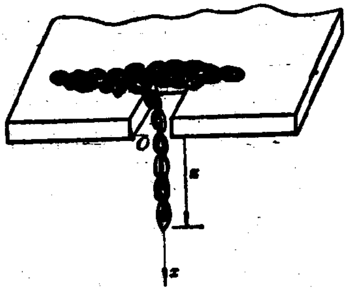


图 1-3

根据已知条件，长度为 x 的链条质量 $m=\gamma x$，代入上式并消去 γ 就得到

$$x\frac{dv_x}{dt}+v_x^2-gx=0$$

因

$$\frac{dv_x}{dt}=\frac{dv_x}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{dv_x}{dx}v_x=\frac{1}{2}\frac{dv_x^2}{dx}$$

所以上式可以写为

$$\frac{x}{2}\cdot\frac{dv_x^2}{dx}+v_x^2-gx=0$$

或

$$\frac{dv_x^2}{dx}=\frac{2}{x}(gx-v_x^2)$$

令 $\frac{2}{3}gx-v_x^2=y$，则上式可化为

$$\frac{dy}{dx}=-2\frac{y}{x}$$

上式积分后得到

$$yx^2=C$$

即

$$\left(\frac{2}{3}gx-v_x^2\right)x^2=C$$

将起始条件 $t=0, x=0, v_x=0$，代入上式，得 $C=0$，故

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{2}{3}gx}$$

因而有

$$t=\int_0^x\sqrt{\frac{3}{2g}}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{6}{g}x}$$

即

$$x=\frac{1}{6}gt^2$$

例 1-2 质量为M的气球在高度 h_0 处由静止开始铅垂上升(图 1-4),下方悬挂一条长而柔软的均质重索,其单位长度的质量为 γ,索的未被带起部分完全卷聚在气球的正下方。作用在气球上的力,除重力之外还有升力F和阻力 $R=\beta v^2$(β 为常数,v 为气球的速度)。把原点取在地面上,试将气球的速度表为高度的函数。

解: 取坐标轴 Ox 如图 1-4 所示,并作受力图。根据式(1-10),有

$$m\frac{dv_x}{dt}=X+\frac{dm}{dt}v_{rx}$$

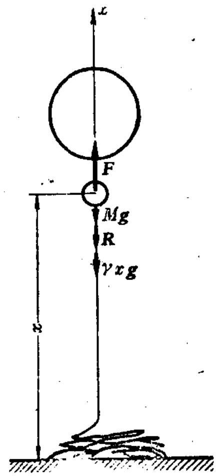


图 1-4

从题意可知,重索进入运动时为静止,亦即其相对速度 $v_{rx}=-v_x=-\dot{x}$,又因 $m=M+\gamma x$, $X=F-(M+\gamma x)g-\beta\dot{x}^2$ 式中升力 $F=$ 常数,代入上式就得到

$$(M+\gamma x)\frac{d^2x}{dt^2}=F-(M+\gamma x)g-\beta\dot{x}^2-\gamma\dot{x}^2$$

可写为

$$\frac{1}{2}(M+\gamma x)\frac{d(\dot{x})^2}{dx}+(\gamma+\beta)\dot{x}^2=F-(M+\gamma x)g$$

令 $\dot{x}^2=y$,可得

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2(\gamma+\beta)}{M+\gamma x}y=\frac{2F}{M+\gamma x}-2g$$

上式为一阶线性变系数非齐次方程,由常微分方程理论可知它的解为

$$ye^{\int\frac{2(\gamma+\beta)}{M+\gamma x}dx}=\int\left(\frac{2F}{M+\gamma x}-2g\right)e^{\int\frac{2(\gamma+\beta)}{M+\gamma x}dx}dx+C$$

因为

$$\int\frac{2(\gamma+\beta)}{M+\gamma x}dx=\frac{2(\gamma+\beta)}{\gamma}\ln(M+\gamma x)$$

$$=\ln(M+\gamma x)^{\frac{2(\gamma+\beta)}{\gamma}}$$

故

$$e^{\int\frac{2(\gamma+\beta)}{M+\gamma x}dx}=(M+\gamma x)^{\frac{2(\gamma+\beta)}{\gamma}}$$

将上式代入方程的解，可得

$$y(M+\gamma x)^{\frac{2(\gamma+\beta)}{\gamma}}=2F\int[(M+\gamma x)^{\frac{2(\gamma+\beta)}{\gamma}-1}]dx$$

$$-2g\int(M+\gamma x)^{\frac{2(\gamma+\beta)}{\gamma}}dx+C$$

将右端积分后得

$$y(M+\gamma x)^{\frac{2(\gamma+\beta)}{\gamma}}=\frac{F(M+\gamma x)^{\frac{2(\gamma+\beta)}{\gamma}}}{(\gamma+\beta)}$$

$$-\frac{2g}{\gamma}\frac{(M+\gamma x)^{\left(3+\frac{2\beta}{\gamma}\right)}}{3+\frac{2\beta}{\gamma}}+C$$

由题意知起始条件为

$$t=0,\quad y_0=\dot{x}_0^2=0,\quad x_0=H$$

因此可解出

$$C=\frac{2g(M+\gamma H)^{\left(3+\frac{2\beta}{\gamma}\right)}}{\gamma\left(3+\frac{2\beta}{\gamma}\right)}-\frac{F(M+\gamma H)^{\frac{2(\gamma+\beta)}{\gamma}}}{(\gamma+\beta)}$$

所以得到

$$y(M+\gamma x)^{2\left(1+\frac{\beta}{\gamma}\right)}=\frac{F}{\gamma+\beta}[(M+\gamma x)^{2\left(1+\frac{\beta}{\gamma}\right)}-(M+\gamma H)^{2\left(1+\frac{\beta}{\gamma}\right)}]$$

$$-\frac{2g}{\gamma\left(3+\frac{2\beta}{\gamma}\right)}[(M+\gamma x)^{\left(3+\frac{2\beta}{\gamma}\right)}-(M+\gamma H)^{\left(3+\frac{2\beta}{\gamma}\right)}]$$

再将 $y=\dot{x}^2$ 代入上式，化简后得

$$\dot{x}^2=\frac{F}{\gamma+\beta}\left[1-\left(\frac{M+\gamma H}{M+\gamma x}\right)^{2\left(1+\frac{\beta}{\gamma}\right)}\right]$$

$$-\frac{2g(M+\gamma x)}{\gamma\left(3+\frac{2\beta}{\gamma}\right)}\left[1-\left(\frac{M+\gamma H}{M+\gamma x}\right)^{3+\frac{2\beta}{\gamma}}\right]$$

§1-3　齐奥尔科夫斯基的两个问题

应用变质量质点运动的基本方程式，俄国学者齐奥尔科夫斯

基研究了以不变的相对速度向运动反方向放出质量的变质量质点，在不受外力作用以及在均匀重力场内的运动。这就是火箭运动的最简单情况，通常称为齐奥尔科夫斯基的两个问题。

一、齐奥尔科夫斯基第一类问题

设变质量质点在真空中运动，不受外力作用，并设其放出质量的相对速度 $\boldsymbol{v}_r$ 的大小不变，而方向与质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 相反(图 1-5)。取坐标轴 Ox 与速度 $\boldsymbol{v}$ 方向相同。根据公式 (1-7) 或 (1-9) 可以看出，因反推力 $\boldsymbol{\Phi}$ 的方向与变质量质点的速度同向，亦即质点的加速度与其速度方向相同，因此变质量质点作直线运动，根据式

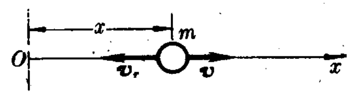


图 1-5

(1-10)中沿 x 轴的投影式，可写出其运动微分方程式为

$$m\frac{dv}{dt}=-v_r\frac{dm}{dt}$$

或

$$dv=-\frac{v_r\cdot dm}{m} \tag{1-17}$$

将起始条件 $t=0, v=v_0, m=M_0$，代入式(1-17)并积分，可得

$$v=v_0+v_r\ln\frac{M_0}{m} \tag{1-18}$$

式(1-18)就是所研究的变质量质点的速度变化规律。此式也就是在不受外力作用下火箭运动的速度公式。设火箭开始发射时质量为 M_0，其中包括有燃料的质量 M_f，因此火箭外壳的质量为 M_0-M_f。应用式(1-18)可求出火箭在燃烧终结时的速度为

$$v=v_0-v_r\ln\left(1-\frac{M_f}{M_0}\right) \tag{1-19}$$

如 $v_0=0$，则

$$v=-v_r\ln\left(1-\frac{M_f}{M_0}\right) \tag{1-20}$$