高等学校教学用書

高等數學教程

第二卷　第三分册

В. И. 斯米爾諾夫著

商务印書館

高等數學教程

高等學校教學用書

高等數學教程

第二卷 第三分册

В. И. 斯米爾諾夫著

孫念增譯

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的斯米爾諾夫(В. И. Смирнов)著"高等數學教程"(Курс высшей математики)第二卷1952年第十一版譯出的。原書經蘇聯高等教育部審定為綜合大學數理系及高等工業學院需用較高深數學的各系教科書。

本書係榮獲斯大林獎金的著作。

本書(第二卷)中譯本暫分三册出版。

高 等 數 學 教 程

第二卷 第三分册

孫 念 增 譯

商 務 印 書 館 出 版
上海河南中路二一一號
(上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號)
新 華 書 店 總 經 售
毅 華 印 刷 所 印 刷
上海海寧路六九七號
(50854B 3)

1953年8月初版　開本850×1168 1/32
1956年4月4版　字數151,000
1956年4月上海第1次印刷　印數22,001-25,500
印張 5 12/16　定價(8)¥0.61

第二卷第三分册目次

第七章　數學物理偏微分方程

第七章　數學物理偏微分方程

§1.　波動方程

163. **絃的振動方程**　求偏微分方程的積分問題屬於分析的最艱深而且最廣泛的部門，這裏我們只限於考慮這個範圍中的基本問題。這一節中我們講連繫於所謂波動方程的問題。下面形狀的方程叫做波動方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u,$$

其中

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\operatorname{div}\operatorname{grad}u$$

在[116]與[118]中考慮聲與電的振動時我們遇到過這個方程。設 u 不依賴於 y 與 z, 就是說，在任何一個垂直於X軸的平面上的所有的點，u 有相同的值。在這情形下，波動方程的形狀如下:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

在這樣的情形下我們通常說是有平面波。現在我們來說明，當考慮緊

張的絃的微小的横振動時，我們得到這樣的方程。

所謂絃我們指的是纖細的線，它可以自由的彎曲。我們設它受有很强的張力 T_0 的作用，並且在平衡狀態下，沒有沿 X 軸方向的外力（圖 127）。如果它由平衡位置遭受了隨意的外力的作用，絃就開始振動，而且，當平衡時絃上具有横坐標爲 x 而位置在 N 的點，在時刻 t 就具有位置 M。我們只限於考慮横振動，假定全部運動出現在一個平面上，而且絃上的點垂直於 X 軸運動。我們把絃上的點的位移 $\overline{NM}$ 記作 u。這個位移就是兩個自變量 x 與 t 的未知函數。

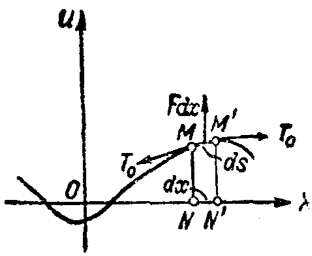

圖 127

取絃的單元 MM'，平衡時它的位置在 NN'。我們算作形變是很小的以至於與 1 比較起來，可以忽略掉微商 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 的平方項。設 α 是絃的切線與 X 軸作成的銳角。我們有

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\partial u}{\partial x}$$

於是

$$\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}\approx\frac{\partial u}{\partial x}.$$

把對於單位長計算的，絃上垂直於 X 軸的作用力記作 F。作用在所考慮的單元 MM' 上的就有下列各力：在點 M' 的張力，它的方向沿着在點 M' 的切線方向，而與 X 軸作成銳角；在點 M 的張力，方向沿着在點 M 的切線方向，與 X 軸作成鈍角；以及沿 u 軸方向的力 Fdx。由於假定了形變是很小的，我們可以算作上述兩個張力的大小等於張力 T_0 的大小。先設在所說的力 F 的作用下絃成平衡。投影在 u 軸上，就有

下面的平衡條件

(1) $$T_0\sin\alpha'-T_0\sin\alpha+F\,dx=0,$$

其中 α' 是上面說的角度 α 在點 M' 的值，就是說

$$\sin\alpha'=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M'};\quad \sin\alpha=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M}.$$

於是推知：

(2) $$T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M'}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M}\right]+F\,dx=0.$$

在方括號中的差，表達的是當 x 改變了 dx 時函數 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 的改變量。用微分來替代這個改變量，就得到 [I, 50]：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M'}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx.$$

代入到(2)中，消去 dx，就得到絃的平衡方程：

(3) $$T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F=0.$$

為要得到運動方程，我們只須依照達郎倍爾原理，對於外力再補充以慣性力，它可以由下述方法得到：點 M 的速度顯然是 $\frac{\partial u}{\partial t}$，加速度是 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$，慣性力等於加速度與質量的乘積而取相反的符號，所以單元 MM' 的慣性力是：

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\rho\,dx,$$

其中 ρ 是絃的線密度，就是單位長的質量，對於單位長來講，慣性力就是

$$-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

於是，在方程(3)中用 $F-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 來替代 F，我們就得到運動方程：

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x_0}+F.$$

用 ρ 除並設

$$\frac{T_0}{\rho}=a^2,\quad \frac{F}{\rho}=f, \tag{4}$$

我們就得到絃的強迫橫振動方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f. \tag{5}$$

若外力消失，我們就有 $f=0$，於是得到絃的自由振動方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{6}$$

以上我們假定了外力是連續地分佈在整個絃上的，有時我們遇到的是力 P 集中在一個點 C 的情形。考慮這樣的情形時，或者看作是上面的極限情形，就是算作力是作用在點 C 附近的一個長度爲 ε 的無窮小單元上，而當 $\varepsilon\to 0$ 時，力的大小與 ε 的乘積趨向有限的極限，這個極限不等於零；或者對於點 C 附近的單元 MM' 直接運用方程(2)而用 P 來替代 Fdx. 這時要注意我們對於 Fdx 不補充以慣性力 $\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\rho dx\right)$，因爲當 $dx\to 0$ 時我們算作它趨向零。

設單元的端點逼近於點 C，我們把當自右或自左逼近於點 C 時 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 所趨向的極限值分別記作：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_+,\qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_-,$$

由方程(2)取極限就得到

$$(7)\qquad T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_+-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_-\right]=-P,$$

如此我們看出，這個絃在集中力作用所在的點C具有叉點，就是左右切線方向不同的點。

像在動力學中一般的情形一樣，一個運動方程(5)不足以完全確定絃的運動，還需要給定在初始時刻 $t=0$ 時它的狀態，也就是它的點 u 的位置，以及當 $t=0$ 時它們的速度 $\frac{\partial u}{\partial t}$，這都要是 x 的已知函數：

$$(8)\qquad u\Big|_{t=0}=\varphi(x);\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x).$$

當 $t=0$ 時，未知函數 u 應當滿足這兩個條件，它們叫做初始條件。

理論上講，可以考慮無窮的絃，在這情形下爲要求解只須方程(5)與條件 (8) 就够了，其中 $\varphi(x)$ 與 $\varphi_1(x)$ 應當是給定在整個無窮區間 $(-\infty,+\infty)$上的。這情形就對應於在無界空間中對於平面波的討論。以後我們將看到，由無窮的絃得到的結果所給出的擾動分佈的景象，當這些擾動沒有達到有界絃的端點時，在這樣的時間區間裏，這種景象也就是對於有界絃的景象。

不過若是在點 $x=0$ 與 $x=l$ 絃是界於一頭或界於兩頭的，就需要說明它的端點的現象。例如，設絃的一端 $x=0$ 是固定住的。在這情形下，我們應當有

$$(9)\qquad u\Big|_{x=0}=0.$$

若是端點 $x=l$ 也是固定住的，則我們又得到

$$u\Big|_{x=l}=0,\tag{9_1}$$

對於任何的 t, 這兩個條件應當滿足。

紘的端點也可能不是固定住的，而是按給定的方式運動的。那時紘的這兩個點的縱標應當算作是時間的已知函數，就是說，設

$$u\Big|_{x=0}=\chi_1(t);\quad u\Big|_{x=l}=\chi_2(t).\tag{10}$$

無論怎樣，如果紘是界於一頭或界於兩頭的，對於它的每一個端點就應當有給定的條件，這樣的條件叫做邊値條件。

總之，我們看出，對於具體的物理問題的解來講，補充的初始條件與邊値條件的重要性並不低於運動方程，並且我們的興趣不在於運動方程的隨意的解或者甚至於它的一般解的求法，而是在於求適合於所設置的初始條件與邊値條件的解。

164. 達郎倍爾解 在無窮紘的自有振動的情形下，要求的函數 $u(x,t)$ 應當滿足方程(6)：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

而要適合初始條件(8)

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x);\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x),$$

這裏由於紘是無界的，函數 $\varphi(x)$ 與 $\varphi_1(x)$ 應當是給定在區間 $(-\infty,+\infty)$ 上的。

可以求出方程(6)的一般解，而且具有這樣的形狀，使得容易適合於條件(8)。

爲此，我們變換方程(6)，引用新的自變量：

$$\xi=x-at,\quad \eta=x+at,$$

由此

$$x=\frac{1}{2}(\eta+\xi);\quad t=\frac{1}{2a}(\eta-\xi).$$

看作 u 通過中間變量 ξ 與 η 依賴於 x 與 t，應用求複合函數的微商的法則，通過對新變量的微商來表達對原來的變量的微商：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta};\quad \frac{\partial u}{\partial t}=a\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \xi}\right).$$

再應用這兩個公式一次，就得到：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)-a^2\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right);$$

由此

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-4a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta},$$

於是方程(6)就與下面這方程相當：

(11) $$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0.$$

把方程(11)寫成

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=0,$$

就可以看出 $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ 不依賴於 η，就是說它只是 ξ 的函數。設

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=\theta(\xi),$$

求積分，就得到

$$u=\int \theta(\xi)d\xi+\theta_2(\eta),$$

其中 $\theta_2(\eta)$ 是 η 的任意函數(當對 ξ 求積分時,"常數"可以依賴於 η)。這裏，第一項可以算作是 ξ 的任意函數,因爲 $\theta(\xi)$ 是 ξ 的任意函數,我們用 $\theta_1(\xi)$ 來記第一項，就有:

$$u=\theta_1(\xi)+\theta_2(\eta),$$

或者,換到原來的變量(x,t),

$$u(x,t)=\theta_1(x-at)+\theta_2(x+at), \tag{12}$$

其中 θ_1 與 θ_2 各爲所寫的變量的任意函數。方程(6)的這個一般解叫做達郎倍爾解；它含有兩個任意函數 θ_1 與 θ_2。我們利用初始條件(8)來確定這兩個函數，根據等式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a[-\theta_1'(x-at)+\theta_2'(x+at)].$$

以及等式(12),得到:

$$\theta_1(x)+\theta_2(x)=\varphi(x);\quad -\theta_1'(x)+\theta_2'(x)=\frac{\varphi_1(x)}{a}, \tag{13}$$

由後一個等式求積分並變號:

$$\theta_1(x)-\theta_2(x)=-\frac{1}{a}\int_0^x \varphi_1(z)dz+C.$$

讓 $x=0$, 我們來確定任意常數 C:

$$C=\theta_1(0)-\theta_2(0).$$

可以算作 $C=0$，就是設

$$\theta_1(0)-\theta_2(0)=0, \tag{14}$$

這並不失去一般性，因爲如果 $C\neq 0$，我們可以引用函數

$$\theta_1(x)+\frac{C}{2},\quad \theta_2(x)-\frac{C}{2}$$

來替代函數 $\theta_1(x)$ 與 $\theta_2(x)$，這樣等式(13)並不改變，而滿足了(14)。

總之，我們有：

$$\theta_1(x)+\theta_2(x)=\varphi(x);\quad \theta_1(x)-\theta_2(x)=-\frac{1}{a}\int_0^x \varphi_1(z)\,dz \tag{15}$$

由此我們不難確定函數 $\theta_1(x)$ 與 $\theta_2(x)$：

$$\theta_1(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z)\,dz;\quad \theta_2(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z)\,dz \tag{16}$$

把所得到的表達式代入到公式(12)中，就求得：

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\varphi_1(z)\,dz+\frac{1}{2}\varphi(x+at)+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\varphi_1(z)\,dz,$$

結果得到：

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_1(z)\,dz. \tag{17}$$

165. **特殊情形**　公式(17)給出了所提出的問題的完全的解。爲要更好的認清所得到的解，我們分爲下列各種情形：

1. 初始衝量等於零，就是說，絃上點的初始速度等於零。這時由條件 $\varphi_1(x)=0$ 及公式(17)給出：

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}, \tag{18}$$

在初始時刻

$$u\Big|_{t=0}=u(x,0)=\varphi(x).$$

現在我們看解(18)的物理意義。表達式(18)的分子由兩項組成，我們先看第一項：$\varphi(x-at)$。

設一個觀察者由初始時刻 $t=0$ 開始，由絃上的點 $x=c$ 在 OX 軸的正方向移動，速度爲 a，也就是說他的橫坐標依照公式 $x=c+at$ 或 $x-at=c$ 改變。對於這樣的觀察者來講，由公式 $u=\varphi(x-at)$ 所確定的絃的位移總保持一個常數值，而等於 $\varphi(c)$。函數 $u=\varphi(x-at)$ 所確定的這個現象叫做正波的傳播。回到達郞倍爾公式(12)，我們可以說，$\theta_1(x-at)$ 這一項給出正波，它以速度 a 在 OX 軸的正方向傳播。同理，第二項 $\theta_2(x+at)$ 所確定的絃的振動是這樣的，這時擾動在 OX 軸的負方向以速度 a 傳播，並且在時刻 t 具有橫坐標 $c-at$ 的點與當 $t=0$ 時的點 $x=c$ 具有相同的離開距離 u。它所對應的現象我們叫做反波的傳播。

a 的大小是擾動或振動(橫的)的傳播速度。公式(4)指出

$$a=\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, \tag{19}$$

就是說，橫振動的傳播速度與絃的密度的平方根成反比而與張力的平方根成正比。

上述的解(18)是正波 $\varphi(x-at)$ 與反波 $\varphi(x+at)$ 的算術平均值，它可以由下述方法得到：作出兩個相同的當 $t=0$ 時絃的圖形 $u=\varphi(x)$ 的模樣，想像它們彼此是重合在一起的。然後向兩側以速度 a 移動。

絃在時刻 t 的圖形就可以作爲這樣移動的兩個圖形的算術平均值得出來，就是說，絃在時刻 t 的圖形平分諸縱標界於兩個移動的圖形之間的線段。

例如，設在初始時刻，絃具有如圖 128 所示的形狀。

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & \text{在區間}(-a,a)\text{之外，}\\ x+a & \text{當 } -a\leqslant x\leqslant 0 \text{ 時，}\\ -x+a & \text{當 } 0\leqslant x\leqslant a \text{ 時。}\end{cases}$$

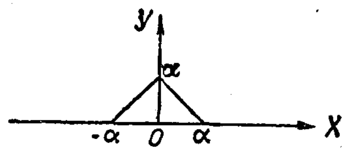

圖 128

圖 129 上表示出絃在下列時刻的圖形：

$$t=\frac{a}{4a},\ \frac{2a}{4a},\ \frac{3a}{4a},\ \frac{a}{a},\ \frac{5a}{4a},\ \frac{2a}{a}.$$

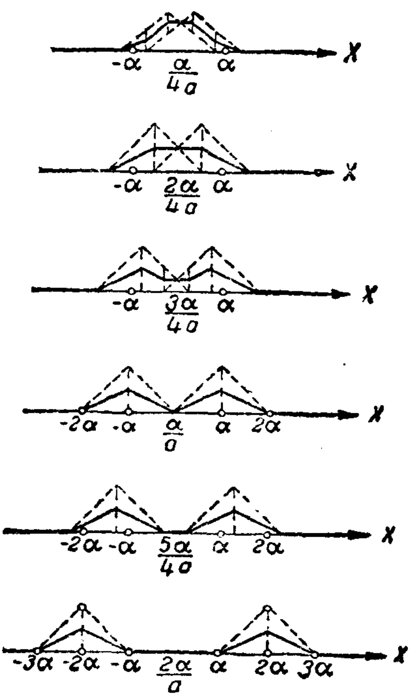

圖 129

我們在平面上作出兩條互相垂直的軸：一個是關於變量 x 的，另一個是關於 t 的。在圖 130 上我們只畫出了一個 X 軸。這平面上任何一點由兩個坐標 (x, t) 確定，就是說，這樣的點表現出在確定的時刻 t 絃上的確定的點 x。這時不難用畫圖的方法確定出絃上那樣的點，這些點的初始擾動在時刻 t_0 達到點 x_0。依照以上所述，這就是具有橫坐標 $x_0\pm at_0$ 的點，因爲 a 是振動的傳播速度。爲要在 OX 軸上找出它們來，只須過點 (x_0, t_0) 作兩條直線：

$$(20)\qquad \begin{aligned} x-at&=x_0-at_0,\\ x+at&=x_0+at_0,\end{aligned}$$

它們與 OX 軸的交點就是所要求的點。直線(20)叫做點(x_0,t_0)的特徵線。沿着其中第一條直線 $\varphi(x-at)$ 保持常數值，就是說，對於由這直線給出的那些值 (x,t) 來講，正波給出相同的離開距離，也就是對應於(x_0,t_0)這一對值的離開距離。對於反波來講(20)中第二條直線有同様的作用。簡單的可以說是；就是，擾動沿着特徵線傳播。

應用上述的作法，可以發覺下述的事實。

設只在絃的某一個區間(α_1,α_2)上具有初始擾動(圖 130)，就是說在這區間之外 $\varphi(x)=0$。我們只限制上半個 (x,t) 平面 $(t>0)$ 有物理

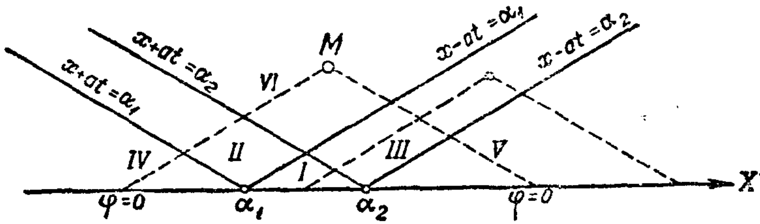

圖　130

意義，作出 OX 軸上的點 α_1 與 α_2 的特徵線，圖上畫的實線。這些特徵線把整個上半平面分爲六個區域。區域(I)所對應的點是這樣的，在所指定的時刻正波與反波都要達到這些點。區域(II)所對應的點在指定的時刻只是反波達到。區域(III)則相反，只是正波達到。區域(IV)與(V)所對應的點是這樣的，在所指定的時刻，沒有擾動達到這些點。最後，區域(VI)所對應的點是這樣的，擾動已經達到它們而且經過了它們，在所指定的時刻它們是靜止狀態。這是由於，如果過這個區域中隨便那一點作特徵線，它們與 OX 軸的交點 $x=c$ 落在有初始擾動的線段之外，於是 $\varphi(x\pm at)=\varphi(c)$ 等於零。此外，若過M作垂直於 OX 軸的直線，則這直線的下段，就是對應於 x 不變而時間提前的一段，至少通過區域 I, II, III 中之一，而這直線的上段，就是對應於時間推後的