

电磁场理论

毛钧杰 何建国 编著

国防科技大学出版社

电磁场理论

毛钧杰 何建国编著

国防科技大学出版社

湖南·长沙

图书在版编目 (CIP) 数据

电磁场理论/毛钧杰, 何建国. —长沙: 国防科技大学出版社, 1998. 9
ISBN 7-81024-496-5

I. 电. 电磁场理论

II. ①毛钧杰②何建国

III. ①电磁场②电磁波

IV. TN01

国防科技大学出版社出版发行

电话: (0731) 4565681 邮政编码: 410073

E-mail: gfkdcbs@public.cs.hn.cn

责任编辑: 谢小伟 责任校对: 黄 煌

新华书店总店北京发行所经销

国防科技大学印刷厂印装

*

开本: 787×1092 1/16 印张: 22.5 字数: 520 千

1998年9月第1版第1次印刷 印数: 1—4000册

*

定价: 25.00 元

内 容 提 要

本书重点研究电磁场的基本理论。主要包括场论、电磁基本实验定律及其推论、时变电磁场、无界均匀媒质中平面电磁波的传播、电磁波在分区均匀媒质中的传播、导行电磁波、静态场和静态场的解法。

本书是为电磁场与微波技术专业编写的大学本科教材，也可供电子工程其它各专业的学生和从事电子工程的研究人员及工程技术人员参考。

前 言

本教材参考学时数为 80 学时,全书共分为八章。主要内容为:第一章场论,论述研究场的数学方法,在介绍场的基本概念之后,重点研究了梯度、散度和旋度,以此为基础,进一步研究了在电磁场理论中有重要应用的矢量恒等式、格林定理和亥姆霍兹定理以及广义正交曲线坐标系。第二章电磁基本实验定律,研究了电磁理论中的库仑定律、安培定律和法拉第电磁感应定律及其推论,为研究一切宏观电磁现象所遵循的普遍规律提供论述的基础。第三章时变电磁场,在归纳总结电磁基本实验定律及其推论的基础上,导出了描述一切宏观电磁现象的麦克斯韦方程组,以此为基础研究了电磁场的基本属性、运动规律和计算方法,并讨论了电磁波的辐射。第四章无界均匀媒质中平面电磁波的传播,重点研究了电磁波在无界均匀理想媒质、导电媒质和各向异性媒质中的传播特性与传播参数,研究了在电子工程中有重要实际应用的电磁波极化特性。第五章电磁波在分区均匀媒质中的传播,以反、折射定律与菲涅耳公式为基础,研究了电磁波向两不同媒质交界面入射时所发生的各种物理现象及两媒质中波的传播特性。第六章导行电磁波,研究了导行波的一般分析方法,以此为基础研究了矩形波导、圆波导和介质波导中导行波的传播特性和传播参数。第七章静态场,从麦克斯韦方程组出发导出静态电磁场的场方程,以此为基础,研究了静态场的边界条件、静态场的比拟、位函数的多极展开、静态场中的导体系统、静态场的能量和静态场中力的计算等问题。第八章静态场的解法,以唯一性定理为基础,研究了求解静态场的镜像法、格林函数法、分离变量法、保角变换法和有限差分法等计算方法。每章均有适当的例题,每章末都附有一定数量的习题。

从全书主要内容及内容的编排可以看出,本教材具有以下主要特点:

1. 对于全书所需的场论知识,在第一章作了系统的介绍,内容力求深入浅出,便于教学和读者自学。
2. 全书以麦克斯韦方程组为主线。本书在深入研究库仑定律、安培定律和法拉第电磁感应定律等电磁基本实验定律的基础上,得到了描述一切宏观电磁现象基本规律的麦克斯韦方程组,从麦克斯韦方程组出发去研究各种电磁场问题。
3. 本书编排体系新颖,符合认识规律和教学规律。本书一开始先讲述场论的基础知识,为研究电磁场理论提供了必需的数学基础知识和研究电磁场的数学方法。对电磁基本实验定律及其推论进行概括、总结和提高,引出电磁场理论的核心麦克斯韦方程组,并深入研究了电磁场的基本属性和运动规律。以麦克斯韦方程组为纲研究了电磁波在无界、有界空间传播的基本问题。本书第七章从麦克斯韦方程组出发,再次导出静态场的方程,更进一步使读者明了静态场是时变电磁场的特例;并且本章按研究方法归类来论述位函数的多极展开、静态场中的多导体系统、静态场能量和力的计算等问题,便于教学,便

于读者对这些内容的理解和掌握。

本书的内容是从成熟的电磁理论中,根据国防科技大学电磁场理论课程教学大纲的要求编写而成。考虑到微波技术基础和天线原理等后续课程中有专门的章节详细论述导行电磁波和电磁辐射,故本教材在不失电磁场理论完整性的前提下,仅扼要地介绍了导行波的一般分析方法、传播特性和几种常见波导中的导行波;同时仅以电偶极子、磁偶极子为例扼要地介绍了电磁辐射最基本的概念,并将它作为第三章所述电磁场计算方法的应用实例编在第三章。本书作为电磁场与微波技术、通信工程和信息工程等电子工程各专业的大学本科教材,舍去了极少应用的运动系统电磁场和带电粒子与电磁场相互作用等内容。

本书由毛钧杰编写一、二、三、四、五章,何建国编写六、七、八章。毛钧杰主编并统编全稿。姚德森教授对全书进行了认真审阅,提出了许多宝贵的意见。国防科技大学403教研室的同事们对于本书的编写从各方面给予鼓励和帮助,国防科技大学出版社为本书的出版付出了辛勤的劳动,在此一并表示诚挚的感谢。由于编者水平有限,书中难免还存在一些缺点和错误,殷切希望读者批评指正。

编 者

1998年6月

目 录

第一章 场论

1.1 场的基本概念	1
1.1.1 标量场的等值面	1
1.1.2 矢量场的矢量线	2
1.2 标量场的梯度	3
1.2.1 方向导数	4
1.2.2 梯度	5
1.3 矢量场的散度	8
1.3.1 通量	8
1.3.2 散度	9
1.4 矢量场的旋度	14
1.4.1 环量	14
1.4.2 环量面密度	15
1.4.3 旋度	15
1.5 哈密尔顿算子及其恒等式	19
1.5.1 含有哈密尔顿一阶微分算子的恒等式	19
1.5.2 含有哈密尔顿二阶微分算子的恒等式	22
1.5.3 含有 ∇ 算符的积分变换恒等式	24
1.6 格林定理与亥姆霍兹定理	24
1.6.1 格林定理	25
1.6.2 亥姆霍兹定理	25
1.7 广义正交曲线坐标系	27
1.7.1 广义正交曲线坐标系的基本概念	27
1.7.2 正交曲线坐标系中的长度元、面积元和体积元	29
1.7.3 正交曲线坐标系中 ∇u 、 $\nabla \cdot A$ 、 $\nabla \times A$ 和 $\nabla^2 u$ 的计算公式	31
习题	36

第二章 电磁基本实验定律

2.1 狄拉克 δ 函数	38
2.2 真空中的库仑定律、静电场的散度和旋度	39
2.2.1 库仑定律	39
2.2.2 电场强度	41

2.2.3 静电场的散度	43
2.2.4 静电场的无旋性	45
2.2.5 电偶极子的场	48
2.2.6 静电场中的导体	50
2.3 电介质中的静电场	51
2.3.1 电介质的极化	52
2.3.2 极化电介质产生的场	52
2.3.3 电介质中静电场场方程	54
2.3.4 结构关系式	55
2.4 真空中的安培定律、恒定电流磁场的散度和旋度	57
2.4.1 恒定电流的基本概念、电荷守恒定律	57
2.4.2 安培定律、磁感应强度	59
2.4.3 洛伦兹力	62
2.4.4 真空中恒定电流磁场的基本方程	62
2.4.5 矢量磁位与标量磁位	65
2.5 磁介质中恒定电流磁场的场方程	69
2.5.1 物质的磁化	69
2.5.2 磁化介质产生的场	70
2.5.3 磁介质中恒定电流磁场的场方程	73
2.5.4 结构关系式	74
2.5.5 均匀磁介质中 A 和 ϕ_m 的微分方程	75
2.6 法拉第电磁感应定律	75
2.6.1 静止回路的电磁感应定律	76
2.6.2 运动回路中的电磁感应定律	76
习题	80

第三章 时变电磁场

3.1 麦克斯韦方程组与洛伦兹力	84
3.1.1 电磁基本实验定律的推广	84
3.1.2 麦克斯韦方程组	86
3.1.3 时谐电磁场	88
3.1.4 复介电常数和复磁导率	90
3.1.5 洛伦兹力	91
3.2 时变电磁场的边界条件	91
3.2.1 场矢量 D 和 B 法向分量在两不同媒质交界面处的方程	91
3.2.2 场矢量 E 和 H 切向分量在两不同媒质交界面处的方程	92
3.3 电磁场的能量	94
3.3.1 一般时变场中的坡印亭定理与坡印亭矢量	94
3.3.2 复坡印亭矢量与复坡印亭定理	97
3.4 电磁场的波动性	100
3.4.1 波动方程	100

3.4.2 波动性	101
3.5 时变场的位函数	102
3.5.1 位函数的引入	102
3.5.2 位函数 A 和 ϕ 的微分方程	103
3.5.3 无界空间位函数方程的解——滞后位	105
3.6 时变电磁场的唯一性定理	108
3.7 麦克斯韦方程组的对称形式与对偶性原理	110
3.7.1 磁流、磁荷及麦克斯韦方程组的对称形式	110
3.7.2 对偶性原理	112
3.8 电偶极子与磁偶极子的辐射	114
3.8.1 电偶极子的辐射	114
3.8.2 磁偶极子的辐射	118
习题	121

第四章 无界均匀媒质中均匀平面电磁波的传播

4.1 无界理想均匀媒质中均匀平面电磁波的传播	125
4.1.1 波动方程的解	125
4.1.2 K 、 E 、 H 三矢量之间的关系	127
4.1.3 传播特性与传播参数	128
4.2 电磁波的极化	131
4.2.1 线极化波	132
4.2.2 圆极化波	133
4.2.3 椭圆极化波	134
4.3 无界均匀导电媒质中均匀平面波的传播	137
4.3.1 波动方程的解及 K 、 E 、 H 三矢量之间的关系	137
4.3.2 传播特性与传播参数	138
4.3.3 电磁波在良介质和良导体中传播参数的近似计算	141
4.4 无界均匀等离子体中均匀平面波的传播	143
4.4.1 磁化等离子体的张量介电常数	144
4.4.2 无界均匀磁化等离子体中均匀平面波所满足的方程	146
4.4.3 无界等离子体中均匀平面波的传播特性	146
4.4.4 无界磁化等离子体中均匀平面波的传播特性	147
4.5 无界均匀铁氧体中均匀平面波的传播	155
4.5.1 磁化铁氧体的张量磁导率	156
4.5.2 无界均匀磁化铁氧体中均匀平面波所满足的方程	159
4.5.3 磁化铁氧体中均匀平面波的传播特性	159
4.6 非单色波、群速	163
4.6.1 波形不失真的条件	163
4.6.2 相速与群速间的关系	164
习题	165

第五章 电磁波在分区均匀媒质中的传播

5.1 反射、折射定律与菲涅耳公式	168
5.1.1 反射、折射定律	168
5.1.2 菲涅耳公式	171
5.2 电磁波向导电媒质界面的垂直入射	174
5.2.1 垂直入射时的菲涅耳公式	174
5.2.2 平面波自理想媒质向一般导电媒质的垂直入射	175
5.2.3 平面波自理想媒质向良导体的垂直入射	177
5.2.4 平面波自理想媒质向理想导体的垂直入射	181
5.3 电磁波向理想媒质界面的垂直入射	183
5.3.1 两层介质的情况	183
5.3.2 多层介质的情况	185
5.4 平面电磁波向理想导体界面的斜入射	189
5.4.1 垂直极化波斜入射	189
5.4.2 平行极化波斜入射	192
5.5 平面电磁波向理想介质平面的斜入射	193
5.5.1 界面两侧理想媒质中波的一般传播特性	193
5.5.2 全透射与全反射	195
5.6 平面电磁波向有耗媒质界面的斜入射	200
5.6.1 透射波的传播矢量 K_2	200
5.6.2 有耗媒质中透射波的传播特性及传播参数	202
习题	204

第六章 导行电磁波

6.1 导行波的一般分析方法	207
6.1.1 导行波的一般形式及纵向场法	207
6.1.2 导行波的分类	210
6.2 导波系统中的 TEM 波	211
6.3 TE 波和 TM 波的传输特性	212
6.4 矩形波导中的导行波	214
6.4.1 矩形波导中导行波的横向分布函数	215
6.4.2 矩形波导中 TE_{mn} 波和 TM_{mn} 波场的表达式	217
6.5 矩形波导中的主模—— TE_{10} 波	218
6.5.1 TE_{10} 波的场表示式及波导壁上的电流分布和传播参数	218
6.5.2 TE_{10} 波的场分布图	219
6.5.3 TE_{10} 波传输的功率及功率损耗	221
6.6 圆柱形波导	224
6.6.1 TE 模	225
6.6.2 TM 模	227
6.7 介质波导	229

6.7.1 介质板波导	229
6.7.2 圆柱形介质棒波导	234
习题	238

第七章 静态电磁场

7.1 静态场方程	240
7.1.1 静电场方程	240
7.1.2 恒定电流磁场的场方程	241
7.1.3 恒定电流场	241
7.2 静态场的边界条件	244
7.2.1 静电场的边界条件	244
7.2.2 恒定电流磁场的边界条件	246
7.2.3 恒定电流场的边界条件	248
7.3 静态场的比拟	249
7.3.1 恒定电流场与静电场的比拟	249
7.3.2 恒定电流磁场与静电场的比拟	252
7.4 位函数的多极展开	253
7.4.1 电位的多极展开	253
7.4.2 矢量磁位的多极展开	256
7.5 静态场中的多导体系统	258
7.5.1 多导体系统中的部分电容	258
7.5.2 导体回路的自感及导体回路之间的互感	263
7.6 静态场的能量	267
7.6.1 静电场的能量	267
7.6.2 恒定电流磁场的能量	271
7.7 静态场中力的计算	276
7.7.1 虚位移法的基本思想	276
7.7.2 电场力的计算	276
7.7.3 磁场力的计算	278
习题	281

第八章 静态场的解法

8.1 边值问题的数学模型及唯一性定理	285
8.1.1 静态场边值问题的数学模型	285
8.1.2 唯一性定理	288
8.2 镜像法	289
8.2.1 导体平面的镜像法	290
8.2.2 导体球面的镜像法	294
8.2.3 导体圆柱的镜像法——电轴法	295
8.2.4 介质交界面的镜像法	298

8.3 格林函数法.....	299
8.3.1 格林函数	299
8.3.2 格林函数边值问题的提法	300
8.3.3 格林函数法应用举例	303
8.4 分离变量法	304
8.4.1 直角坐标系中的分离变量法	305
8.4.2 圆柱坐标系中的分离变量法	309
8.4.3 球坐标系中的分离变量法	314
8.5 复变函数法	317
8.5.1 复位函数法	317
8.5.2 保角变换法	320
8.5.3 许瓦兹—克里斯多非变换	322
8.6 有限差分法	326
8.6.1 差分方程的推导	327
8.6.2 差分方程组的求解	328
8.6.3 场域边界条件的处理方法	330
习题.....	333
 附录	
I 重要的矢量公式.....	338
II 贝塞尔函数.....	340
III 勒让德函数.....	345
参考书目.....	348

第一章 场 论

在许多科学和技术问题中,常常要研究某种物理量在空间的分布、变化规律以及物理量与产生它的源之间的相互关系,引进场的概念、应用场论这一数学工具,就可以很方便地揭示和探索这些规律。在电磁场理论中,应用场论的数学方法可方便地导出描述场物理本质的简练公式。在学习电磁场理论时,不熟练掌握场论的数学方法,就如同学习物理时没有掌握代数和微积分一样,都不可能获得透彻的理解。

本章先介绍场的基本概念,再重点研究标量场的梯度、矢量场的散度和旋度,以此为基础,进一步讨论矢量恒等式、格林定理和亥姆霍兹定理,最后导出梯度、散度和旋度在正交曲线坐标系中的计算公式。

1.1 场的基本概念

如果在某时空域内的每一时空点都有某一物理量的确定值与之对应,就说在该时空域内确定了该物理量的场。显然随时空坐标变化的某个物理量的场,可以用随时空坐标变化的一个单值四元函数表示出来。如果物理量是标量,就称这个场为标量场;如果物理量是矢量,就称这个场为矢量场。温度场、密度场、电位场都是标量场;而重力场、速度场、电场和磁场都是矢量场。如果物理量不随时间而变化,则称该物理量的场为静态场;如果物理量随时间变化,则称该物理量的场为时变场;如果物理量随时间作简谐变化,则称该物理量的场为时谐场,显然时谐场是时变场的一个特例。

本章只研究静态场,所得结论也适用于时变场的每一时刻。

1.1.1 标量场的等值面

根据标量场的定义,标量场 u 可以表示成 $u=u(M)$, 其中 M 为场中之点。若取直角坐标系 $oxyz$, 场中 M 点的坐标为 (x, y, z) , 则标量场 u 就可以用标量函数

$$u = u(x, y, z)$$

表示出来。因为场中每一点都对应着某个物理量的一个确定值,故上述标量函数 u 为单值函数。

为了直观地表示标量 u 在场中的分布状况,引入等值面的概念。场中使函数 u 取相同数值的点所构成的曲面称为等值面。如函数 u 代表电位,则其等值面就是等位面;如函数 u 代表温度,则其等值面就是等温面;其余依此类推。

根据等值面的定义,标量场 u 的等值面方程为

$$u(x, y, z) = c \quad (c \text{ 为常数}) \quad (1.1)$$

式(1.1)中常数 c 取不同的数值,就得到不同的等值面,如图 1-1 所示,这簇等值面充满了标量场 u 所在的空间。由于函数 u 是空间坐标的单值函数,显然等值面互不相交,场中一点只有一个等值面通过。

例如无界空间置于坐标原点的电量为 q 的点电荷,它在空间任意一点的电位 $\Phi(x, y, z)$ 为

$$\Phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0[x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}}$$

式中 ϵ_0 为真空的介电常数,则其等位面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2$$

c 为常数。显然点电荷等位面是一簇以坐标原点为球心的同心球面。

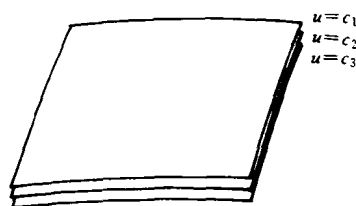


图 1-1 等值面

如果函数 u 仅为坐标 (x, y) 的函数,则 $u=u(x, y)$ 表示的是平面标量场,函数 u 取相同数值的点所组成的曲线,称为平面标量场 u 的等值线。其等值线方程为

$$u(x, y) = c(\text{常数}) \quad (1.2)$$

地形图中的等高线,地面气象图中的等压线、等温线都是平面标量场等值线。

标量场的等值面或等值线可以直观地帮助我们了解场中物理量的分布状况。例如图 1-2 是某个地区的等高线,由图可根据等高线疏密程度,大致判断出这个地区中央海拔高度较高、四周较低,还可以看出该地区西南方向地势高、坡度大,而东北地区地势较低且坡度小。

1.1.2 矢量场的矢量线

根据矢量场的定义,矢量场 A 可以表示成 $A=A(M)$,其中 M 为场中之点。若取直角坐标系 $oxyz$,场中 M 点的坐标为 (x, y, z) ,则矢量场 A 可用矢量函数

$$A = A(x, y, z) \quad (1.3)$$

表示出来,根据矢量加法的三角形运算法则,上式又可表示成

$$A = a_x A_x(x, y, z) + a_y A_y(x, y, z) + a_z A_z(x, y, z) \quad (1.4)$$

式中: a_x, a_y, a_z 分别是直角坐标系中 x, y, z 三个方向上的单位矢量; $A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z)$ 是矢量 A 的三个坐标(即 A 在三个坐标轴上的投影),它们也都是坐标的单值函数。

为了形象地表示场矢量在场中的分布,引入矢量线的概念。所谓矢量线乃是这样的曲线,曲线上每点的切线方向与该点场矢量的方向相同,

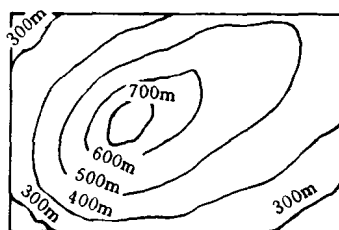


图 1-2 等高线

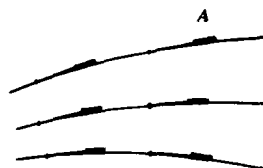


图 1-3 矢量线

如图 1-3 所示。物理学中的电力线、磁力线都是矢量线。

根据矢量线的定义,容易导出矢量线方程。在矢量场 A 中,设 $M(x, y, z)$ 为矢量线上任意一点,该点的线元矢量 dl 为

$$dl = a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

该点处的场矢量 A 为

$$A = a_x A_x(x, y, z) + a_y A_y(x, y, z) + a_z A_z(x, y, z)$$

由矢量线的定义可知, dl 与 A 平行, 据此得

$$\begin{aligned} A \times dl &= (a_x dx + a_y dy + a_z dz) \times [a_x A_x(x, y, z) + a_y A_y(x, y, z) + a_z A_z(x, y, z)] \\ &= a_x [A_z(x, y, z) dy - A_y(x, y, z) dz] + a_y [A_x(x, y, z) dz - A_z(x, y, z) dx] \\ &\quad + a_z [A_y(x, y, z) dx - A_x(x, y, z) dy] \\ &= 0 \end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{dx}{A_x(x, y, z)} = \frac{dy}{A_y(x, y, z)} = \frac{dz}{A_z(x, y, z)} \quad (1.5)$$

这就是矢量线应满足的微分方程。解此方程即可得矢量线簇。由矢量场和矢量线的定义可知, 矢量线簇充满了矢量场所在的空间、且矢量线互不相交。

例 1.1 已知位于坐标原点处电量为 q 的点电荷的电场强度矢量为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} r$$

其中 $r = xa_x + ya_y + za_z$, $r = |r| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, 求 E 的矢量线。

解 将 r 和 r 的表示式代入 E , 得

$$\begin{aligned} E &= a_x \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + a_y \frac{qy}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + a_z \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= a_x E_x(x, y, z) + a_y E_y(x, y, z) + a_z E_z(x, y, z) \end{aligned}$$

将式(1.5)中的 A_x 、 A_y 、 A_z 分别换成上式中的 E_x 、 E_y 、 E_z , 得

$$\begin{cases} \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \\ \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \end{cases}$$

解此方程, 得

$$\begin{cases} y = c_1 x \\ z = c_2 y \end{cases} \quad (c_1, c_2 \text{ 为任意常数})$$

这就是坐标原点处点电荷电场强度 E 的矢量线方程, 其图形是如图 1-4 所示的一簇从坐标原点出发的射线, 电磁学中称之为电力线。当 q 为正时, 电力线方向为图 1-4 所示方向; q 为负时电力线方向与图 1-4 所示方向相反。

1.2 标量场的梯度

对于标量场 $u = u(M)$, 我们最感兴趣的问题是标量函数 $u = u(x, y, z)$ 在空间任意一

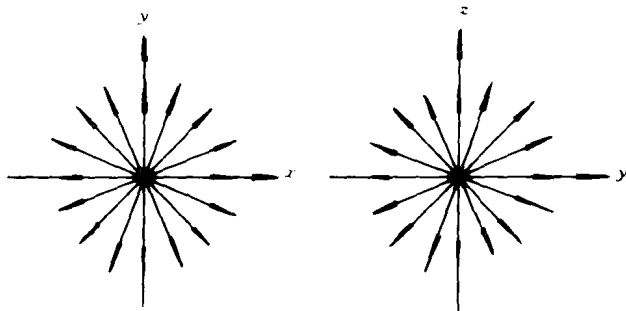


图 1-4 位于坐标原点处的点电荷的电力线

点处沿哪个方向变化率最大以及这个最大变化率的值。这就是本节要研究的标量场的梯度。为了研究标量场的梯度,我们从研究标量函数的方向导数入手。

1.2.1 方向导数

设 $M(x, y, z)$ 为标量场 $u = u(M)$ 中的任意一点, t 为过该点的任意一条射线, 在射线 t 上 M 点附近取一点 $M'(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, 这两点间的距离记为 ρ (如图 1-5 所示), 两点间标量函数 u 的变化量记为 $\Delta u = u(M') - u(M)$ 。若 M' 点趋近于 M 点时比值

$$\frac{\Delta u}{\rho} = \frac{u(M') - u(M)}{\rho}$$

的极限存在, 则称此极限为标量函数 u 在 M 点沿 t 方向的方向导数, 记为 $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_M$, 即

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_M = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\rho} = \lim_{M' \rightarrow M} \frac{u(M') - u(M)}{\rho} \quad (1.6)$$

由方向导数的定义可知, 标量函数 u 在场中 M 点沿 t 方向的方向导数就是函数 u 在 M 点沿 t 方向对距离的变化率。因两点间的距离 ρ 为正数, 显然 $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$ 表示函数 u 在 M 点沿 t 方向是增加的, 而 $\frac{\partial u}{\partial t} < 0$ 则表示函数 u 在 M 点沿 t 方向是减小的。

根据方向导数的定义可直接导出其计算公式。若函数 u 在 M 点可微, 则式(1.6)中的 Δu 可表示成

$$\Delta u = u(M') - u(M) = du + \omega \rho$$

式中 ω 在 $\rho \rightarrow 0$ 时也趋于零, du 为函数 u 在 M 点的全微分, 且

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z$$

于是 Δu 又可表示成

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \omega \rho$$

将上式代入式(1.6), 得

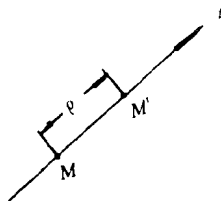


图 1-5 方向导数定义用图

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\Delta y}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\Delta z}{\rho}$$

由图 1-5 可知, Δx 、 Δy 、 Δz 是线段 MM' 分别在 x 、 y 、 z 轴上的投影, 故 $\Delta x/\rho = \cos\alpha$ 、 $\Delta y/\rho = \cos\beta$ 、 $\Delta z/\rho = \cos\gamma$ 是射线 t 的方向余弦, 上式又可表示成

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma \quad (1.7)$$

这就是直角坐标系中方向导数的计算公式。

定理: 在有向曲线 C 上取定一点 M_0 作为计算弧长 s 的起点, 并以 C 之正向作为 s 增大的方向; 在 C 上任取一点 M , 在 M 点处沿 C 之正向作射线 t , 使 t 与 C 相切, 如图 1-6 所示。若函数 u 在 M 点可微, 曲线 C 光滑, 则函数 u 在 M 点沿 t 方向的方向导数就等于函数 u 对弧长 s 的全导数, 即

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{ds} \quad (1.8)$$

证: 设曲线 C 以弧长 s 为参数的参数方程为

$$x = x(s), y = y(s), z = z(s)$$

则在曲线 C 上任意一点的函数 u 可表示成

$$u = u(x, y, z) = u[x(s), y(s), z(s)]$$

由于在曲线 C 上 M 点处函数 u 可微、曲线 C 光滑, 根据复合函数求导法则, 函数 u 在 M 点对弧长 s 的全导数为

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{ds}$$

注意到 $\frac{dx}{ds}$ 、 $\frac{dy}{ds}$ 、 $\frac{dz}{ds}$ 正好是 M 点处曲线 C 的切线 t 的方向余弦, 可表示成

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma$$

则 du/ds 又可表示成

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma$$

将该式与式(1.7)比较, 即得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{ds}$$

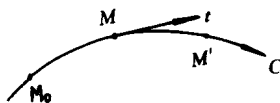


图 1-6 定理用图

1.2.2 梯度

在标量场 u 中计算某点标量函数 u 沿某个方向的方向导数, 即可知道函数 u 在该点沿该方向的变化率。但场中从给定点出发有无穷多个方向, 在该点函数 u 沿哪个方向变化率最大? 这个最大变化率的值又是多大? 这是必须进一步研究的问题。

一、梯度的定义

在计算方向导数的公式(1.7)中, $\cos\alpha$ 、 $\cos\beta$ 、 $\cos\gamma$ 是 t 方向的方向余弦, 也是 t 方向上