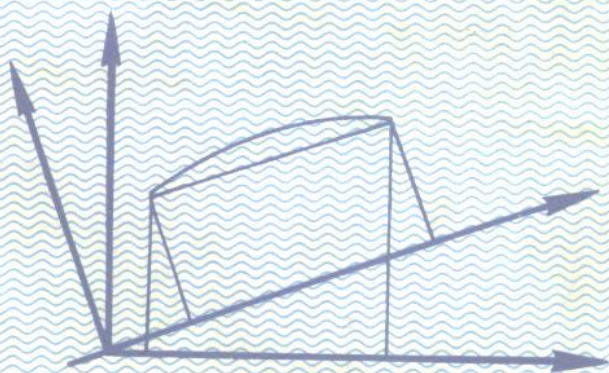


船体型线光顺

(应用弯调松弛方法)

大连工学院 熊西文 编



国防工业出版社

内 容 简 介

本书介绍采用小参数转坐标方法进行船舶型线的数学描述，用弯调松弛方法进行船体型线的光顺。书中还附有计算框图，供参考。

本书可供造船放样工人、技术人员及大专院校有关师生阅读。

船 体 型 线 光 顺

《应用弯调松弛方法》

大连工学院 熊西文 编

国防工业出版社 出版

北京市书刊出版业营业许可登记证出字第 074 号

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

850×1168 $\frac{1}{32}$ 印张 3 73千字

1979年9月第一版 1979年9月第一次印刷 印数：0,001—3,000册

统一书号：15034·1835 定价：0.40^元

(限国内发行)

序 言

数学放样是我国造船技术中推广应用的一项新工艺和新技术。这项新技术的采用，不仅能直接提高船体放样工作的质量和效率，大大地减轻放样工人的体力劳动强度，有利于造船周期的缩短，而且还为造船技术自动化打下良好的基础。因此，这项新技术受到生产单位的重视，并不断地得到完善和发展。

船型数学放样的弯调松弛法是近几年来发展起来的一种新的数学放样方法。在船舶型线的描述上，它不是把通常使用的“三次样条函数”作为表示型线的基本工具，而是应用了微分方程理论中的“小参数法”，把“小参数法”的逐次近似解作为表达船舶型线的工具，这是极有利于提高对船舶型线的表达能力和逼近精度的。在船舶型线描述方法上，还引进了“分段旋转坐标轴”的方法，成功地解决了线型的分段连接问题。这些措施对一般属于实质上具有大挠度的连续梁的求解问题，也将是十分有利的。

在船体型线的光顺问题上，这个方法规定把型线的拐点个数、型线在各段的弯曲方向，作为控制输出的必要条件，因此，这就足以为光顺后的型线尽可能与原设计型线规定的形状相一致提供了保证。

型值的修改是按线型在型值点处的“弯向”或“弯势”是否合于设计要求逐点进行计算的。为使计算能“平稳”地进行，通常在逐点计算出的修改量上适当地加以一个松弛因子。当型值表中只包含有量测和观察中的误差时，这样光顺输出的型线与原设计型线的偏离就将被控制在一个较小的范围内。

本书共有三章。第一章叙述了大挠度连续梁定解问题的数学提法，较详细地演算了用小参数法求解该问题的近似解的若干公

式，并讨论了有关的插值问题；第二章讨论了船体型线光顺标准的问题，给出了“弯向”或“弯势”合理与否的判别准则，以及型值修改量计算的公式、部分实算经验分析和处理等；第三章把单根曲线的弯调松弛法用于船型的总体光顺上，讨论了船型边界线的生成和修改，总体光顺的迭代组织过程。本章还叙述了船型总体光顺程序的功能、结构、输入输出规定情况。

本书所述的方法曾在 DJS-6 机上编制成语言程序，并在大连造船厂应用于实船放样，效果是令人满意的。

限于篇幅，书中没有列出计算的详细语言程序，只是给出了算法框图，仅供参考。

本书总结了大连工学院数理力学系《船型数学放样》小组研究的成果，在方法的研制和改进方面吸收了罗远途同志的一些有益思想。在本书编写过程中，左凤贤等同志参加有关计算和文稿校核工作。基础部吕奇玉同志帮助描绘本书插图。大连造船厂船体车间于文喜、金世良、裴志宏等同志给予了大力帮助。在此，表示谢意。

由于本方法自用于生产以来，所算船型尚不多，我们的经验及水平有限，书中难免有错误之处，请广大读者批评指正。

编者

目 录

第一章 样条曲线的描述 (小参数法)	1
§ 1 样条的物理模型	1
§ 2 两点边值问题	3
§ 3 样条曲线的定解条件	4
§ 4 两点边值问题的小参数解法	5
§ 5 旋转坐标轴问题	11
§ 6 连接条件	15
§ 7 循环结束控制及收敛性问题	20
§ 8 插值问题	21
§ 9 样条函数计算程序框图	23
第二章 单根曲线的光顺 (弯调松弛法)	30
§ 1 弯调信息	30
§ 2 小挠度模型 (内部节点的弯调)	32
§ 3 端点弯向的弯调	36
§ 4 型线的弯势调整	40
§ 5 弯调程序框图	42
§ 6 单根曲线光顺的数值例子	50
第三章 船型总体光顺	55
§ 1 概述	55
§ 2 船型边值条件的生成	56
§ 3 端部切点线的生成及光顺	57
§ 4 船型顶线的光顺	64
§ 5 平边线的光顺	66
§ 6 平底线的光顺	69
§ 7 分段光滑曲线的连接	73
§ 8 船型总体光顺	76
§ 9 型线的加密	82
§ 10 几个子程序	83

第一章 样条曲线的描述

(小 参 数 法)

§ 1 样条的物理模型

放样工人手中的样条, 恰好可以看成是材料力学上的一根等宽度等厚度的质地均匀而有弹性的梁。当压上压铁并按型值点分布位置围成一条曲线时, 此时可以把压铁的重力通过地板的摩擦力横向作用于样条上的弹性外力, 看作是弹性梁在型点处所受的集中载荷, 如图 1 中(a), 于样条上任取一小段, 设样条中心轴方程为

$$y = Y(x) \quad (1.1)$$

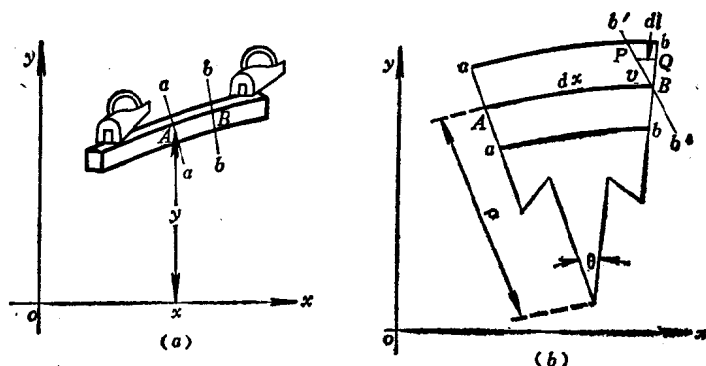


图 1 压样条与样条剖面

梁段的两个横剖面各为 aa 和 bb , 经放大后 (见图 1 中(b)), 令 ρ 是梁的中心轴上的点 A 处的曲率半径, 而 $b'b'$ 和 bb 是梁上的同一剖面在受弯以前和受弯以后的位置, 在 $b'b'$ 剖面上距离中心轴为 v 的地方任取一点 P , 而 Q 是 P 点在弯曲后的位置, 记

$$dl = \widehat{PQ} = v\theta = -\frac{1}{\rho}v dx \quad (1.2)$$

是 P 点在受弯后产生的位移, θ 是梁段 $\widehat{AB}$ 所对应的圆心角; 设梁在 P 点处的应变和应力各为 ε 和 σ , 则有

$$\varepsilon = \frac{dl}{dx} = \frac{v}{\rho} \quad (1.3)$$

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{v}{\rho} \quad (1.4)$$

此处 E 是梁的弹性模量。

梁在受力平衡后, 应有

$$\int \sigma ds = \int E \frac{v}{\rho} ds = 0 \quad (1.5)$$

$$\int \sigma v ds = \int E \frac{v^2}{\rho} ds = M \quad (1.6)$$

即在剖面 bb 上的应力的合力应为零, 而 bb 上的合力矩应等于外力矩 M 。

式 (1.5) 和 (1.6) 中的积分是在剖面 bb 上进行的, E 是常数, ρ 近似地是常数, 由 (1.6) 则有:

$$\frac{E}{\rho} \int v^2 ds = M$$

根据微分学

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

得

$$EJ y'' / (1 + y'^2)^{3/2} = M \quad (1.7)$$

式中 J 是梁对于其中心轴的惯性矩。

外力矩 M 在梁段内的增量 dM 应是 bb 剖面上的剪切力 N 与 dx 的乘积, 在梁不受横向外力作用, 即不在压铁压点处, 这个剪切力 N 应是常数, 即

$$dM = N dx$$

由 (1.7) 得

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{EJ} M \right) = 0 \quad (1.8)$$

这就是样条所应满足的微分方程。

(1.8) 是在 x 不是处于压铁压点位置时推导出来的, 在 x 处于压铁压点位置时, 样条的剪切力将有间断点, 因此 $Y(x)$ 的三阶导数将有间断点, 但是 $Y(x)$ 的一阶、二阶导数则是处处连续的; 本书中, 将把具有一阶、二阶连续导数且在相邻型值点之间满足微分方程 (1.8) 的一类曲线称为样条曲线。

用样条曲线来描述船体型线, 不仅能保证型线有足够的光滑性, 而且由于样条曲线的曲率具有分段成线性变化这一性质, 可知样条在相邻型值点之间将至多只有一个拐点, 这个性质对于考查和调整型线在各部分的弯曲的情况是很有用的。

§2 两点边值问题

求解样条曲线就是要分段求解微分方程 (1.8), (1.8) 是一个四阶的常微分方程, 需要有四个条件来作为其定解条件, 下面我们将研究具有下列定解条件的定解问题:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = 0, & a \leq x \leq b \\ Y(a) = y_a, Y(b) = y_b, m(a) = m_a, m(b) = m_b \end{cases} \quad (1.9)$$

这里

$$m(x) = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

是样条函数 $Y(x)$ 的曲率函数。

问题 (1.9) 的解法将作为求解样条曲线的基本子程序, 特称之为两点边值问题。此中的数据如 y_a 和 y_b 当然是来源于型值表, 至于端点处的曲率值, 在后面将会看到那是由所组织的一个循环迭代过程来确定的, 在迭代开始时, 它们是事先任意设定的一组初值。

§ 3 样条曲线的定解条件

设样条曲线上给定的型值点共有 n 个:

$$(x_i, y_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.10)$$

由相邻的型值点组成的定解区间共有 $n - 1$ 个, 在每一个这样的小区间

$$(x_i, x_{i+1}) \text{ 上 } (i = 1, 2, \dots, n - 1)$$

求解两点边值问题 (1.9) 需要 4 个定解条件, 因此, 求解样条曲线所需要的定解条件应是 $4(n - 1)$ 个, 但是这些条件中只有 $n + 2$ 个条件是独立的。我们把样条上除端点以外的其余 $n - 2$ 个型值点叫内部型值点, 在这些型值点处两邻算得的函数值、导数值、二阶导数值应是相等的, 即

$$Y(x_i - 0) = Y(x_i + 0)$$

$$Y'(x_i - 0) = Y'(x_i + 0)$$

$$Y''(x_i - 0) = Y''(x_i + 0), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$$

这样, 在所有内部型值点处便自动地提供了 $3(n - 2)$ 个条件, 它们不是独立的, 特称之为连接条件; 从 $4(n - 1)$ 个条件中减去 $3(n - 2)$ 个不独立的条件, 便得出求解样条曲线的独立的定解条件的个数 $n + 2$ 。

这 $n + 2$ 个独立定解条件中的 n 个通常指的就是样条曲线在各个节点处的型值, 即

$$Y(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.11)$$

其余的两个条件, 或许使用两个端点处的导数值, 或许使用两个端点处的曲率值, 即

$$Y'(x_1) = y'_1, \quad Y'(x_n) = y'_n \quad (1.12)$$

或

$$m(x_1) = m_1, \quad m(x_n) = m_n \quad (1.13)$$

当在描述船体艏、艉部与艏、艉圆弧相切的水线型线时, 就可以使用 (1.12) 这种类型的定解条件, 当型线的一端相当平直

且近于直线时, 就可使用 (1.13) 这种类型的定解条件, 并把相应的 m_1 或 m_n 取成零。

§ 4 两点边值问题的小参数解法

考虑两点边值问题, 即

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2}(y''/(1+y'^2)^{3/2}) = 0, & a \leq x \leq b \\ Y(a) = Y(b) = V, & m(a) = m_a, m(b) = m_b \end{cases} \quad (1.14)$$

设其解为 $Y(x)$, 令

$y = y_\varepsilon = Y_\varepsilon(x)$ 是问题

$$\frac{d^2}{dx^2}(y_\varepsilon''/(1+\varepsilon y_\varepsilon'^2)^{3/2}) = 0$$

$$Y_\varepsilon(a) = Y_\varepsilon(b) = V, \quad m_\varepsilon(a) = m_a, \quad m_\varepsilon(b) = m_b \quad (1.15)$$

的解, 其中

$$m_\varepsilon(x) = y_\varepsilon''/(1+\varepsilon y_\varepsilon'^2)^{3/2} \quad (1.16)$$

称为 $Y_\varepsilon(x)$ 的此参数 ε 的曲率函数。而 ε 是一个小的参数。

由于 $Y(x)$ 可以看作是 $Y_\varepsilon(x)$ 在 $\varepsilon \rightarrow 1$ 时的极限, 则

$$Y(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} Y_\varepsilon(x) \quad (1.17)$$

转化为 $Y_\varepsilon(x)$ 的求法。

首先, 把 $Y_\varepsilon(x)$ 展开成 ε 的幂级数:

$$Y_\varepsilon(x) = Y_0(x) + \varepsilon Y_1(x) + \varepsilon^2 Y_2(x) + \cdots \quad (1.18)$$

并设法确定 $Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, $\cdots$ 。以后称 $Y_0(x)$, $Y_0(x) + \varepsilon Y_1(x)$, $Y_0(x) + \varepsilon Y_1(x) + \varepsilon^2 Y_2(x)$, $\cdots$ 为 $Y_\varepsilon(x)$ 的第一次、二次、 $\cdots$ 的近似解。

由 (1.18), 则

$$Y_\varepsilon'(x) = Y_0'(x) + \varepsilon Y_1'(x) + \varepsilon^2 Y_2'(x) + \cdots \quad (1.19)$$

$$Y_\varepsilon''(x) = Y_0''(x) + \varepsilon Y_1''(x) + \varepsilon^2 Y_2''(x) + \cdots \quad (1.20)$$

由 (1.15) 积分两次, 得:

$$y_\varepsilon''/(1+\varepsilon y_\varepsilon'^2)^{3/2} = \alpha x + \beta \quad (1.21)$$

代入定解条件, 得:

$$\alpha a + \beta = m_a$$

$$\alpha b + \beta = m_b$$

解出

$$\begin{aligned}\alpha &= (m_b - m_a)/(b - a) \\ \beta &= (bm_a - am_b)/(b - a)\end{aligned}\quad (1.22)$$

将 (1.18)~(1.20) 代入 (1.21), 则

$$\begin{aligned}\alpha x + \beta &= y''_\varepsilon (1 + \varepsilon y'^2_\varepsilon)^{-3/2} = y''_\varepsilon \left(1 - \frac{3}{2} \varepsilon y'^2_\varepsilon + \frac{15}{8} \varepsilon^2 y'^4_\varepsilon + \dots \right) \\ &= (y''_0 + \varepsilon y''_1 + \varepsilon^2 y''_2 + \dots) * \left\{ 1 - \frac{3}{2} \varepsilon * (y'^2_0 + 2\varepsilon y'_0 y'_1 \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^2 (y'^2_1 + 2 y'_0 y'_2) + \dots) + \frac{15}{8} \varepsilon^2 [y'^4_0 + 4\varepsilon y'_0 y'_1 \right. \\ &\quad \left. + \dots] + \dots \right\} = y''_0 + \varepsilon \left(y''_1 - \frac{3}{2} y'^2_0 y''_0 \right) \\ &\quad + \varepsilon^2 \left(y''_2 - \frac{3}{2} y'^2_0 y''_1 - 3 y'_0 y'_1 y''_0 + \frac{15}{8} y'^4_0 \right) + \dots\end{aligned}\quad (1.23)$$

比较 (1.23) 两端的 ε 方幂, 得:

$$\begin{aligned}y''_0 &= \alpha x + \beta \\ y''_1 &= \frac{3}{2} y'^2_0 y''_0 \\ y''_2 &= \frac{3}{2} y'^2_0 y''_1 + 3 y'_0 y'_1 y''_0 - \frac{15}{8} y'^4_0 \\ &\dots\end{aligned}\quad (1.24)$$

可见 (1.24) 是一个递推的常微分方程组, 其定解条件可由 (1.18) 代入 $x = a$ 和 $x = b$ 得出:

$$Y_\varepsilon(a) = y_a = Y_0(a) + \varepsilon Y_1(a) + \varepsilon^2 Y_2(a) + \dots$$

$$Y_\varepsilon(b) = y_b = Y_0(b) + \varepsilon Y_1(b) + \varepsilon^2 Y_2(b) + \dots$$

比较两端的 ε 方幂, 便得:

$$\begin{cases} Y_0(a) = Y_a = V, & Y_0(b) = Y_b = V \\ Y_1(a) = Y_1(b) = Y_2(a) = Y_2(b) = \dots = 0 \end{cases}\quad (1.25)$$

由 (1.24), (1.25) 可以解出:

$$Y_0(x) = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{6} \frac{m_b - m_a}{(b - a)} \\ a_2 = \frac{1}{2} \frac{bm_a - am_b}{b - a} \\ a_3 = \frac{a^2 m_b - b^2 m_a}{2(b - a)} - \frac{(b - a)(m_b - m_a)}{6} \\ a_4 = V - \frac{a^3 m_b - b^3 m_a}{6(b - a)} - \frac{(b - a)(bm_a - am_b)}{6} \end{array} \right. \quad (1.26)$$

$$Y_1(x) = b_1 x^7 + b_2 x^6 + b_3 x^5 + b_4 x^4 + b_5 x^3 + b_6 x^2 + b_7 x + b_8$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 = \frac{27}{14} a_1^3 \\ b_2 = 4.5 a_1^2 a_2 \\ b_3 = 3.6 a_1 a_2^2 + 2.7 a_1^2 a_3 \\ b_4 = a_2^3 + 4.5 a_1 a_2 a_3 \\ b_5 = 2 a_2^2 a_3 + 1.5 a_1 a_3^2 \\ b_6 = 1.5 a_2 a_3^2 \\ b_7 = \left(\sum_{i=1}^6 b_i b^{8-i} - \sum_{i=1}^6 b_i a^{8-i} \right) / (b - a) \\ b_8 = - \sum_{i=1}^7 b_i b^{8-i} \end{array} \right. \quad (1.27)$$

利用 (1.24)、(1.25), 原则上还可以继续求出 $Y_2(x)$, $Y_3(x)$, ... 等, 但从计算实践看, 继续进行这样的计算, 已经没有必要了。

在 (1.18) 中, 当 $\varepsilon \rightarrow 1$ 时, 我们就得到了问题 (1.16) 的第一次近似解 $Y_0(x)$ 和第二次近似解 $Y_0(x) + Y_1(x)$, ...。

为了把两点边值问题的精确解 $Y(x)$ 及其近似解 $Y_1(x)$ 和 $Y_2(x)$ 作一些比较, 今设

$$\begin{cases} Y(x) = Y_0(x) + Y_1(x) + Y_2(x) + \dots \\ Y_1(x) = Y_0(x) \\ Y_2(x) = Y_0(x) + Y_1(x) \end{cases} \quad (1.28)$$

并以 $M(x)$ 、 $M_1(x)$ 、 $M_2(x)$ 分别表示它们的曲率函数; 而以 $m_0(x)$ 、 $m_1(x)$ 表示 $Y_0(x)$ 和 $Y_1(x)$ 的曲率函数, 由于

$$\begin{aligned} |m_0(x)| &= |y_0'' / (1 + y_0'^2)^{3/2}| \leq |y_0''| \\ &= |\alpha x + \beta| = |M(x)| \end{aligned} \quad (1.29)$$

又因 $m_0(x)$ 、 $Y_0''(x)$ 和 $M(x)$ 三者有相同的符号, 这就表明 $Y_0(x)$ 与 $Y(x)$ 有相同的凹凸区间, 而 (1.29) 则进一步指明曲线 $y = Y_0(x)$ 是较曲线 $y = Y(x)$ 更平直一些的曲线。

$Y_0(x)$ 是由微分方程 $y^{(4)} = 0$ 解出来的, 这个解就是通常大家都熟悉的三次样条函数, 因此三次样条函数, 其实就是小参数方法的第一次近似解。

由 (1.24), 则有:

$$y_1'' = -\frac{3}{2} y_0'^2 y_0''$$

可见 y_1'' 与 y_0'' 又是同号的, 因此 $Y_1(x)$ 与 $Y_0(x)$ 及 $Y(x)$ 也有同样的凹凸区间, 而由

$$Y_2(x) = Y_0(x) + Y_1(x)$$

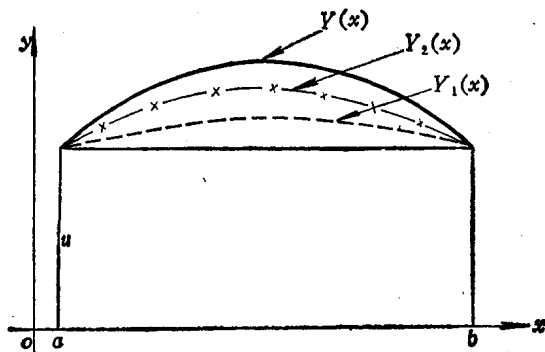
可见小参数法的第二次近似解 $Y_2(x)$ 乃是在 $Y_0(x)$ 的基础上再加上一个与 $Y_0(x)$ 有相同弯曲方向的一个函数, 因此可以认为 $Y_2(x)$ 较之于 $Y_0(x)$ 不仅在数值上有更好的逼近而且在弯曲方向上的逼近也是好的。其几何关系如图 2 所示。

为了研究和实现计算过程中的误差控制, 需要研究两点边值问题中, 由于 n_a 和 m_a 的变化所引起的 $Y(x)$ 的变化, 尚需推导出下列的必需的计算公式:

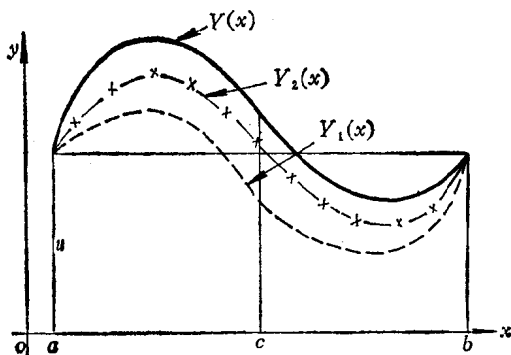
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m_a}(Y(x)) &\approx \frac{\partial}{\partial m_a} Y_0(x) \\ &= -\frac{(b-x)}{6(b-a)}((b-a)^2 - (b-x)^2) \\ \frac{\partial}{\partial m_b}(Y(x)) &\approx \frac{\partial}{\partial m_b} (Y_0(x)) \\ &= \frac{(x-a)}{6(b-a)}((x-a)^2 - (b-a)^2) \end{aligned} \right. \quad (1.30)$$

得到:

$$\max_{a \leq x \leq b} \left(\left| \frac{\partial}{\partial m_a} (Y_0(x)) \right|, \left| \frac{\partial}{\partial m_b} (Y_0(x)) \right| \right) \leq \frac{(b-a)^2}{9\sqrt{3}} \quad (1.31)$$



(a) 无拐点情形



(b) 有拐点情形

图2 弯曲几何关系

此外, 尚需计算:

$$\left. \frac{\partial}{\partial m_a} Y'(x) \right|_{x=a} \quad \text{及} \quad \left. \frac{\partial}{\partial m_b} Y'(x) \right|_{x=b}$$

计算时可由

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m} Y'(x) &\approx \frac{\partial}{\partial m} (Y'_0(x) + Y'_1(x)) \\ &= \frac{\partial}{\partial m} \left(\sum_{i=1}^3 (4-i) a_i x^{3-i} + \sum_{i=1}^7 (8-i) b_i x^{7-i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 (4-i) x^{3-i} \frac{\partial a_i}{\partial m} + \sum_{i=1}^7 (8-i) x^{7-i} \frac{\partial b_i}{\partial m} \quad (1.32) \end{aligned}$$

算出。

首先计算出 $\frac{\partial b_i}{\partial m}$, 由 (1.27) 则得:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial b_1}{\partial m} &= \frac{81}{14} a_1^2 \frac{\partial a_1}{\partial m} \\ \frac{\partial b_2}{\partial m} &= 9 a_1 a_2 \frac{\partial a_1}{\partial m} + 4.5 a_1^2 \frac{\partial a_2}{\partial m} \\ \frac{\partial b_3}{\partial m} &= (3.6 a_2^2 + 5.4 a_1 a_3) \frac{\partial a_1}{\partial m} + 7.2 a_1 a_2 \frac{\partial a_2}{\partial m} + 2.7 a_1^2 \frac{\partial a_3}{\partial m} \\ \frac{\partial b_4}{\partial m} &= 4.5 a_2 a_3 \frac{\partial a_1}{\partial m} + (3 a_2^2 + 4.5 a_1 a_3) \frac{\partial a_2}{\partial m} + 4.5 a_1 a_2 \frac{\partial a_3}{\partial m} \\ \frac{\partial b_5}{\partial m} &= 1.5 a_3^2 \frac{\partial a_1}{\partial m} + 4 a_2 a_3 \frac{\partial a_2}{\partial m} + (2 a_2^2 + 3 a_1 a_3) \frac{\partial a_3}{\partial m} \\ \frac{\partial b_6}{\partial m} &= 1.5 a_3^2 \frac{\partial a_2}{\partial m} + 3 a_2 a_3 \frac{\partial a_3}{\partial m} \\ \frac{\partial b_7}{\partial m} &= \left(\sum_{i=1}^6 b^{8-i} \frac{\partial b_i}{\partial m} - \sum_{i=1}^6 a^{8-i} \frac{\partial b_i}{\partial m} \right) / (b-a) \end{aligned} \right. \quad (1.33)$$

再计算 $\frac{\partial a_1}{\partial m}$, $\frac{\partial a_2}{\partial m}$, $\frac{\partial a_3}{\partial m}$, 由 (1.26) 则得:

当 $m = m_a$ 时, 有

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial m_a} = -\frac{1}{6(b-a)}, & \frac{\partial a_2}{\partial m_a} = \frac{1}{2(b-a)} \\ \frac{\partial a_3}{\partial m_a} = -\frac{b^2}{2(b-a)} + \frac{(b-a)}{6} \end{cases} \quad (1.34)$$

当 $m = m_b$ 时, 有

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial m_b} = \frac{1}{6(b-a)}, & \frac{\partial a_2}{\partial m_b} = -\frac{1}{2(b-a)} \\ \frac{\partial a_3}{\partial m_b} = \frac{a^2}{2(b-a)} - \frac{(b-a)}{6} \end{cases} \quad (1.35)$$

由 (1.32) 至 (1.35), 则

$$\left. \frac{\partial}{\partial m_a} Y'(x) \right|_{x=a} \quad \text{及} \quad \left. \frac{\partial}{\partial m_b} Y'(x) \right|_{x=b}$$

便可计算了。

§5 旋转坐标轴问题

在用小参数方法求解样条函数的两点边值问题时, 曾要求把

$$(1 + \varepsilon Y'_\varepsilon(x)^2)^{-3/2}$$

展开成 ε 的幂级数, 要使展开后的幂级数有较快的收敛速度, 这就要求 $|Y'_\varepsilon(x)|$ 必须充分地小, 因此, 在用小参数法求解样条曲线时, 就势必要考虑条件:

$$|Y'(x)| \ll 1 \quad (1.36)$$

对于近似解的精确度的影响。

条件 (1.36) 对于某些部位的船型线, 例如, 在靠近船体舭部的水线型线上, 这个条件满足得较好, 但在靠近船底的站线部分, 这个条件就满足得很不好。

$Y'(x)$ 的几何意义是船型线的切线的斜率, 其数值的大小, 表示型线在当地的陡峻或平坦的程度。随着坐标系的选择的不同, 陡峻与平坦可以互相转化, 如图 3, 曲线 (C) 在 xoy 坐标系中

是比较陡的,但在 xoy 坐标系中,它就变得比较平坦了,可见利用坐标轴的旋转,可以把斜率比较大的曲线化为斜率比较小的曲线。但是在旋转坐标轴的同时,也可能发生这样的情况:即曲线的某一部分的斜率在旋转以后,其绝对值是变得小了,而另一部分曲线的斜率却反而变得大了,当曲线在其全长上的切线的转角大于 90° 时,如图 4 所示,就会有这种情形。

在图 4 中,设 $\widehat{ACB}$ 是一段凸曲线,当 C 沿着曲线从 A 变化到 B 时,其切线的转角 θ 在 B 处达到极大,当 θ 大于 90° 时,无论怎样旋转坐标轴,例如把 ox 轴旋转到与 $\widehat{AB}$ 平行的 ou 的位置,则 A, B 处的切线与 ou 轴的交角: $\angle TAB$ 与 $\angle TBA$ 中

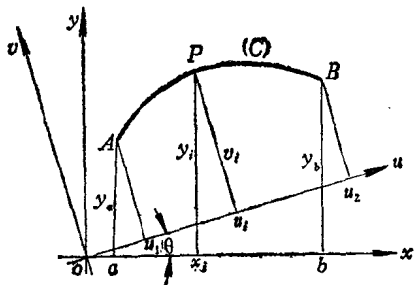
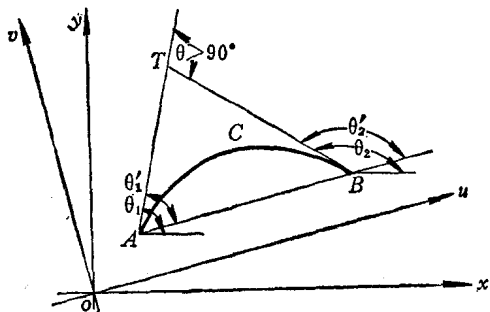


图 3 坐标轴旋转

必将有一个是大于 45° 的,因此,无论怎样旋转坐标轴, $\widehat{ACB}$ 上都会有切线斜率的绝对值大于 1 的情况,这时如果直接使用小参数方法,仍将不利于计算。



$$|\operatorname{tg} \theta_1| > |\operatorname{tg} \theta_2|, \text{ 但 } |\operatorname{tg} \theta_2| < |\operatorname{tg} \theta_1|$$

图 4 切线转角增量大于 90° 的情形

如果把整条曲线分成几段,坐标轴也分作几次旋转,如图 5 所示,在每次旋转坐标轴时,都使新的横坐标轴与曲线弧段端点连线平行,从每一个局部坐标系去观察每一局部的弧,它们就显得十分平坦了。

当每一局部弧段上的倾角都不大于 20° 时,相应的 $Y'(x)^2$ 将不大于 0.13,在这个基础上