苏联十年制学校数学教材

# 代数和分析初步

十年级

人民教育出版社

苏联十年制学校数学教材

# 代数和分析初步

十 年 级

盛 世 雄 译

人 民 教 育 出 版 社

## 内 容 提 要

本书根据苏联十年制学校数学教材《代数和分析初步（十年级）》（A·H·柯尔莫柯洛夫主编）1978年第三版译出，并且参照1980年第5版作了修订。全书共分四章：三角函数及其图象和导数(续)，原函数和积分，指数函数、对数函数和幂函数，方程组和不等式组。

本书对于我们研究苏联中学数学教学改革的情况，有一定参考价值。可供中小学数学教学研究人员、中学数学教师、师范院校数学系师生参考。


苏联十年制学校数学教材

**代数和分析初步**

十 年 级

盛世雄 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

开本 787×1092 1/32 印张 11.5 字数 234,000

1980年2月第1版 1980年8月第1次印刷

印数 1—35,500

书号 7012·0106 定价 0.84 元

（限国内发行）

# 目　录

# 第六章　三角函数及其图象和导数(续)

## §15. 三角函数的导函数

### 75. 正弦函数的导函数

在这一节里，将推出三角函数的导函数公式。首先我们证明：

$$\sin' x = \cos x^{*}. \tag{1}$$

(1)式是根据下面两点假设推出的(稍后就证明这两点假设的正确性)：

a) 当自变量取所有的值时，函数cos是连续的，就是

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos(x+\Delta x) = \cos x;$$

б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

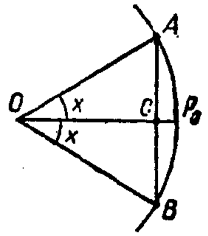


图　1

关于 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ 等于1的假设，从几何上考虑就足以使人信服．事实上，如果首先认为 $x$ 是正的，在单位圆上(图1)从点 $P_0$ 向两边取长度为 $x$ 的弧 $P_0A$ 和 $P_0B$．整段弧 $AB$ 的长

---

* 等式(1)可以写成

$$(\sin x)' = \cos x.$$

度就等于 $2x$. 我们来计算弦 $AB$ 的长度:

$$|AB|=|AC|+|CB|=2\sin x.$$

因此, $AB$ 弦长对 $AB$ 弧长的比等于

$$\frac{2\sin x}{2x}=\frac{\sin x}{x}.$$

由图可以看出, 当 $x$ 很小时, 弦长和弧长几乎相等, 就是说, 比 $\frac{\sin x}{x}$ 趋近于 1.

因为

$$\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{\sin x}{x},$$

那么当 $x$ 为负并且它的绝对值很小时, 比 $\frac{\sin x}{x}$ 也趋近于 1.

现在转回到推出(1)式. 根据导数的定义, 求出极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\sin x}{\Delta x},$$

其中 $\Delta\sin x=\sin(x+\Delta x)-\sin x$. 我们把正弦的改变量写成积的形式. 为此, 在公式

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\qquad(\text{参看第 74 小节})$$

里, 设 $\alpha=x+\Delta x$, $\beta=x$. 那么

$$\begin{aligned}\Delta\sin x&=\sin(x+\Delta x)-\sin x\\&=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.\end{aligned}$$

因此

$$\sin' x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= \cos x\cdot 1 = \cos x.$$

例　利用复合函数微分法，得出:

1. $[\sin(ax+b)]' = \cos(ax+b)\cdot(ax+b)'$

$$= a\cos(ax+b).$$

2. $\left(\sin\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}.$

## 习题

求下列函数的导函数:

**1.** $f(x)=\sin 3x.$

**2.** $g(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x+\pi\right).$

**3.** $h(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$

**4.** $M(x)=3\sin^2(2x-1).$

**5.** $f(t)=\sin 2t\cos t-\sin t\cos 2t.$

**6.** $f(x)=\sin(-x)+\sin x.$

**7.** $g(x)=\sin 2x-2\sin x\cos x+5.$

**8.** $h(x)=\sin(2x-3.5)+\sin 2x.$

**9.** $M(x)=2x+3.6\sin^5(\pi-x).$

**10.** $f(u)=\cos 2u\cos\frac{\pi}{2}-\sin 2u\cdot\sin\frac{\pi}{2}.$

11. 证明：当 $x$ 取所有的值时，函数 $f(x)=2x-\sin x$ 的导函数是正的，就是说，在实数集 $R$ 上，函数 $f$ 是上升的.

12* 找出 $x$ 是什么数时，函数 $g(x)=x-\sin x$ 的导函数变成零. 证明这个函数在实数集 $R$ 上是上升的. 作出它的图象.

13* 讨论函数 $h(x)=x-2\sin x$.

14* 证明：在区间 $]-\infty,\ \infty[$ 上，函数 $g(x)=\sin(2x-5)-3x$ 是下降的.

## 76. 余弦函数、正切函数和余切函数的导函数

在这一小节里，我们利用正弦函数的导函数（第 75 小节）计算余弦函数、正切函数和余切函数的导函数.

$$\cos' x=-\sin x, \tag{1}$$

$$\operatorname{tg}' x=\frac{1}{\cos^2 x}, \tag{2}$$

$$\operatorname{ctg}' x=-\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{3}$$

上列公式中的每一个式子在对应函数定义域内任何一点都成立.

为了推出(1)式，我们利用等式 $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ 和复合函数微分法则：

$$\cos' x=\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'$$
$$=\sin x(-1)=-\sin x.$$

为了证明(2)式和(3)式，我们利用商的导数公式和已知

的正弦函数和余弦函数的导函数公式:

$$\operatorname{tg}'x=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\operatorname{ctg}'x=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

例　求正弦曲线在横坐标 $x_1=0$, $x_2=\frac{\pi}{2}$, $x_3=\pi$ 三点上的切线.

正如你们所知道的（第 52 小节），函数 $f$ 的图象在点 $(x_0, y_0)$（这里 $y_0=f(x_0)$）的切线方程具有下面的形式:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

在这种情况下，$f(x)=\sin x$. 为了解题，应当求出正弦函数在点 $0$、$\frac{\pi}{2}$ 和 $\pi$ 处的导函数值. 正弦函数的导函数等于余弦函数: $f'(0)=\cos 0=1$. 其次，我们求出

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0 \text{ 和 } f'(\pi)=\cos\pi=-1.$$

因此:

1) 在横坐标 $x_1=0$ 这一点，切线方程有 $y-0=1\cdot(x-0)$ 的形式，也就是 $y=x$. 我们看到，在点 $(0, 0)$ 处，正弦曲线的切线是第一象限和第三象限的平分线(图 2).

2) 在横坐标 $x_2=\frac{\pi}{2}$ 这一点，切线方程是

$$y-1=0\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right),$$

就是 $y=1$. 它是水平直线(图 2).

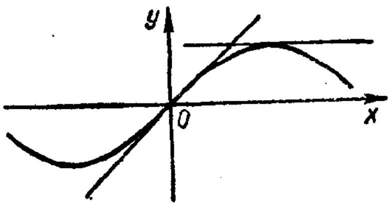

图 2

3) 类似地, 在横坐标 $x_3=\pi$ 这一点的切线方程是 $y-0=(-1)(x-\pi)$, 就是 $y=\pi-x$.

## 习题

求下列函数的导函数:

**15.** $f(x)=1.3\cos x$.

**16.** $h(x)=3\cos(2.3x-10\pi)$.

**17.** $g(x)=2\pi-0.5\cos(\pi-x)$.

**18.** $u(x)=2x^2-30\cos(5x+6)$.

**19.** $v(x)=-2\cos(x-\pi)+2\sin 2x$.

**20.** $v(x)=5\operatorname{tg}(2x+3)+2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

**21.** $s(x)=3\operatorname{tg}(2x+1)$.

**22.** $s(x)=\frac{2\sin(6x+3)}{\cos(6x+3)}+\operatorname{tg}(6x+3)$.

**23.** $f(u)=\cos 2u\sin u+\sin 2u\cos u$.

**24.** $g(t)=\cos 2\pi\cos 3t+\sin 3t\sin 2\pi$.

**25.** $v(t)=4\operatorname{ctg}(2t+3)$. **26.** $v(x)=7\operatorname{ctg}(2x-2\pi)$.

**27.** $f(x)=\cos 2.5x\cdot\sin 0.5\pi+\sin 2.5x\cdot\cos 0.5\pi$.

**28.** $f(x)=\sin x\cos 5x-\sin 5x\cos x$.

求下列函数图象的切线方程:

29. $f(x)=\sin x$，在横坐标是 $-\pi$ 和 $\frac{\pi}{2}$ 这两点.

30. $s(x)=\cos x$，在横坐标是 $-\frac{\pi}{2}$ 和 $2\pi$ 这两点.

31. $g(x)=\mathrm{tg}\, x$，在横坐标是 0 和 $\frac{\pi}{4}$ 这两点.

## 77*. 三角函数的连续性

在第 75 小节里，我们提出了关于函数cos连续性的假设.

现在证明这个假设以及函数sin、tg、ctg在它们有定义的所有各点的连续性. 为此，我们需要下面的预备定理.

**预备定理　对于满足条件**

$$0<|x|<\frac{\pi}{2}$$

**所有 $x$ 的值，不等式**

$$|\sin x|<|x|<|\mathrm{tg}\, x| \quad (1)$$

**成立.**

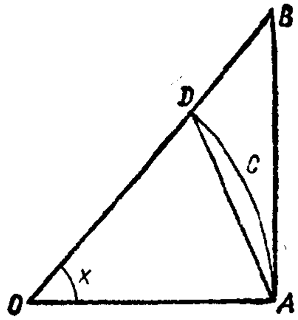

图 3

现在从 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 的情形开始证明. 我们来比较面积 $S_{OAD}$（三角形 $OAD$）、$S_{OAB}$（三角形 $OAB$）和 $S_{OACD}$（扇形 $OACD$）（图 3）. 这些面积很容易算出：

$$S_{OAD}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OD|\cdot\sin x=\frac{1}{2}\sin x,$$

---

* 划星号的是补充教材，不要求全体学生都学习. 在许多情况下，这种补充教材划两个三角形：▶（在开头部分），◀（在末尾部分），参看第 13-15 页等等.

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|AB|=\frac{1}{2}\operatorname{tg}x,$$

$$S_{OACD}=\frac{1}{2}r^2\cdot x=\frac{1}{2}x.$$

由图 3 看出，

$$S_{OAD}<S_{OACD}<S_{OAB},$$

或

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\operatorname{tg}x,$$

就是

$$\sin x<x<\operatorname{tg}x. \tag{2}$$

因为当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x$ 和 $\operatorname{tg}x$ 都是正的，所以当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，不等式(1)成立.

剩下的问题是讨论 $-\frac{\pi}{2}<x<0$ 的情形. 当 $x$ 取这些值时，得 $0<-x<\frac{\pi}{2}$，并且对于 $-x$ 可以利用不等式(2)：

$$\sin(-x)<-x<\operatorname{tg}(-x). \tag{3}$$

因为现在 $-x=|x|$，$\sin(-x)=|\sin x|$，$\operatorname{tg}(-x)=|\operatorname{tg}x|$，那么由(3)可以得出(1).

这样，对于区间 $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ 里所有 $x\neq0$ 的值，完全证明了不等式(1).

**定理 1　在整个数轴上，余弦函数是连续的，也就是对于任意 $x_0\in R$，**

$$\lim_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0.$$

**证明** 我们来估计$|\cos x-\cos x_0|$.

$$|\cos x-\cos x_0|=\left|2\sin\frac{x_0-x}{2}\sin\frac{x+x_0}{2}\right|$$

$$=2\left|\sin\frac{x_0-x}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{x+x_0}{2}\right|\leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|$$

$$\leqslant 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right|=|x-x_0|.$$

因此,如果对于任意的 $\varepsilon>0$, 设 $\delta=\varepsilon$, 当$|x-x_0|<\delta$时,就有:

$$|\cos x-\cos x_0|\leqslant|x-x_0|<\varepsilon.$$

这就是说,

$$\lim_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0,$$

也就是余弦函数在点 $x_0$ 是连续的.

类似地,可以证明定理 2:

**定理 2** **在整个数轴上,正弦函数是连续的,也就是对于任意 $x_0\in R$,**

$$\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0.$$

**定理 3** **正切函数和余切函数在它的定义域内都是连续的,就是**

$$\text{对于任意 } x_0\in D(\mathrm{tg}),\ \lim_{x\to x_0}\mathrm{tg}x=\mathrm{tg}x_0;$$

$$\text{对于任意 } x_0\in D(\mathrm{ctg}),\ \lim_{x\to x_0}\mathrm{ctg}x=\mathrm{ctg}x_0.$$

**证明** 实际上,如果$x_0\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$, 那么 $\cos x_0\neq0$.

于是,

$$\lim_{x\to x_0}\mathrm{tg}x=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}\sin x}{\lim\limits_{x\to x_0}\cos x}=\frac{\sin x_0}{\cos x_0}=\mathrm{tg}x_0.$$

类似地，可以证明定理 3 的第二部分.

**习题***

求极限:

32. $\lim\limits_{x\to 0}\sin x$.

33. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\sin x$.

34. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$.

35. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\cos x$.

36. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg} x$.

37. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\operatorname{tg} x$.

38. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\operatorname{ctg} x$.

39. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg} x$.

40. 证明函数sin在点 $x_0\in R$ 和函数ctg在点 $x_0\in D(\operatorname{ctg})$ 的连续性.

41. 证明：对于所有的 $x\in R$，函数 $f$ 是连续的，其中

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时},\\ 1 & \text{当 } x=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

作出它的图象.

## 78* 弦长与弦所对的弧长的比的极限

我们从证明第 75 小节假设 6 着手.

**定理 1**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

**证明** 设 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 或 $-\frac{\pi}{2}<x<0$. 于是，有不等式 $|\sin x|<|x|<|\operatorname{tg} x|$（参看第 77 小节）. 用 $|\sin x|$ 除这个不等式的各个部分，得到: