

苏联十年制学校数学教材

代数和分析初步

——十年级——

人民教育出版社

苏联十年制学校数学教材

代数和初步分析

十年级

盛世雄 译

人民教育出版社

内 容 提 要

本书根据苏联十年制学校数学教材《代数和初步 (十年级)》(A·H·柯尔莫柯洛夫主编) 1978 年第三版译出, 并且参照 1980 年第 5 版作了修订。全书共分四章: 三角函数及其图象和导数(续), 原函数和积分, 指数函数、对数函数和幂函数, 方程组和不等式组。

本书对于我们研究苏联中学数学教学改革的情况, 有一定参考价值。可供中小学数学教学研究人员、中学数学教师、师范院校数学系师生参考。

苏联十年制学校数学教材

代数和初步

十 年 级

盛世雄 译

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

开本 787×1092 1/32 印张 11.5 字数 234,000

1980 年 2 月第 1 版 1980 年 8 月第 1 次印刷

印数 1—35,500

书号 7012·0106 定价 0.84 元

(限国内发行)

目 录

第六章 三角函数及其图象和导数(续).....1

§ 15. 三角函数的导函数.....1

75. 正弦函数的导函数.....1

76. 余弦函数、正切函数和余切函数的导函数.....4

77. 三角函数的连续性.....7

78. 弦长与弦所对的弧长的比的极限.....10

§ 16. 谐振动.....13

79. 二阶导数.....13

80. 谐振动的微分方程.....16

81. 谐振动的图象.....22

82. 同周期的谐振动的合成.....28

§ 17. 三角函数的研究.....29

83. 诱导公式.....29

84. 连续增(减)函数的反函数.....35

85. 正弦函数的性质和图象, 反正弦函数和方程
 $\sin x = a$ 的解.....36

86. 余弦函数的性质和图象, 反余弦函数和方程
 $\cos x = a$ 的解.....45

87. 正切函数的性质和图象, 反正切函数和方程
 $\tan x = a$ 的解.....55

88. 余切函数的性质和图象, 反余切函数和方程
 $\cot x = a$ 的解.....61

§ 18. 三角恒等式和三角方程.....67

89. 同角三角函数之间的关系.....67

90. 半角三角函数.....72

91. 用半角的正切表示三角函数.....76

92. 三角函数的积化为三角函数的和.....79

93. 最简单的三角不等式的解法	82
94. 解三角方程举例	86
95. 证明三角恒等式	89
96. 历史知识	92
第六章补充题	93
第七章 原函数和积分	98
§ 19. 原函数	98
97. 原函数	98
98. 原函数的基本性质	100
99. 求原函数的三个法则	104
100. 曲边梯形的面积	106
§ 20. 积分	110
101. 牛顿-莱布尼兹公式	110
102. 具有可变积分上限的积分	114
103. 根据已知速度求坐标和根据已知加速度求速度	116
104. 积分作为和的极限	118
105. 变力所作的功	121
106. 计算积分的三条法则	125
107. 历史知识	129
第七章补充题	132
第八章 指数函数、对数函数和幂函数	136
§ 21. 指数函数的导函数	136
108. 指数函数	136
109. 指数函数的导函数. 数 e	140
110. 按指数律增大和减小的微分方程	145
§ 22. 对数函数和它的导函数	151
111. 对数函数	151
112. 反函数的导函数	155
113. 对数函数的导函数. 对数函数的性质	157
114. 自然对数作为具有可变积分上限的积分	162
§ 23. 幂函数	165

115. 幂函数和它的导函数	165
116. 无理方程	167
117. 按对数函数、幂函数和指数函数增长的比较	169
118. 历史知识	171
第八章补充题	172

第九章 方程组和不等式组176

§ 24. 方程组176

119. 同解方程和同解方程组	176
120. 利用顺序消去变量法(高斯法)解线性方程组	181
121. 二元和三元线性方程组的解的几何解释	188
122. 非线性方程和非线性方程组	191

§ 25. 不等式组201

123. 不等式组	201
124. 关于线性规划的概念	208
125. 历史知识	214

第九章补充题215

复习资料217

1. 实数	217
2. 函数	224
3. 偶函数, 奇函数	230
4. 周期函数	232
5. 研究函数的一般步骤	235
6. 正比例	236
7. 反比例	240
8. 线性函数	243
9. 函数图象的变换	247
10. 二次三项式的研究	252
11. 数列的极限	260
12. 数学归纳法	268
13. 组合分析	269

14. 函数的极限和连续性.....	273
15. 导数, 导数的几何意义和物理意义.....	277
16. 极值问题.....	284
17. 三角函数的加法定理.....	287
参考资料.....	291
代数和解析初步课程总复习题.....	297
习题答案和提示.....	315
教材中使用的符号.....	361

第六章 三角函数及其图象 和导数(续)

§ 15. 三角函数的导函数

75. 正弦函数的导函数

在这一节里, 将推出三角函数的导函数公式. 首先我们证明:

$$\sin' x = \cos x^*. \quad (1)$$

(1)式是根据下面两点假设推出的(稍后就证明这两点假设的正确性):

a) 当自变量取所有的值时,
函数 $\cos$ 是连续的, 就是

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x + \Delta x) = \cos x;$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

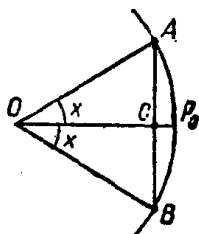


图 1

关于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ 等于 1 的假设, 从几何上考虑就足以使人信服. 事实上, 如果首先认为 x 是正的, 在单位圆上(图 1)从点 P_0 向两边取长度为 x 的弧 P_0A 和 P_0B . 整段弧 AB 的长

* 等式(1)可以写成

$$(\sin x)' = \cos x.$$

度就等于 $2x$ 。我们来计算弦 AB 的长度:

$$|AB| = |AC| + |CB| = 2\sin x.$$

因此, AB 弦长对 AB 弧长的比等于

$$\frac{2\sin x}{2x} = \frac{\sin x}{x}.$$

由图可以看出, 当 x 很小时, 弦长和弧长几乎相等, 就是说, 比

$\frac{\sin x}{x}$ 趋近于 1.

因为

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x},$$

那么当 x 为负并且它的绝对值很小时, 比 $\frac{\sin x}{x}$ 也趋近于 1.

现在转回到推出(1)式. 根据导数的定义, 求出极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \sin x}{\Delta x},$$

其中 $\Delta \sin x = \sin(x + \Delta x) - \sin x$. 我们把正弦的改变量写成积的形式. 为此, 在公式

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (\text{参看第 74 小节})$$

里, 设 $\alpha = x + \Delta x$, $\beta = x$. 那么

$$\begin{aligned} \Delta \sin x &= \sin(x + \Delta x) - \sin x \\ &= 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}. \end{aligned}$$

因此

$$\sin' x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \sin x}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \\
&= \cos x \cdot 1 = \cos x.
\end{aligned}$$

例 利用复合函数微分法, 得出:

$$\begin{aligned}
1. \quad [\sin(ax+b)]' &= \cos(ax+b) \cdot (ax+b)' \\
&= a \cos(ax+b).
\end{aligned}$$

$$2. \quad \left(\sin \frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}.$$

习题

求下列函数的导函数:

1. $f(x) = \sin 3x.$
2. $g(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x + \pi\right).$
3. $h(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$
4. $M(x) = 3 \sin^2(2x - 1).$
5. $f(t) = \sin 2t \cos t - \sin t \cos 2t.$
6. $f(x) = \sin(-x) + \sin x.$
7. $g(x) = \sin 2x - 2 \sin x \cos x + 5.$
8. $h(x) = \sin(2x - 3.5) + \sin 2x.$
9. $M(x) = 2x + 3.6 \sin^5(\pi - x).$
10. $f(u) = \cos 2u \cos \frac{\pi}{2} - \sin 2u \cdot \sin \frac{\pi}{2}.$

11. 证明: 当 x 取所有的值时, 函数 $f(x) = 2x - \sin x$ 的导函数是正的, 就是说, 在实数集 R 上, 函数 f 是上升的.
- 12* 找出 x 是什么数时, 函数 $g(x) = x - \sin x$ 的导函数变成零. 证明这个函数在实数集 R 上是上升的. 作出它的图象.
- 13* 讨论函数 $h(x) = x - 2\sin x$.
- 14* 证明: 在区间 $]-\infty, \infty[$ 上, 函数 $g(x) = \sin(2x - 5) - 3x$ 是下降的.

76. 余弦函数、正切函数和余切函数的导函数

在这一小节里, 我们利用正弦函数的导函数(第 75 小节)计算余弦函数、正切函数和余切函数的导函数.

$$\cos' x = -\sin x, \quad (1)$$

$$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (2)$$

$$\operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}. \quad (3)$$

上列公式中的每一个式子在对应函数定义域内任何一点都成立.

为了推出(1)式, 我们利用等式 $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ 和复合函数微分法则:

$$\begin{aligned} \cos' x &= \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right]' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' \\ &= \sin x (-1) = -\sin x. \end{aligned}$$

为了证明(2)式和(3)式, 我们利用商的导数公式和已知

的正弦函数和余弦函数的导函数公式:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}'x &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \\ \operatorname{ctg}'x &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - (\sin x)' \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.\end{aligned}$$

例 求正弦曲线在横坐标 $x_1=0$, $x_2=\frac{\pi}{2}$, $x_3=\pi$ 三点上的切线.

正如你们所知道的 (第 52 小节), 函数 f 的图象在点 (x_0, y_0) (这里 $y_0=f(x_0)$) 的切线方程具有下面的形式:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

在这种情况下, $f(x) = \sin x$. 为了解题, 应当求出正弦函数在点 $0, \frac{\pi}{2}$ 和 π 处的导函数值. 正弦函数的导函数等于余弦函数: $f'(0) = \cos 0 = 1$. 其次, 我们求出

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ 和 } f'(\pi) = \cos \pi = -1.$$

因此:

1) 在横坐标 $x_1=0$ 这一点, 切线方程有 $y-0=1 \cdot (x-0)$ 的形式, 也就是 $y=x$. 我们看到, 在点 $(0, 0)$ 处, 正弦曲线的切线是第一象限和第三象限的平分线 (图 2).

2) 在横坐标 $x_2=\frac{\pi}{2}$ 这一点, 切线方程是

$$y-1=0 \cdot \left(x-\frac{\pi}{2}\right),$$

就是 $y=1$. 它是水平直线
(图 2).

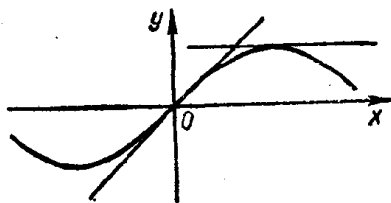


图 2

3) 类似地, 在横坐标 x_3
 $=\pi$ 这一点的切线方程是 y
 $-0=(-1)(x-\pi)$, 就是 $y=\pi-x$.

习题

求下列函数的导函数:

15. $f(x)=1.3\cos x$.

16. $h(x)=3\cos(2.3x-10\pi)$.

17. $g(x)=2\pi-0.5\cos(\pi-x)$.

18. $u(x)=2x^2-30\cos(5x+6)$.

19. $v(x)=-2\cos(x-\pi)+2\sin 2x$.

20. $v(x)=5\operatorname{tg}(2x+3)+2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

21. $s(x)=3\operatorname{tg}(2x+1)$.

22. $s(x)=\frac{2\sin(6x+3)}{\cos(6x+3)}+\operatorname{tg}(6x+3)$.

23. $f(u)=\cos 2u \sin u + \sin 2u \cos u$.

24. $g(t)=\cos 2\pi \cos 3t + \sin 3t \sin 2\pi$.

25. $v(t)=4\operatorname{ctg}(2t+3)$. 26. $v(x)=7\operatorname{ctg}(2x-2\pi)$.

27. $f(x)=\cos 2.5x \cdot \sin 0.5\pi + \sin 2.5x \cdot \cos 0.5\pi$.

28. $f(x)=\sin x \cos 5x - \sin 5x \cos x$.

求下列函数图象的切线方程:

29. $f(x) = \sin x$, 在横坐标是 $-\pi$ 和 $\frac{\pi}{2}$ 这两点.

30. $s(x) = \cos x$, 在横坐标是 $-\frac{\pi}{2}$ 和 2π 这两点.

31. $g(x) = \operatorname{tg} x$, 在横坐标是 0 和 $\frac{\pi}{4}$ 这两点.

77*. 三角函数的连续性

在第 75 小节里, 我们提出了关于函数 $\cos$ 连续性的假设.

现在证明这个假设以及函数 $\sin$ 、 tg 、 ctg 在它们有定义的所有各点的连续性. 为此, 我们需要下面的预备定理.

预备定理 对于满足条件

$$0 < |x| < \frac{\pi}{2}$$

所有 x 的值, 不等式

$$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x| \quad (1)$$

成立.

现在从 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 的情形开始证

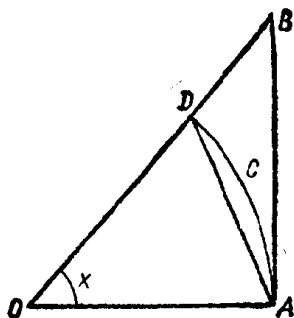


图 3

明. 我们来比较面积 S_{OAD} (三角形 OAD)、 S_{OAB} (三角形 OAB) 和 S_{OACD} (扇形 $OACD$) (图 3). 这些面积很容易算出:

$$S_{OAD} = \frac{1}{2} |OA| \cdot |OD| \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin x,$$

* 划星号的是补充教材, 不要求全体学生都学习. 在许多情况下, 这种补充教材划两个三角形: $\blacktriangleright$ (在开头部分), $\blacktriangleleft$ (在末尾部分), 参看第 13-15 页等等.

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} |OA| \cdot |AB| = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x,$$

$$S_{OACD} = \frac{1}{2} r^2 \cdot x = \frac{1}{2} x.$$

由图 3 看出,

$$S_{OAD} < S_{OACD} < S_{OAB},$$

或

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x,$$

就是

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x. \quad (2)$$

因为当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x$ 和 $\operatorname{tg} x$ 都是正的, 所以当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 不等式(1)成立.

剩下的问题是讨论 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 的情形. 当 x 取这些值时, 得 $0 < -x < \frac{\pi}{2}$, 并且对于 $-x$ 可以利用不等式(2):

$$\sin(-x) < -x < \operatorname{tg}(-x). \quad (3)$$

因为现在 $-x = |x|$, $\sin(-x) = |\sin x|$, $\operatorname{tg}(-x) = |\operatorname{tg} x|$, 那么由(3)可以得出(1).

这样, 对于区间 $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ 里所有 $x \neq 0$ 的值, 完全证明了不等式(1).

定理 1 在整个数轴上, 余弦函数是连续的, 也就是对于任意 $x_0 \in R$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0.$$

证明 我们来估计 $|\cos x - \cos x_0|$.

$$\begin{aligned} |\cos x - \cos x_0| &= \left| 2 \sin \frac{x_0 - x}{2} \sin \frac{x + x_0}{2} \right| \\ &= 2 \left| \sin \frac{x_0 - x}{2} \right| \cdot \left| \sin \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| = |x - x_0|. \end{aligned}$$

因此, 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$, 设 $\delta = \varepsilon$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 就有:

$$|\cos x - \cos x_0| \leq |x - x_0| < \varepsilon.$$

这就是说,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0,$$

也就是余弦函数在点 x_0 是连续的.

类似地, 可以证明定理 2:

定理 2 在整个数轴上, 正弦函数是连续的, 也就是对于任意 $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0.$$

定理 3 正切函数和余切函数在它的定义域内都是连续的, 就是

$$\text{对于任意 } x_0 \in D(\operatorname{tg}), \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0;$$

$$\text{对于任意 } x_0 \in D(\operatorname{ctg}), \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0.$$

证明 实际上, 如果 $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 那么 $\cos x_0 \neq 0$.

于是,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x}{\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x} = \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = \operatorname{tg} x_0.$$

类似地, 可以证明定理 3 的第二部分.

习题*

求极限:

32. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x.$

33. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x.$

34. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x.$

35. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos x.$

36. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x.$

37. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x.$

38. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x.$

39. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x.$

40. 证明函数 $\sin$ 在点 $x_0 \in R$ 和函数 ctg 在点 $x_0 \in D(\operatorname{ctg})$ 的连续性.

41. 证明: 对于所有的 $x \in R$, 函数 f 是连续的, 其中

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时,} \\ 1 & \text{当 } x = 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

作出它的图象.

78* 弦长与弦所对的弧长的比的极限

我们从证明第 75 小节假设 6 着手.

定理 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

证明 设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 或 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. 于是, 有不等式

$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|$ (参看第 77 小节). 用 $|\sin x|$ 除这个不等式的各个部分, 得到: