

信号处理及应用

徐伯勋 白旭滨 于常青 编著

地质出版社



信号处理及应用

徐伯勋 白旭滨 于常青 编著

地质出版社

· 北 京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

信号处理及应用/徐伯勋等编著.-北京:地质出版社,1997.3
ISBN 7-116-02346-1

I. 信… II. 徐… III. 信号处理 IV. TN911.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (97) 第 01434 号

地质出版社出版发行

(100083 北京海淀区学院路 29 号)

责任编辑:林清漫 王文孝

*

北京地质印刷厂印刷 新华书店总店科技发行所经销

开本: $787 \times 1092 \frac{1}{16}$ 印张: 13.25 字数: 322000

1997 年 3 月北京第一版·1997 年 3 月北京第一次印刷

印数: 1—800 册 定价: 30.00 元

ISBN 7-116-02346-1

P·1758

前 言

本书是作者多年从事信号处理研究和在计算机上实践的经验总结。在本书编写过程中，注意了理论联系实际和读者的可接受性。书中有些内容反映了较新成果；在同类书中常见的内容，如富氏变换等作为已知的，对传统谱估计也只作简要介绍；对少见的内容，如现代谱估计、多谱估计、 l_p 模、奇异值分解、K-L 变换等用了较多的篇幅来介绍。全书共七章，除第一章外尽量做到自成体系，供读者选用。

信号处理技术主要任务是从混杂的信号中提取有用信号。它在语音、无线电通信、自动控制、雷达、图像处理、遥感、地震及地球物理勘探等方面都起到了非常广泛而有效的作用，已形成一门多学科的边缘科学；它需要用到很多高等数学知识，因此也可属应用数学的一个分支。这里认为读者已具备这些知识。目前国内外许多理工科院校都开设有这方面的课程。书中取材和举例主要结合地震和地球物理勘探，但其基本理论与其它专业是完全相同的。考虑到通用性将实际数据处理内容删去。

本书可供大学理工科有关专业高年级学生和研究生以及从事信号处理的科技人员参考，也可作为具有一定高等数学知识的读者自学用书。

中国地质大学赵静宣、陈乐寿两位教授审阅了全稿，并提出了许多宝贵的意见和建议；许文源、王怀恩、姜成栋、白爱萍、林贵标、杨积凯等同志先后一起进行过研究工作，在此作者一并表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，书中难免存在一些缺点和错误，殷切希望读者批评指正。

作 者

1996 年 4 月

目 录

前言

第一章 预备知识	(1)
1.1 离散线性系统	(1)
1.1.1 时域离散信号——序列	(1)
1.1.2 离散线性系统 (线性滤波器)	(2)
1.2 Z 变换及其性质	(5)
1.2.1 Z 变换	(5)
1.2.2 Z 变换的性质	(6)
1.2.3 逆 Z 变换 (IZT)	(7)
1.3 地震子波	(8)
1.3.1 地震子波 (或信号) 的基本知识	(8)
1.3.2 地震子波的最小、最大和混合延迟的定义	(9)
1.3.3 有限长度物理可实现信号 (或子波) 的反信号	(11)
1.4 褶积和相关	(13)
1.4.1 褶积	(13)
1.4.2 相关	(16)
1.4.3 褶积与相关之间的关系	(19)
1.5 有限数据分解的理论基础——有限数据分解定理	(21)
1.6 数据处理中几种常用的参数估计方法	(23)
1.6.1 随机序列的主要数字特征及其间的关系	(23)
1.6.2 估计问题 (对参数的估计)	(28)
第二章 最小平方滤波 (维纳滤波) 与卡尔曼滤波	(35)
2.1 最小平方滤波	(35)
2.1.1 最小平方滤波的引出及滤波因子的求法	(35)
2.1.2 最小平方反滤波 (脉冲反褶积)	(37)
2.1.3 预测反褶积	(41)
2.1.4 波形反褶积	(45)
2.1.5 最小平方滤波的有关性质	(46)
2.2 把给定信号转换成最小相位信号和零相位信号的方法	(53)
2.2.1 把已知信号转换成最小相位信号	(53)
2.2.2 把已知信号转换成零相位信号的几种方法	(54)
2.3 卡尔曼滤波	(56)
2.3.1 引言	(56)
2.3.2 一维滤波问题	(57)
2.3.3 多维滤波问题	(59)
2.3.4 线性离散系统的卡尔曼滤波公式的推导	(61)

2.3.5 总结	(63)
第三章 同态滤波	(65)
3.1 引言	(65)
3.2 同态滤波	(66)
3.2.1 输入特征系统 D	(68)
3.2.2 复赛谱的性质及求法	(70)
3.2.3 线性系统 L	(81)
3.2.4 输出特征系统 D^{-1}	(83)
3.3 同态滤波的应用——反褶积和反鸣震	(85)
3.3.1 反褶积	(85)
3.3.2 对数谱平均提取子波的具体实现	(87)
3.3.3 理论模型试验	(91)
3.3.4 反鸣震	(93)
3.4 希尔伯特变换子波反褶积	(96)
3.4.1 引言	(96)
3.4.2 求取子波的条件和原理	(96)
3.4.3 求取子波的方案	(100)
3.4.4 子波整形及子波反褶积	(100)
第四章 最小熵反褶积及最大熵反褶积	(103)
4.1 熵的概念及其性质	(103)
4.1.1 熵的概念	(103)
4.1.2 信息熵	(104)
4.1.3 熵的基本性质	(105)
4.2 最小熵反褶积	(106)
4.2.1 最小熵反褶积的原理	(106)
4.2.2 基本算法	(109)
4.2.3 小信号的丢失问题——最经济反褶积	(110)
4.2.4 最小熵反褶积的一种非迭代简化算法	(111)
4.3 最大熵反褶积	(115)
4.3.1 $AR(M)$ 模型等价于一步预测反褶积	(116)
4.3.2 由 $AR(M)$ 出发如何外推自相关值	(116)
4.3.3 $AR(M)$ 模型与最大熵外推自相关函数是等价的	(117)
4.3.4 怎样从已知 $r_{xx}(0), \dots, r_{xx}(M)$ 去计算 $a_{M,m} (m=0, \dots, M)$	(119)
4.3.5 Burg 算法(最大熵法)	(120)
4.4 应用——最大熵子波反褶积	(123)
第五章 谱估计	(125)
5.1 引言	(125)
5.1.1 确定性信号的谱估计	(125)
5.1.2 平稳随机信号的谱估计	(127)
5.2 传统功率谱估计法	(128)
5.3 现代谱估计法	(129)

5.3.1	最大熵谱估计法	(129)
5.3.2	最大熵谱估计中振幅谱和相位谱的求法	(137)
5.3.3	最大似然谱	(143)
5.4	多谱估计	(144)
5.4.1	多谱的频域方法	(145)
5.4.2	多谱估计的时域方法——参数方法	(149)
第六章	l_p 范数 (模)、奇异值分解 (SVD) 和 K-L 变换及其应用	(154)
6.1	l_p 范数 (norm)	(154)
6.2	奇异值分解 (SVD)	(158)
6.2.1	矩阵的奇异值与奇异值分解	(158)
6.2.2	奇异值分解法的优缺点	(159)
6.3	K-L (Karhunen-Loève) 变换	(160)
6.3.1	K-L 变换的两个重要性质	(160)
6.3.2	奇异值分解和 K-L 变换之间的关系	(162)
6.4	应用	(163)
6.4.1	l_p 模 (范数)	(163)
6.4.2	自适应预测反褶积	(163)
6.4.3	奇异值分解在垂直地震剖面中的应用	(169)
第七章	海水反鸣震法	(174)
7.1	深海鸣震的反向消去法	(174)
7.1.1	概述	(174)
7.1.2	相关分析	(175)
7.1.3	垂直鸣震周期的求取	(177)
7.1.4	消除来自海底的多次鸣震	(178)
7.1.5	消除来自反射层的一次鸣震	(182)
7.1.6	模型试验剖面图	(184)
7.2	消除深海鸣震的预测反褶积法	(185)
7.2.1	引言	(185)
7.2.2	任何有限数据的预测反褶积处理的极限效果	(185)
7.2.3	方法原理	(186)
7.2.4	具体实现步骤	(192)
7.3	从鸣震记录估计海底反射系数	(194)
7.3.1	引言	(194)
7.3.2	由一级鸣震记录估计海底反射系数 r_1 的方法	(194)
7.3.3	由二级鸣震记录估计海底反射系数 r_1 的方法	(196)
7.3.4	无鸣震自相关为零的起始值 n 的估计 (阶数 n 的估计)	(199)
参考文献		(201)

第一章 预备知识

信号、信息、消息的概念并不相同。如我们得到一条消息，可能认为是众所周知的或可预料的，也可能认为是不会发生的或出乎意外的，后者是信息，前者我们不认为提供什么信息。信号只是信息的载体，它可以传递信息，而信号本身并非信息，因此信号可定义为一个承载信息的函数。在数学上可用一个到二个甚至更多的自变量的函数来表示。也可代表某一物理量的波形。

在当今信息社会里，开发、研究信号处理技术是十分重要的，它几乎被应用到所有科学和技术领域里。这些技术包括：对几个混杂在一起的信号进行分离，或增强、压制其中的某一个分量或参数，或估计信号的一些特征参数，还可把一个信号变换成另一个新的更有价值的、可分离的信号等。我们研究的各种信号，在数学上可分成确定性和随机性的两大类。确定性的又分为周期的和非周期的信号；随机信号也可分成为平稳随机过程和非平稳随机过程等。随机信号处理是在确定性信号的基础上发展起来的。它主要用到概率和统计的知识，然后在时域、频域里进行数据处理。

1.1 离散线性系统

1.1.1 时域离散信号——序列

代表信号的数学式中，其自变量（一般为时间）可以是连续的，也可以是离散的，前者称时域连续信号，后者称时域离散信号（也称时间序列或序列）。一般时域离散信号可以通过对一个时域连续信号采样而取得，采样间隔一般是等距的。这里我们用 $x(t)$ 或 x_t 表示连续信号。用 $x(n) \triangleq x(n\Delta t)$ 或 x_n 代表离散信号（按上下文也可认为是第 n 个离散值），其中 Δt 为采样间隔见图 1.1。为方便，有时我们用 $x(t) = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ 表示时域信号 $x(t)$ 采样成 $n+1$ 长度的离散信号，如果时域离散信号的幅值也是离散的则称为数字信号。如果时间和幅值都是连续的则称模拟信号。在电子计算机上处理的信号应为数字信号。

这里我们还要指出，尽管时域离散信号不全是由时域连续信号的等距采样得到的，但为了方便起见，我们仍将 $x(n)$ 称为序列的第 n 个采样。显然 $x(n)$ 只有在整数 n 值时才有定义，对于非整数 n ， $x(n)$ 是没有定义的，但也不能认为是零。

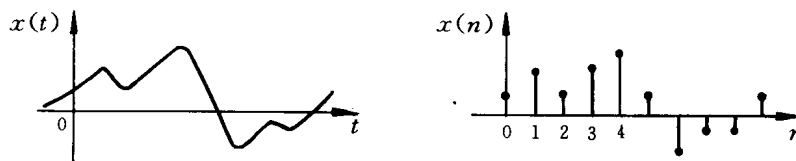


图 1.1 连续信号与离散信号

下面我们来介绍两个常用的特殊序列（见图 1.2）

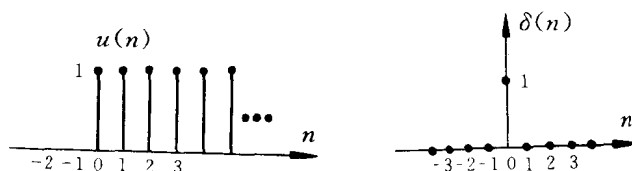


图 1.2 阶跃序列与 $\delta(n)$ 序列

$$\text{阶跃序列 } u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$\delta(n) \text{ 序列 } \delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0, \end{cases} \quad \text{显然 } \delta(n-k) = \begin{cases} 1 & n = k, \\ 0 & n \neq k. \end{cases}$$

阶跃序列与 $\delta(n)$ 序列的关系为

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k)$$

$\delta(n)$ 序列与阶跃序列 $u(n)$ 的关系为

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)。$$

任意序列都可表成各延迟单位脉冲 $\delta(n)$ 的振幅加权。

例：图 1.3 中序列 $x(n) = x_3 \delta(n+3) + x_1 \delta(n-1) + x_2 \delta(n-2)$

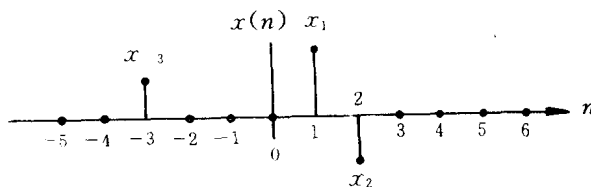


图 1.3 $\delta(n)$ 的振幅加权

更一般地任意序列 $x_n = (\dots, x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ 皆可表为

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k)。$$

1.1.2 离散线性系统（线性滤波器）

从数学角度看，系统不过是一个具有某种性质的算子 φ ，输入信号 $x(n)$ 经过此算子作用，得到输出信号 $\varphi[x(n)] = y(n)$ 。还可根据算子的性质，系统可分为线性系统和非线性系统两大类。线性系统的算子我们用符号 L 表示。

1. 线性、时不变性和稳定性

确定任意给定的系统是很复杂的，必须了解系统对任意输入时的输出，但如果系统具有一些特殊的性质，如线性、时不变性和稳定性，那就较容易研究了。

(1) 线性

一个系统若输入为 $x_1(n)$ ，其输出为 $y_1(n)$ ；输入为 $x_2(n)$ ，输出为 $y_2(n)$ 。设 a_1

和 a_2 为两个常数, 若输入为 $a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)$ 时输出为 $a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n)$, 则称系统为线性系统。即有

$$\begin{aligned} L[x_1(n)] &= y_1(n), L[x_2(n)] = y_2(n), \\ L[a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)] &= a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n). \end{aligned} \quad (1.1)$$

或等价地写成

$$\begin{cases} L[x_1(n) + x_2(n)] = L[x_1(n)] + L[x_2(n)] = y_1(n) + y_2(n) \\ L[ax(n)] = aL[x(n)] = ay(n). \end{cases} \quad (1.2)$$

其中 a_1, a_2, a 均为常数。这是因为在式 (1.1) 中, 当 $a_1 = a_2 = 1$ 时, 即式 (1.2) 中的第一式, 当 $a_1 = a, a_2 = 0$ 时, 即为式 (1.2) 的第二式。我们称算子 L 满足线性叠加原理。式 (1.1) 可推广到无限项。

(2) 时不变性

设一个系统的参数不随时间变化, 则称它具有时不变性, 用数学公式表示为

$$L[x(n - n_0)] = y(n - n_0).$$

其中 n_0 为任意常数。亦即输入信号如果延迟了时间 n_0 , 则输出信号的波形与没有延迟时的输出信号的波形相同, 不同的只是这时的输出信号也延迟了一个时间 n_0 。

(3) 稳定性

若一个系统对任意有限输入其输出都是有限的, 则称该系统具有稳定性。

以后把具有线性、时不变性和稳定性的系统称为线性系统或称线性滤波器。对于相加性信号如 $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$, 其中 $x_1(n)$ 可认为是有效信号, $x_2(n)$ 为噪声。此时, 若用线性滤波器特别方便, 即对两个信号和 $x(n)$ 的滤波结果 $y(n)$, 等于把 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 分别滤波的结果之和 $y_1(n) + y_2(n)$ 。

对线性系统来说, 当输入为一单位脉冲 $\delta(n)$ 时, 就得到一个输出 $h(n)$, 我们称 $h(n)$ 为滤波器的脉冲响应函数或滤波因子。滤波器的脉冲响应函数完全确定了滤波器的特性。意即, 当知道了输入信号的脉冲响应函数后, 输出信号就完全被确定了。

对于一个线性系统当输入为 $a_1 x_1(n - n_1) + a_2 x_2(n - n_2)$ 时, 则系统的输出为 $a_1 y_1(n - n_1) + a_2 y_2(n - n_2)$ 。这样如果单位脉冲序列 $\delta(n)$, 通过一个线性时不变离散系统的响应为 $h(n)$, 则推得该系统的任意输入序列 $x(n)$ 的输出 $y(n)$

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n - k) \rightarrow y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n - k),$$

这是因为由 $\delta(n - k) \rightarrow h(n - k)$ 。当 $x(n)$ 为物理可实现时, 有

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(k) \delta(n - k) \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x(k) h(n - k).$$

其中 $x(0), x(1), \dots$, 视为任意常数。

这里 $h(n)$ 称为线性系统的单位脉冲响应。上式右边的公式称为褶积。

2. 实例——褶积信号

有了上述知识后, 我们可结合实际, 推导出人工地震记录的数学模型。我们把大地地

层看成一个线性滤波器。见图 1.4。

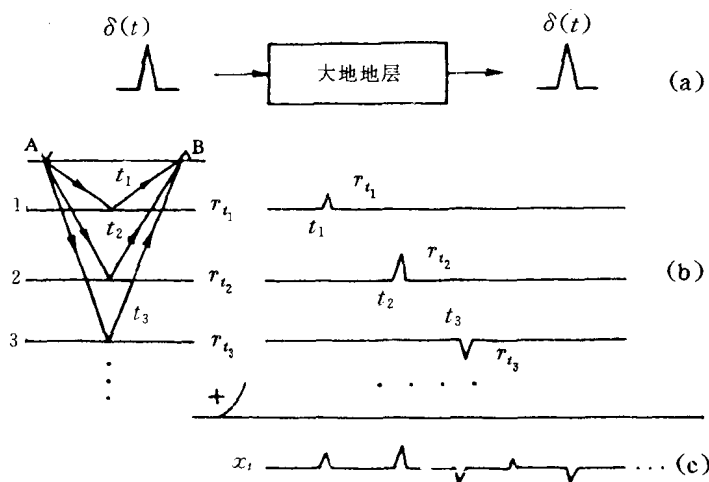


图 1.4 理想情况下的地震记录

(1) 理想情况下的地震记录

震源 A 产生一个尖脉冲 $\delta(t)$ ，如果这个尖脉冲在经过地层传播后仍保持原样（见图 1.4 (a)，即脉冲波形不变）则我们在检波器 B 上接收到由每个反射层反射回来的是一串尖脉冲，称为一道地震记录，如图 1.4 (c) 所示。它们出现的时间 t_1 、 t_2 、 t_3 、 $\dots$ 反映地层的深度，脉冲大小反映了反射系数 r_{t_1} 、 r_{t_2} 、 r_{t_3} 、 $\dots$ 的大小（见图 1.4 (b)），是由反射层的地质性质确定的。这种由反射系数组成的记录正是我们所需要的，它不仅告诉了我们地层的深度如何，而且通过它还可以了解地层的密度、速度等一些岩石物理性质。这个地震记录用数学公式表示为

$$x_t = r_{t_1} \delta(t - t_1) + r_{t_2} \delta(t - t_2) + \dots + r_{t_n} \delta(t - t_n) + \dots,$$

它表示在 t_i ($i=1, 2, \dots, n, \dots$) 处分别出现一个能量为 r_{t_i} 的脉冲串。

(2) 实际情况下的地震记录

在实际情况下，不会像理想情况那样简单，即通过大地滤波器后波形保持不变。大家知道，震源所产生的尖脉冲是频率域中的宽带信号。通过结构复杂的地层传播后，尖脉冲的高频成分被地层“吸收”，低频成分相对增强。这样尖脉冲变为拉长的波形，如图 1.5 (a) 的 b_t ，这种尖脉冲在地下传播过程中由于地层的吸收作用所得到的波形 b_t ，我们称为地震子波（代表一信号）。

此时的地震记录 x_t 也不像图 1.4 (c) 所示理想情况下的尖脉冲串。与图 1.4 (b) 对应的各层的分离记录示于图 1.5 (b)，这些波形叠加起来，就是我们常见的地震记录（图 1.5 (c)）。

$$x_t = r_{t_1} b_{t-t_1} + r_{t_2} b_{t-t_2} + r_{t_3} b_{t-t_3} + \dots$$

如果在某一时刻没有反射，我们就认为这时的反射系数为零。也就是说只有当 $s = t_k$ 时有

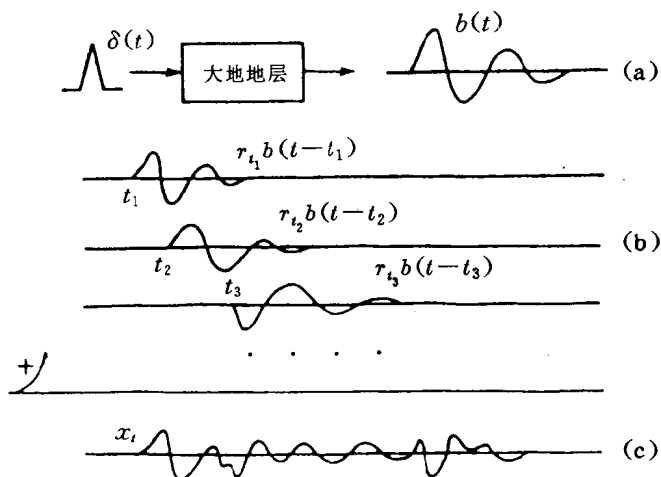


图 1.5 实际情况下的地震记录

反射，当 $s \neq t_k$ 时无反射，即反射系数为零，所以上式可写成

$$x_t = \sum_{s=0}^{\infty} r_s b_{t-s} = b_t * r_t。$$

其中 $*$ 为褶积符号，此式就是我们所要推导的褶积模型。尽管褶积模型是在很多假设条件下推导出的一个较近似而粗糙的公式，人们并不满意，但目前尚未有更合适的模型来替代它。

显然，在图 1.4 所示的理想情况下，脉冲的到达时刻和脉冲的大小是很清楚的。而在实际情况下，各层反射子波叠加合成的地震记录很难分清各层反射界面的波的到达时刻 t_1 、 t_2 、 $\dots$ ，以及反射系数 r_{t_1} 、 r_{t_2} 、 $\dots$ 的大小。当反射层次之间的厚度越薄，波形拉得越长，这种情况就越严重。解决这种分辨率不高的问题，主要是设法压缩子波，即反褶积问题，第二章将予详细讨论。

1.2 Z 变换及其性质

1.2.1 Z 变换

(1) 任给序列 $b(n) = (\dots, b_{-n}, \dots, b_{-1}, b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)$ ，它的 Z 变换定义为

$$B(z) = \dots + b_{-n} z^{-n} + \dots + b_{-1} z^{-1} + b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n + \dots = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j z^j。$$

我们称上式为罗朗级数，即双边无穷级数。（这里收敛性的讨论从略），其中 $z = r e^{-i\omega}$ 。

(2) 若任给序列 $b(n) = (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)$ ，它的 Z 变换定义为

$$B(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j。 (也可用 z^{-1} 定义，此时 $z = r e^{i\omega}$)。$$

上式称为泰勒级数, 即右侧单边无穷级数。

(3) 在实际问题中大多为有限实序列, 即 $b(n) = (b_0, b_1, \dots, b_n)$, 它的 Z 变换定义为一个多项式,

$$B(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^n。$$

显然上式在全平面上是解析的。

上述三式, 当 $|z| = |r e^{-i\omega}| = |r| = 1$, 即 $z = e^{-i\omega}$ (在单位圆周上) 时, 恰好就是富氏变换 (FT), 也就是说 FT (序列的频谱) 为 Z 变换 (ZT) 的一个特例。所以利用 $z = e^{-i\omega}$, 由频谱的性质可马上得到 Z 变换的相应性质, 下面我们不加证明的列出一部分。

1.2.2 Z 变换的性质

1. 线性

若 $x_1(n) \xrightarrow{ZT} X_1(z)$, $x_2(n) \xrightarrow{ZT} X_2(z)$, 则

$$ax_1(n) + bx_2(n) \xrightarrow{ZT} aX_1(z) + bX_2(z)$$

2. 褶积性质

若 $x(n) = b(n) * r(n)$, 则 $X(\omega) = B(\omega)R(\omega)$ 或 $X(z) = B(z)R(z)$, 即时域上的褶积对应于在频域或 Z 变换域上的乘积。由此可知滤波器的输出与输入之间的关系为: 当知道输入信号和脉冲响应函数后, 输出信号就完全被确定了。设输入信号 $x(n)$ 输出信号 $y(n)$, 脉冲响应函数为 $h(n)$, 相应的频谱为 $X(\omega)$, $Y(\omega)$ 和 $H(\omega)$ 。则滤波器的输出与输入之间的关系为

$$\begin{cases} y(n) = h(n) * x(n), \\ Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)。 \end{cases}$$

上式中的第一式说明了输入、滤波器和输出三者时在域上关系; 第二式说明输入、滤波器和输出三者在频域上的关系。我们称脉冲响应函数 $h(n)$ 的富氏变换 $H(\omega)$ 为滤波器的频率响应或滤波器的频谱、传输函数。

我们可根据不同的要求来设计 $h(n)$ 或 $H(\omega)$ 以达到不同的目的。

3. 微分性质

若 $x(n) \xrightarrow{ZT} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^n$, 则

$$n x(n) \xrightarrow{ZT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n x(n) z^n = z \frac{d}{dz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^n = z \frac{dX(z)}{dz}。$$

4. 时移性质

若 $b(n) \xrightarrow{ZT} B(z)$, 则 $b(n + n_0) \xrightarrow{ZT} z^{n_0} B(z)$, 其中 n_0 为整数。

设 $b(n) = (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)$ 和 $b(n + n_0) = (0, 0, \dots, 0, b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)$, 其中 $b(n + n_0)$ 是将 $b(n)$ 右移 n_0 (式中有 n_0 个 0), 若 $b(n)$ 的 Z 变换为 $B(z)$, 则 $b(n + n_0)$ 的 Z 变换为 $z^{n_0} B(z)$ 。例如 $b(n) = (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4) = (1, 2, 0, -1, -1)$ 则 $B(z) = 1 + 2z - z^3 - z^4$, 而 $z^2 B(z) = z^2 + 2z^3 - z^5 - z^6$, 从图 1.6 和 1.7 看出,

我们把 z 视为时间函数的单位延迟因子, 当 n_0 为正时向右移, n_0 为负时向左移, 图 1.7 由图 1.6 乘 z^2 而来, 即右移两个单位。

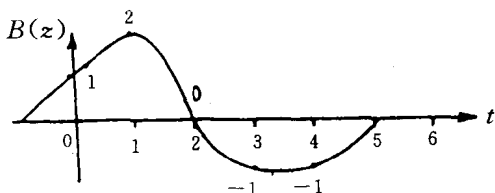


图 1.6 $B(z)$ 的图形

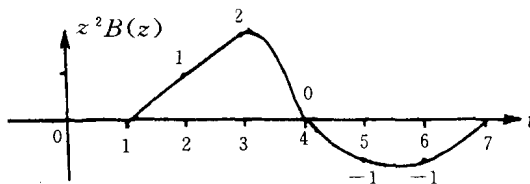


图 1.7 $z^2 B(z)$ 的图形

1.2.3 逆 Z 变换 (IZT)

由已知 Z 变换 $B(z)$, 反求原序列 $b(n)$ 的过程, 称为逆 Z 变换, 它有多种求法, 下面给出两种。

1. 幂级数法(也称长除法)

如果我们能把 $B(z)$ 表成一个幂级数形式

$$B(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n + \cdots$$

显然, 该级数的系数 $(b_0, b_1, \cdots, b_n, \cdots)$, 即为所求原序列 $b(n)$ 。

例 设有 Z 变换 $B(z) = \frac{a}{a-z} \quad |z| < a$, 求逆 Z 变换 $b(n)$ 。

解 因 $|z| < a$, 所以有 $|z/a| < 1$, 将 $B(z)$ 写成

$$B(z) = \frac{1}{1-z/a}$$

此时可展成幂级数

$$B(z) = 1 + \frac{z}{a} + \frac{z^2}{a^2} + \cdots \quad |z| < a。$$

其系数 $(1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \cdots)$, 即为所求的原序列 $b(n)$ 。

2. 围线积分法

利用解析函数中的柯西积分公式

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C z^{k-1} dz = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

式中 C 为一条逆时针方向的环绕原点的围线。

现将 Z 变换 $B(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n$ 的两边同乘 $z^{-(k+1)}$, 并作回线积分, 有

$$\oint_C z^{-(k+1)} B(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \oint_C z^{n-k-1} dz。$$

其中围线 C 为在 $B(z)$ 收敛域内一条环绕原点的积分围线, 交换上式右边的积分求和次序得

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C z^{-(k+1)} B(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{1}{2\pi i} \oint_C z^{n-k-1} dz.$$

由柯西积分公式知, 当 $n-k=0$ 时, 积分为 1。所以上式变为

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C z^{-(k+1)} B(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \delta(k-n) = b_k$$

或将上式写成所求的原序列为(见文献[8], P.90—91)

$$b(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C z^{-(n+1)} B(z) dz$$

用上式较麻烦, 一般都用一些特殊的方法, 如幂级数法等。

1.3 地震子波(简称子波)

1.1 节已经提到, 地震子波(不熟悉的读者可视为某一信号)是地震能量由震源通过复杂的地下路程返回到地面接收器时, 质点运动的一种波形。地震子波的概念是比较笼统的, 为了便于今后对子波的研究和处理, 作者对子波使用两种不同概念来加以描述。

定义 1: 综合子波指的是在褶积模型 $x_t = b_t * r_t$ 中除了反射系数序列 r_t 之外的波形。这种子波主要包括了震源特征系统、地层特征系统和接收特征系统三个部分的褶积。

定义 2: 真实子波指的是能反映反射层地质岩性的波形, 显然, 不同的反射层由于岩性等差别, 它们的真实子波是不同的。这种子波的求取比较困难, 至少要去掉震源特征系统、接收特征系统和多次波等的影响才能获得。

这样区分后, 我们可根据不同的目的要求, 求取上述两种子波。例如要进行岩性分析时, 就要求取真实子波; 而要进行反褶积时, 只要求取综合子波即可。

1.3.1 地震子波(或信号)的基本知识

定义 1 设 $b(t) = (\dots, b_{-n}, \dots, b_{-1}, b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)$ 。如果当 $t < 0$ 时, 序列 $b(t) = 0$, 即 $b(t) = (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)$, 则称 $b(t)$ 为物理可实现的序列或因果序列。对子波、信号或滤波因子分别称物理可实现的子波、信号或滤波因子。

定义 2 如果 $b(t)$ 具有有限能量, 即其平方和有限 ($\sum_{t=-\infty}^{\infty} b_t^2 < \infty$), 则称序列为稳定的。有限序列当然是稳定的。

如果 $b(t) = (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)$ 且满足 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 < \infty$, 则称 $b(t)$ 为能量有限的物理可实现信号。

若 $b_1(t)$ 和 $b_2(t)$ 为两个物理可实现信号, 则 $b_1(t) + b_2(t)$ 和 $b_1(t) * b_2(t)$ 也是物理可实现信号, 且

$$b_1(t) * b_2(t) = \begin{cases} \sum_{\tau=0}^t b_1(\tau) b_2(t-\tau), & t \geq 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

定义 3 子波为物理可实现的和稳定的。即子波是有一确定时间和有限能量的信号,

在时间原点前子波的值为零，当时间足够长时子波趋于零。

定义 4 称 $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ 为 $(b_n^*, \dots, b_1^*, b_0^*)$ 的反转子波。例如， $(7, 3)$ 为 $(3, 7)$ 的反转子波； $(2, i)$ 为 $(-i, 2)$ 的反转子波，（这里 $*$ 表示复共轭）。

定义 5 称 $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ 为 $(cb_0, cb_1, \dots, cb_n)$ 的等阶子波，其中 $|c| = 1$ 。例如 $(7, 3, 1)$ 为 $(-7, -3, -1)$ 的等阶子波； $(5i, 2i, i)$ 为 $(5, 2, 1)$ 的等阶子波。即两个等阶子波就是除了一个常数 c （这里 $|c| = 1$ ）外，对应的系数相等。

1.3.2 地震子波的最小、最大和混合延迟的定义

由实际出发我们只讨论有限长度数据。设子波为 $b_t = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ ，其 Z 变换为

$$B(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n \quad (\text{这里 } z = r e^{-i\omega}, \text{ 当 } r=1 \text{ 时 } Z \text{ 变换就是富氏变换}).$$

根据代数知识， $B(z)$ 可分解为

$$B(z) = b_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n). \quad (1.3)$$

上式中 $z_i (i=1, \dots, n)$ 是多项式 $B(z)$ 的零点（或根）。由于 $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ 为实数，所以所有复根一定共轭成对出现。由 (1.3) 式在 Z 变换域或频率域上的乘积则在时间域上成为褶积，即

$$(b_0, b_1, \dots, b_n) = b_n (-z_1, 1) * (-z_2, 1) * \dots * (-z_n, 1). \quad (1.4)$$

由上式知，我们讨论数对（或二元序列） $(-z_n, 1)$ 有特别重要意义。

二元序列 (a_0, a_1) 中 $|a_0|, |a_1|$ 的大小值得讨论。我们定义

$$a_1 = (a_0, a_1) \text{ 为 } \begin{cases} \text{最小延迟的, 当 } |a_0| > |a_1|; \\ \text{最大延迟的, 当 } |a_0| < |a_1|; \\ \text{等延迟的, 当 } |a_0| = |a_1|. \end{cases} \quad (1.5)$$

也就是说当数对 (a_0, a_1) 在其第一个系数的绝对值大于第二个系数的绝对值即 $|a_0| > |a_1|$ 时，称数对 (a_0, a_1) 为最小延迟；反之第二个系数大于第一个系数时，称 (a_0, a_1) 为最大延迟；当两个系数绝对值相同时，称 (a_0, a_1) 为等延迟。例如数对 $(2, 1)$ 和 $(-4, 3)$ 为最小延迟序列； $(1, 2)$ 和 $(3, -4)$ 为最大延迟序列； $(-1, 1)$ 为等延迟序列。

我们可把最小延迟和最大延迟的概念扩大到更长的序列，例如物理可实现的序列 (1.4) 式的分解中。如果每个数对都是最小延迟时，则称该序列为最小延迟序列；都是最大延迟时，则称该序列为最大延迟序列。当不满足上述两种条件时，即这些数对中既有最大延迟又有最小延迟和等延迟数对时，称这个序列为混合延迟序列。

如果我们在 Z 变换域或频率域上讨论时，可先对数对 $a_t = (a_0, a_1)$ 进行 Z 变换（当 $z = e^{-i\omega}$ 时为富氏变换），即

$$A(z) = a_0 + a_1 z. \quad (1.5)$$

使 $A(z)$ 为零的点称为 $A(z)$ 的零点或根。显然， $A(z) = a_0 + a_1 z = 0$ 有根 $z = -a_0/a_1$ 。由 (1.5) 式对 $a_t = (a_0, a_1)$ 为最小、最大和等延迟的定义，相应地推得

$$A(z) = a_0 + a_1 z = 0 \quad \begin{cases} |z| = \left| \frac{-a_0}{a_1} \right| > 1, \text{ 即最小延迟, 零点在单位圆外;} \\ |z| = \left| \frac{-a_0}{a_1} \right| < 1, \text{ 即最大延迟, 零点在单位圆内;} \\ |z| = \left| \frac{-a_0}{a_1} \right| = 1, \text{ 即等延迟, 零点在单位圆上。} \end{cases}$$

相应地推广到更长序列的 Z 变换时, 即 $B(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n$ 中, 如果所有零点全在圆外, 即 $|z_j| > 1 (j=1, \cdots, n)$, 称 $B(z)$ 为最小相位的信号或子波, 即当 $|z_j| < 1, B(z) \neq 0$; 如果当 $|z_j| \leq 1, B(z) \neq 0$ 时, 称严格最小相位信号。如果所有零点全在单位圆内即 $|z_j| < 1 (j=1, \cdots, n)$, 称为最大相位的信号或子波, 即当 $|z_j| > 1$ 时 $B(z) \neq 0$ 。当不满足上述两种条件时, 即部分根为 $|z_j| < 1$, 另一部分根为 $|z_j| > 1$ 或部分根 $|z_j| = 1$ 时, 则称为混合相位的信号或子波。显然混合相位信号可分解成最小相位信号和最大相位信号两部分。

从以上讨论可知, 延迟和相位只不过在时域里从能量和在频域里从相位两个不同的角度来考察信号(序列), 以后可不加区别。

例如 $b_t = (b_0, b_1, b_2) = (6, 5, 1)$ 是最小相位的, 因为其 Z 变换 $B(z) = 6 + 5z + z^2 = (z+2)(z+3)$, 其零点有 $z_1 = -2, z_2 = -3$, 它们的绝对值都大于 1, 即零点全在单位圆外。而当 $(b_0, b_1, b_2) = (1, 5, 6)$ 为最大相位的(颠倒其顺序或用 $z = \frac{1}{z}$ 代换后), 因此时 $B(z) = 1 + 5z + 6z^2 = (2z+1)(3z+1)$ 有零点 $z_1 = -\frac{1}{3}, z_2 = -\frac{1}{2}$, 其绝对值都小于 1, 即零点全在单位圆内。又如 $(b_0, b_1, b_2) = (3, 7, 2)$ 是混合相位的, 因为此时 $B(z) = 3 + 7z + 2z^2 = (2z+1)(z+3)$, 其零点为 $z_1 = -\frac{1}{2}, z_2 = -3$, 其中绝对值一个小于 1, 另一个大于 1, 即零点既有在单位圆内的又有在单位圆外的。这里我们看到, 最小相位信号或子波, 其第一个系数的绝对值一定最大, 但其余系数的绝对值不一定顺次减小。例如, $b_t = (b_0, b_1, b_2) = (16, 0, -1)$ 是最小相位的, 因为它的 Z 变换 $B(z) = (4+z)(4-z)$ 其零点为 $z_1 = -4, z_2 = 4$, 都在圆外。可是它的第二个系数的绝对值小于第三个系数的绝对值。

从外形上看, 最小相位序列的能量集中在前部; 最大相位序列的能量集中在后部; 混合相位序列的能量集中在中部。

下面再介绍一下 Robinson 于 1967 年指出的一个结论: 对长度为 $n+1$ 的子波 $b_t = (b_0, b_1, \cdots, b_n)$, 给定一振幅谱, 一定存在 2^n 个具有该振幅谱, 但有不同相位的子波。在这些子波中, 只有一个为最小相位的子波, 一个为最大相位的子波, 其余全为混合相位的子波。这是因为由(1.4)式可知, $n+1$ 个长度的子波可分解为 n 个数对, 又每一个数对有一个反转数对, 这样就有 $2n$ 个数对, 如果我们规定每个数对与自己的反转数对不在同一组中出现, 则从 $2n$ 个数对中每次取 n 个数对组成的子波共 2^n 个长度为 $n+1$ 的不同相位的子波。下面用例子加以说明。

例 有三个数对 $(10, 4), (5, -3), (2, 1)$ 。对照(1.4)式, 显然 $n=3$, 所以可构成 $2^n = 2^3 = 8$ 个长度为 $n+1 = 3+1 = 4$ 的具有相同振幅谱和不同相位谱的子波如下: