高等学校工科电子类教材

经典电磁理论方法

符果行 编著

电子科技大学出版社

经典电磁理论方法

符果行　编著

电子科技大学出版社

内容提要

本书介绍宏观经典电磁理论及方法，着重于场的边值问题的分析与计算。电磁边值问题在电磁理论中占有极其重要的地位，求解电磁边值问题具有丰富的内容和实用价值。在边值问题的三大类求解方法中，本书重点论述严格解析法中的基本方法——分离变量法和格林函数法及其在电磁边值问题中的应用。严格解析法是建立、发展和检验其他近似法和数值法的基础。内容包括：电磁理论基础；场的分离变量理论、方法和应用；常用坐标系中场的分离变量理论、方法和应用；场的格林函数理论、方法和应用；场的并矢格林函数理论、方法和应用。

本书通过严格的分析和推论，将电磁理论、数学处理方法和具体应用在统一的观点下有机地结合起来，内容有一定深度和特色。全书采用一种值得推广的矢量分析新方法——符号矢量法，为本书增色不少。

本书可作研究生电磁场理论课程或电磁场解析方法课程的教材或参考书，亦可供相关学科的大学教师、高年级大学生及科技人员参考。

声　明

经典电磁理论方法

符果行　编著

出　　版：电子科技大学出版社　（成都建设北路二段四号，邮编：610054）
责任编辑：郭志军
发　　行：新华书店经销
印　　刷：电子科技大学出版社印刷厂
开　　本：787×1092　1/16　　印张　21　　字数　511 千字
版　　次：1998 年 10 月第一版
印　　次：1998 年 10 月第一次
书　　号：ISBN 7—81065—004—1/TN・1
印　　数：1—1000
定　　价：25.00 元

前　言

本书系按原电子工业部工科电子类专业教材 1991～1995 年编审出版规划，由电磁场与微波技术教材编审委员会电磁场理论编审小组评审推荐出版。作为规划教材《电磁场解析方法》的投标书稿，为体现其风格特色，《会议纪要》建议将书名命名为现已采用的《经典电磁理论方法》。

本书介绍电磁解析理论及方法这类专业基础性问题，仅限于场的宏观经典理论，着重于场的边值问题的分析与计算。电磁场边值问题在电磁理论中占有极其重要的地位，求解电磁场的边值问题具有丰富的内容和实用价值。边值问题的求解方法有三大类：第一类是严格解析法，包括分离变量法、格林函数法、保角变换法和函数变换法（傅氏变换和拉氏变换）等。其优点是能够得到精确解析式，可以直观地看出各物理参量间的变化关系；为其他非严格解的正确性提供检验和比较的标准；一些非严格解是在严格解的基础上发展起来的。其缺点是分析过程比较困难和复杂，仅适合于少数规则边值问题；少数有严格解的问题也往往是在理想化条件下得到的，因而实质上也并非严格解。第二类是近似解析法，包括微扰法、变分法、逐步逼近法（迭代法）和高频法（几何光学法、物理光学法、几何绕射法和物理绕射法）。其优点是能够得到近似解析式，既能显示各物理参量间的变化趋势，又因简化了解析运算而具有简便和省时，便于优化设计的优势；而且有些近似法借助于电子计算机的帮助，原则上可以得到所要求的任意精度；而另一些近似法可以估计解的误差范围。其缺点是所求的解不够精确，其正确性也难于估计；对于某一特定的边值问题，选择适合的近似解法有赖于经验，不存在可以求解许多边值问题的统一近似法；近似解的范围虽然比严格解大大地扩展了，但目前许多复杂的问题仍未获得所需要的近似解，或所得到近似解误差太大，无法实际应用。第三类是数值法，包括有限差分法、有限元法和矩量法等。其优点是原则上它可适用于任何复杂的边界问题的求解，既可用于求解第一、二类可解的问题，又可用于求解因边界复杂由它们无法解决的问题；原则上可以求得所需要的任意精度，仅受限于计算机容量、速度和舍入误差，但随着大容量、高速度巨型电子计算机的发展和数值计算方法本身的发展，可以预料，许多过去只能靠实验来分析和设计的电磁场边值问题都可以靠数值法来实现，因而数值法有着广阔的应用前景。其缺点是对于每一特定问题，它只能得出一个数值结果，对不同的问题要分别重新计算，看不出各物理参量之间的关系，也增加了计算的工作量；目前尚未找到一种充分必要的比较简单的检验手段来检验数值解的正确性，也没有找到一个比较简单的误差估计公式，以确定在所要求的精度下究竟要解多少阶的矩阵。综上所述，以上三类解法各

有特点及其适用范围，并互为补充，应根据具体问题选择某一适合的解法。在实际应用中，往往需要多种解法联合使用，这就是所谓混合法。

本书不拟全面而系统地介绍电磁场边值问题，只论述严格解析法中的基本方法——分离变量法和格林函数法及其在电磁场边值问题中的应用。微分方程法和积分方程法是求解数学物理问题的两大基本方法，而分离变量法是一种经典的偏微分方程法，格林函数法是一种常用的积分法，它们都是建立、发展和检验其他近似法和数值法的基础。本书共分五章：第一章是电磁理论基础，从基本方程、基本定理和基本解法方面介绍了电磁场解析方法的电磁理论基础；第二章是场的分离变量理论、方法和应用，从正交曲线坐标系中偏微分方程的可分性和长、扁旋转椭球坐标系方面介绍了边值问题的变量分离理论、方法和应用；第三章是常用坐标系中场的分离变量理论、方法和应用，从直角、圆柱和球坐标系及混合问题方面介绍了边值问题的变量分离理论、方法和应用；第四章是场的格林函数理论、方法和应用，从格林函数原理、格林函数的有限形式、级数展开形式和积分变换形式及格林函数综论方面介绍了边值问题的标量格林函数理论、方法和应用；第五章是场的并矢格林函数理论、方法和应用，从并矢格林函数原理、并矢格林函数的有限形式和级数展开形式方面介绍了边值问题的并矢格林函数理论、方法和应用。

本书通过严格的分析和推论，将电磁理论、数学处理方法和具体应用在统一的观点下有机地结合起来，内容有一定深度和特色。如第二章论述的正交曲线坐标系中的偏微分方程的可分性、旋转椭球函数的理论和应用，本书均作了系统而适度的介绍。这部分内容包括了严格的数学工具的应用，对于微波天线的理论分析等应用问题有一定意义。再如第三章论述的混合问题，由于其处理的复杂性，在同类著作中较难找到应用实例，本书也给予一定注意，介绍了典型例子。又如第四章的格林函数综论，作者基于唯一性定理，力求以明晰的思路和具体实例，有效地论证了同一边值问题的格林函数有限解、级数解和积分解间的等效性和转换关系，其分析对开拓读者思路颇有启迪作用。

本书全部采用由戴振铎(Tai C T)教授创建的一种矢量分析新方法——符号矢量法。它解决了长期沿用的吉布斯(Gibbs)传统方法中存在的某些概念混乱、理论缺陷及由此导致可能的运算错误的问题；它的核心思想是引入符号矢量∇，并以其与坐标无关的表达式 $T(\nabla)$ 构成符号矢量法基础，适用于一般坐标系的普遍情况；它在表示形式上只须将传统方法中的 $\nabla\cdot$，$\nabla\times$ 和 ∇^2 分别代换为相应的∇，∇和$\nabla\nabla$，书写或排版形式简洁、紧凑。除戴氏著作外[9]，目前国内似未见采用该方法的著作。因此，符号矢量法是一种值得推广的新方法。

为了便于读者自学，本书力求叙述严谨，概念清晰，数学演算严密。全书共附习题 157 道，基本上给出了参考答案，并尽可能给出提示。书目附录列出了有用的公式，以备阅读和解题时查阅。

本书的内容和体系是作者自 1980 年从事研究生电磁场理论教学工作以来，根据历届的教学实践逐步形成的，是作者在电子科技大学讲授研究生电磁场理论课程使用的讲义的基础上改写而成，经过大幅度变动，内容比原讲义更加充实、完善和深入。因此，本书适合于作

为研究生电磁场理论课程的教学参考书或作为研究生电磁场解析方法课程别具风格的教材，也可作为有关学科的大学教师、高年级大学生及科技人员的参考书。

原编审小组组长、北京理工大学楼仁海教授及编审小组其他专家教授对本书提出了许多宝贵意见；电子科技大学研究生部、电子工程学院、微波工程系、电磁工程教研室和出版社领导对本书的出版给予了大力支持；校、院、系和室的各级负责同志聂在平教授、刘宏伟副教授、胡皓全副教授、冯林教授及其他同志对本书的出版给予了不同形式的关注和支持；责任编辑郭志军为本书的编辑出版倾注了极大热情，付出了辛勤劳动。作者在此表示谢意！在本书即将问世的时候，我不能忘怀病故的妻子朱茂群，书稿中也浸透了她的关切和无形的辛劳；今天正值她逾半百之年不幸早逝的周年纪念日，这本书是献给她的一份永恒的怀念。

由于水平所限，书中难免有错误和欠妥之处，恳请读者批评、指正。

作　者

1998 年 7 月 21 日

目　　录

长旋转椭球坐标系

扁旋转椭球坐标系

第三章　常用坐标系中场的分离变量理论、方法和应用

直 角 坐 标 系

圆 柱 坐 标 系

第一章　电磁理论基础

本章介绍电磁理论基础，它是下面各章求解电磁场边值问题的理论基础。内容包括基本方程、基本定理和基本解法。基本方程可以导出基本定理，基本定理又为基本方程的求解提供了理论依据，从而确定各种基本解法所得场解的形式。

基 本 方 程

§1.1　麦克斯韦方程

麦克斯韦电磁理论是根据早期发展起来的电学和磁学的基本定律而创建起来的。反映空间变化规律的静态场基本定律（高斯定理、安培环路定律、静电场的保守性和磁通连续性原理）所描述的电场与磁场是彼此无关的，在考虑时间变化的条件下，可以将静态场的基本定律推广为反映时空变化规律的时变场与波的麦克斯韦方程。法拉第电磁感应定律揭示了变化的磁场可以激发电场，而麦克斯韦在安培环路定律中引入位移电流项，从而解决了时变场中的电流连续性问题，揭示了变化的电场也可以激发磁场。变化电场与变化磁场在空间不断地相互激发和转化这一现象，使麦克斯韦进一步预言了电磁波的存在，提出光是电磁波的学说。麦克斯韦的重要预见为后来的赫兹实验所证实，经他修改和总结的麦克斯韦方程反映了宏观电磁现象的普遍规律，定量地描述了电场和磁场间以及它们与电荷和电流间的相依关系和时空变化规律。所以描述宏观电磁现象基本特性的麦克斯韦方程是电磁理论的基本方程，无线电电子学技术，特别是电磁场工程与微波技术也在此基础上获得了发展。

1. 麦克斯韦方程的微分形式

麦克斯韦方程的微分形式是描述空间任一点上场矢量与源矢量的关系式，其形式为

$$\nabla \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1-1a}$$

$$\nabla \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1-1b}$$

$$\nabla \boldsymbol{B} = 0 \tag{1-1c}$$

$$\nabla \boldsymbol{D} = \rho \tag{1-1c}$$

式中，$\boldsymbol{E}$ 是电场强度，$\boldsymbol{D}$ 是电通量密度，$\boldsymbol{H}$ 是磁场强度，$\boldsymbol{B}$ 是磁通量密度，$\boldsymbol{J}$ 是电流密度，ρ 是电荷密度。

对于时变场，可以证明有两个方程不是独立的。若取方程(1-1a,b)和电流连续性方程作为独立方程，则对式(1-1b)取散度，得

$$\nabla\nabla \boldsymbol{E} = \nabla(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \boldsymbol{B})$$

由于$\nabla\nabla \boldsymbol{E}=0$，故有

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \boldsymbol{B}) = 0$$

因为 $\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \neq 0$，故得式(1-1$c$)。再对式(1-1$a$)取散度，得

$$\nabla\nabla \boldsymbol{H} = \nabla \boldsymbol{J} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \boldsymbol{D})$$

由于$\nabla\nabla \boldsymbol{H}=0$，已知电流连续性方程为

$$\nabla \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{1-2}$$

故有

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \boldsymbol{D}) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \boldsymbol{D} - \rho) = 0$$

因为 $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \neq 0, \frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$，且在全空间 $\rho=0$ 时，$\boldsymbol{D}=0$，故得式(1-1d)。由于式(1-1c)和(1-1d)是由独立方程(1-1a,b)和(1-2)导出来的，所以是非独立方程。自然，对独立方程的选择可以是不同的，因而也得不同的与之相应的非独立方程。

2. 麦克斯韦方程的积分形式

麦克斯韦方程的微分形式适用于空间任一点，它要求在该点邻域媒质的物理特性是连续的。但是，电磁场实际遇到的媒质具有不同界面的突变性，对于这些面上的各点，其微分形式出现奇点而失去意义，必须代之以电磁场的边界条件。麦克斯韦方程的积分形式适用于有限空间，并可导出电磁场的边界条件。利用斯托克定理和高斯散度定理，由式(1-1a)～(1-1d)的微分形式可以导出相应的积分形式。

对于媒质中某一闭合面 S 所包围的体积 V，式(1-1a)～(1-1d)的积分形式为

$$\int_V \nabla \boldsymbol{H} dV = \int_V (\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}) dV \tag{1-3a}$$

$$\int_V \nabla \boldsymbol{E} dV = -\int_V \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}) dV \tag{1-3b}$$

$$\int_V \nabla \boldsymbol{B} dV = 0 \tag{1-3c}$$

$$\int_V \nabla \boldsymbol{D} dV = \int_V \rho dV \tag{1-3d}$$

对式(1-3a,b)和(1-3c,d)分别应用斯托克定理和高斯散度定理

$$\int_V \nabla \boldsymbol{F} dV = \oint_S (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{F}) d\boldsymbol{S} \tag{1-4a}$$

$$\int_V \nabla \boldsymbol{F} dV = \oint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{1-4b}$$

式(1-3a)～(1-3d)变为形式

$$\oint_S (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}) dS = \int_V (\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}) dV \tag{1-5a}$$

$$\oint_S (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}) dS = -\int_V \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} dV \tag{1-5b}$$

$$\oint_S (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{B}) dS = 0 \tag{1-5c}$$

$$\oint_S (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{D}) dS = \int_V \rho dV \tag{1-5d}$$

应用斯托克定理的另一形式

$$\int_S (\nabla \boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_l \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} \tag{1-6}$$

麦克斯韦方程的积分形式又可写为

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S (\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}) \cdot d\boldsymbol{S} \tag{1-7a}$$

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{1-7b}$$

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = 0 \tag{1-7c}$$

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho dV \tag{1-7d}$$

3. 麦克斯韦方程的广义形式

对比于电荷运动形成电流，可以引入“磁荷”运动形成“磁流”的概念。至今，物理学家们尚未证实是否存在独立的“磁荷”或“磁流”，这里引用它是为了将磁场与电场等各对偶的物理量建立起一一对应关系，从而写出对称形式的麦克斯韦方程及其场解，以简化分析和计算，便于对比和记忆。例如，直接按环形天线上的电流分布来计算远区的辐射场比较困难，但将环形天线的电流分布等效为磁辐射偶极子，就可以大大简化场的计算。

如果在均匀、线性、各向同性媒质中同时存在电源 ρ、$\boldsymbol{J}$ 和磁源 ρ_m、$\boldsymbol{J}_m$ 两种分布，且分别产生的电磁场用 $\boldsymbol{E}'$、$\boldsymbol{H}'$ 和 $\boldsymbol{E}''$、$\boldsymbol{H}''$ 来表示，则可分别加以考虑。于是，电源和磁源产生的场分别满足麦克斯韦方程

$$\left.\begin{aligned} \nabla \boldsymbol{H}' &= \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}'}{\partial t} \\ \nabla \boldsymbol{E}' &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}'}{\partial t} \\ \nabla \boldsymbol{B}' &= 0 \\ \nabla \boldsymbol{D}' &= \rho \end{aligned}\right\} \tag{1-8a}$$

和

$$\left.\begin{aligned}
\nabla\times \boldsymbol{H}'' &= \frac{\partial \boldsymbol{D}''}{\partial t} \\
\nabla\times \boldsymbol{E}'' &= -\boldsymbol{J}_m - \frac{\partial \boldsymbol{B}''}{\partial t} \\
\nabla\cdot \boldsymbol{B}'' &= \rho_m \\
\nabla\cdot \boldsymbol{D}'' &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{1-8b}$$

麦克斯韦方程(1-8b)是麦克斯韦方程(1-8a)的对称形式。将两组场源产生的场叠加，其全解可由如下麦克斯韦方程来求，即

$$\nabla\times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1-9a}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{J}_m - \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1-9b}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{B} = \rho_m \tag{1-9c}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{1-9d}$$

式(1-9a)～(1-9d)称为麦克斯韦方程的广义形式。其中各场量均为合成值，例如 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}'+\boldsymbol{E}''$ 等。

将式(1-1)化为式(1-9)，只需在方程右边形式上增加新的源 ρ_m 或 $\boldsymbol{J}_m$。但这些源并非一定真的存在，它可以是从其他项分离出来的等效项。为此，我们将式(1-1b)右边的 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$ 考虑为两部分，也就是说，用 $\mu\boldsymbol{H}_0+\mu\boldsymbol{H}$ 来取代 $\boldsymbol{B}$（正如前面用 $-\boldsymbol{J}_m-\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ 来取代 $-\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ 一样），即得

$$\nabla\times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu\boldsymbol{H}_0) - \frac{\partial}{\partial t}(\mu\boldsymbol{H}) \tag{1-10}$$

式中，$\boldsymbol{H}_0$ 可视为激发电磁场的源看待的局外变化磁场，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 是被激发的电场和磁场。现将式(1-10)右边首项 $-\frac{\partial}{\partial t}(\mu\boldsymbol{H}_0)$ 等效为磁流 $-\boldsymbol{J}_m$，则该式为与式(1-9a)对称的形式

$$\nabla\times \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{J}_m - \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

同理，将式(1-10)两边取散度，由 $\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{F}=0$ 得

$$\nabla\cdot(\mu\boldsymbol{H}) = -\nabla\cdot(\mu\boldsymbol{H}_0) \tag{1-11}$$

引入磁流连续性方程

$$\nabla\cdot \boldsymbol{J}_m = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t} \tag{1-12}$$

用 ρ_m 代换式(1-9b)中的 $\boldsymbol{J}_m$，则该式取散度后，变为与式(1-9d)对称的形式

$$\nabla\cdot(\mu\boldsymbol{H}) = \rho_m$$

由式(1-11)和(1-9c)得

$$\nabla\cdot(\mu\boldsymbol{H}_0) = -\rho_m \tag{1-13}$$

式(1-10)和(1-13)中含 $\mu\boldsymbol{H}_0$ 的项分别等效为 $\boldsymbol{J}_m$ 和 ρ_m，它们实际上均为原方程的 $\boldsymbol{B}$ 中分离出来的等效项。

从上面的分析可知，在用包含两项的源来取代单项源时，这相当于将单项源推广了。所以麦克斯韦方程的广义形式中的源 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{J}_m$（或 ρ 和 ρ_m）是一种广义源，其意义随问题而变。

它可以表示实际的局外源，也可以表示假想的等效源（分离项）。这里我们可以避开广义源的物理涵义，而将它想象为数学源。

4. 麦克斯韦方程的复数形式

在许多工程电磁问题中，场是按正弦规律变化的；即便对于任意时变场和波，也可用傅里叶方法分解为正弦场，只要知道这些正弦场，利用叠加原理便可得到所需要的任意场解。一般周期性或非周期性变化的场，可以利用傅里叶级数或傅里叶积分分解为正弦场的离散谱或连续谱

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= \sum_{-\infty}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{j\alpha t} \\ C_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\alpha} d\alpha \end{aligned}\right\} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{1-14a}$$

和

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} d\omega \\ g(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} dt \end{aligned}\right\} \tag{1-14b}$$

对于正弦电磁场，各场量与时间 t 的关系用因子 $\mathrm{e}^{-j\omega t}$ 来表示，$\frac{\partial}{\partial t}$ 应代换为 $\mathrm{j}\omega t$。于是，由式(1-9a)～(1-9d)可得相应麦克斯韦方程的复数形式

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \mathrm{j}\omega\boldsymbol{D} \tag{1-15a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{J}_m - \mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H} \tag{1-15b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = \rho_m \tag{1-15c}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho \tag{1-15d}$$

§1.2 媒质特性方程

3 个独立方程(1-1a,b)和(1-2)含 5 个矢量函数和一个标量函数，这相当于分解为 7 个标量方程含 16 个标量函数，其中有 12 个未知标量函数。显然，仅由这 3 个独立方程不足以确定 12 个未知标量函数。因此，只要各个场量或源量之间的结构关系是未知的或者是不确定的，这 3 个独立方程就称为麦克斯韦方程的非限定形式。为了确定上述各量，还必须给出描述媒质特性 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{J}$ 与 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 之间结构关系的 3 个辅助方程，以补充不足的 9 个标量方程，使场量的未知数与方程数一致。因此，当场量或源量之间的关系为已知时，就构成麦克斯韦方程的限定形式。

对于均匀、线性、各向同性媒质的最简单情况，用以限定麦克斯韦方程的媒质特性方程可取为

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E} = \varepsilon\boldsymbol{E} \tag{1-16a}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0\mu_r\boldsymbol{H} = \mu\boldsymbol{H} \tag{1-16b}$$

$$J = \sigma E \tag{1-16c}$$

式中，ε_0 和 μ_0 分别为自由空间的电容率（或介电常数）和导磁率；ε、μ 和 σ 分别为媒质的电容率、导磁率和导电率；$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ 和 $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$ 分别为相对电容率和相对导磁率。在国际单位制中

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2\mu_0} \approx \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}\mathrm{F/m}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\mathrm{H/m}$$

$$c = \frac{1}{(\mu_0\varepsilon_0)^{\frac{1}{2}}} \approx 3 \times 10^8\mathrm{m/s}$$

对于广义线性媒质，在时变场作用下媒质将随时间呈线性变化（$\frac{\partial\dot{\varepsilon}}{\partial t} \neq 0, \frac{\partial\dot{\mu}}{\partial t} \neq 0, \frac{\partial\dot{\sigma}}{\partial t} \neq 0$），并满足如下关系：

$$\boldsymbol{D} = \dot{\varepsilon}\boldsymbol{E} = \varepsilon\boldsymbol{E} + \varepsilon_1\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \varepsilon_2\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} + \cdots \tag{1-17a}$$

$$\boldsymbol{B} = \dot{\mu}\boldsymbol{H} = \mu\boldsymbol{H} + \mu_1\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \mu_2\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} + \cdots \tag{1-17b}$$

$$\boldsymbol{J} = \dot{\sigma}\boldsymbol{E} = \sigma\boldsymbol{E} + \sigma_1\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \sigma_2\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} + \cdots \tag{1-17c}$$

对于在时谐场作用下的广义线性媒质，如以式（1-17a）为例，显然为

$$\boldsymbol{D} = (\varepsilon + j\omega\varepsilon_1 - \omega^2\varepsilon_2 + \cdots)\boldsymbol{E} = \dot{\varepsilon}(\omega)\boldsymbol{E}$$

一般写为

$$\boldsymbol{D} = \dot{\varepsilon}(\omega)\boldsymbol{E} \tag{1-18a}$$

$$\boldsymbol{B} = \dot{\mu}(\omega)\boldsymbol{H} \tag{1-18b}$$

$$\boldsymbol{J} = \dot{\sigma}(\omega)\boldsymbol{E} \tag{1-18c}$$

式中，$\dot{\varepsilon}(\omega)$、$\dot{\mu}(\omega)$ 和 $\dot{\sigma}(\omega)$ 分别为媒质的复数电容率、复数导磁率和复数导电率。当 $\omega \to 0$ 时，有

$$\dot{\varepsilon}(\omega), \dot{\mu}(\omega), \dot{\sigma}(\omega) \to \varepsilon, \mu, \sigma$$

广义线性媒质的物理涵义可由媒质分子的微观结构来解释。在高频场的作用下，原子内部阻尼力使偶极矩 $\boldsymbol{p}_e$ 和 $\boldsymbol{p}_m$ 的取向变化跟不上场的周期变化，因此有一时间滞后。应用 $\dot{\varepsilon}(\omega)$ 和 $\dot{\mu}(\omega)$ 来取代 ε 和 μ，就能表示这一时间滞后。所以 $\dot{\varepsilon}(\omega)$ 和 $\dot{\mu}(\omega)$ 的复数性质反映了为克服摩擦阻尼力在媒质内部所产生的功率损耗。如 $\boldsymbol{E}$ 为作用在介质上的电场强度复矢量，则介质中极化强度复矢量为

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \alpha e^{-j\varphi}\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\dot{\chi}_e\boldsymbol{E} \tag{1-19}$$

式中，α 为正实常数，$\dot{\chi}_e$ 为相对电极化率，φ 是 $\boldsymbol{P}$ 滞后于 $\boldsymbol{E}$ 的相角。因此，利用 $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ 可得

$$\dot{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_0(1 + \dot{\chi}_e) = \varepsilon_0(1 + \alpha\cos\varphi - j\alpha\sin\varphi)$$

写为

$$\dot{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon' - j\varepsilon'' = |\dot{\varepsilon}|e^{-j\delta_e} \tag{1-20}$$

式中，ε'、ε'' 和 δ_e 分别为媒质的电容率、电损耗因数和电损耗角。

类似地，利用 $\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M})$ 也可得

$$\dot{\mu}(\omega) = \mu' - j\mu'' = |\dot{\mu}|e^{-j\delta_m} \tag{1-21}$$