下册

高等数学

许品芳 欧景昭 编著

兵器工业出版社

高等数学 下册

高 等 数 学

（下册）

许品芳　欧景昭　　编著

兵 器 工 业 出 版 社

(京)新登字049号

内 容 介 绍

本书是以国家教委批准的《高等数学课程教学基本要求》为依据，用认知心理学理论为指导编写的。

本书分上下两册。上册内容为函数与极限、导数与微分、不定积分与定积分、中值定理与导数应用、常微分方程，并附有积分表与常用曲线；下册内容为空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、多元函数积分、向量函数积分、级数、并附有若干曲面所围立体图形。

本书结构紧凑，系统新颖，说理详尽，深入浅出，例题丰富，习题题型完备，便于自学，可作为高等工业院校教材，也可作为工程技术人员自学用书或参考书。

高等数学
（下册）
许品芳　欧景昭　编著

兵器工业出版社 出版
（北京市海淀区车道沟10号）
新华书店总店科技发行所发行
各地新华书店经销
兵器工业出版社五三一印刷厂印装

开本：787×1092　1/16　印张：14.875　字数：363.48千字
1992年7月第1版　1992年7月第1次印刷
印数：1－9000　定价：7.50元
ISBN 7-80038-433-0/O·23

前　言

1987年，我们以国家教委正式颁布的《高等数学教学基本要求》为依据，结合华东工学院的特点，用模式思维理论为指导编写了一本《高等数学讲义》。经88、89、90三届使用，效果较好。在此基础上，我们充分征求华工应用数学系教师的使用意见，进行删简、修改，特别是重选了全部习题，形成本书。

本书分上、下两册。上册包括函数、极限、连续、导数与微分、不定积分与定积分、中值定理与导数应用、常微分方程；下册包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、多元函数积分、向量函数积分与场论三度、级数。

本教材有如下特点：

1. 以模式思维理论为指导　它认为学好一门课归根结蒂是掌握一定数量的模式。所谓模式是指：在什么条件下应采取什么相应行动，从而会得到什么相应结果或应该做什么相应的事。正是模式思维指导着人们去思考、去行动、去把握各个具体事物。

数学模式的基础是数学中的概念。数学模式包括典型习题、解题方法与数学思想三个层次。帮助工科一年级大学生正确理解数学概念，建立数学思维模式是本教材的任务。

2. 讲授系统新颖　本教材打破了以教学内容为系统的习惯，而以学生建立模式的需要进行编排。为了突出极限思想，将数列极限与函数极限分开成节；为了强化极限运算，先介绍连续函数，后介绍极限运算技巧；将中值定理放在定积分之后，增强了学生对变上限积分表示的函数之了解，同时在研究函数时可应用积分思想，从而突出了知识的横向联系与综合性；将微分方程放在上册是为了配合一年级下学期的物理课学习；鉴于向量函数在工程技术中的重要性，突出重积分与第一类线面积分的共性，我们把第二类线面积分与场论初步独立成章。

3. 例题丰富，习题充分，题型较全　要建立数学概念，形成数学模式，掌握数学技巧，首先要借鉴他人经验，其次是本人的反复练习。因此，丰富的例题，充分的习题，题型完备是必不可少的。而有一定数量的、难度较大的习题是为学有余力的学生准备的。

本教材的正文部分由许品芳副教授改编，并请国家级有杰出贡献的中青年专家施容华教授审定；习题部分由欧景昭副教授重选，验算。

由于模式思维理论在国内尚属新事物，我们领会不深，加上系统变化较大，编者水平有限，因此，本教材可能有许多不足或考虑不周，甚至差错之处，欢迎批评指教，我们不胜感谢。

许品芳　　欧景昭

1991年7月于华东工学院

目　录

第六章　空间解析几何与向量代数

§6.1　空间直角坐标系

§6.1.1　空间点的直角坐标

为了建立空间图形与方程的联系，首先需要建立空间点与有序数组之间的对应关系．为此，模仿平面解析几何的办法，先建立空间直角坐标系．

在空间任取一定点作为原点O，作两两垂直的三条数轴ox，oy，oz，它们具有相同的单位长．这就得到了一个空间直角坐标系．

空间直角坐标系分为右手坐标系与左手坐标系两种，如图6.1.1所示．我们只用右手系．

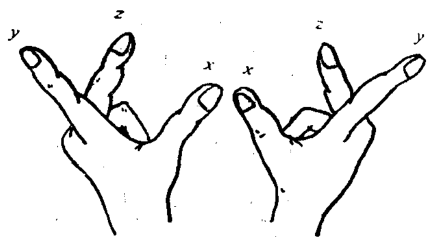


图6.1.1

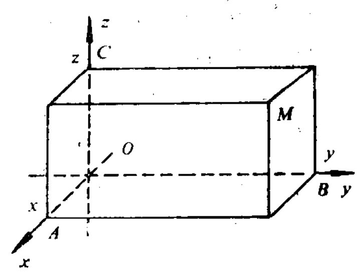


图6.1.2

设点M为空间任意一点，过点M作三个平面分别垂直于ox轴、oy轴、oz轴，设平面与轴的交点依次为点A、B、C（如图6.1.2）．若点A、B、C在ox轴、oy轴、oz轴上的坐标依次为x、y、z，则点M唯一地确定了一个有序实数组x、y、z．有序实数组x、y、z称为点M的空间直角坐标，记作$M(x, y, z)$.其中x叫做横坐标，y叫做纵坐标，z叫做竖坐标。

反之，给定一个有序实数组x、y、z．可以在ox轴、oy轴、oz轴上确定坐标为x、y、z的三个点A、B、C．过点A、B、C分别作平面垂直于ox轴、oy轴、oz轴，三平面相交于一点M．因此，有了空间直角坐标系后，空间的所有点与全部有序三实数组之间建立了一一对应的关系，换句话讲，空间点与点的空间直角坐标是一一对应的．

ox轴、oy轴、oz轴简称x轴、y轴、z轴，又称横轴、纵轴、竖轴（或立轴）。x轴与y轴决定的平面叫做xy平面，同样可得yz平面与xz平面，三者统称为**坐标平面**．三个坐标平面将整个空间分成八块，称为**卦限**，其顺序规定如下：第Ⅰ Ⅱ Ⅲ Ⅳ卦限位于xy平面上方，顺序与平面直角坐标系相同，第Ⅴ Ⅵ Ⅶ Ⅷ卦限依次在第Ⅰ Ⅱ Ⅲ Ⅳ卦限下方．于是每个卦限内坐标的符号可用下表列出．

卦限 / 坐标	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

在坐标平面上与坐标轴上的点的坐标有其特殊性，具体地讲，在xy平面上的点有坐标(x, y, o)；在yz平面上的点有坐标(o, y, z)；在xz平面上的点有坐标(x, o, z)；在x轴上的点有坐标(x, o, o)；在y轴上的点有坐标(o, y, o)；在z轴上的点有坐标(o, o, z)，而原点坐标为(o, o, o)。

思考题

写出点$M(x, y, z)$关于xy平面的对称点坐标；关于z轴的对称点坐标；关于原点的对称点坐标。

§6.1.2 空间两点间距离公式

设$M_1(x_1, y_1, z_1)$与$M_2(x_2, y_2, z_2)$为空间任意两点，过点M_1，M_2各作三个平面分别垂直于三坐标轴，这六个平面围成一个长方体，M_1M_2是对角线，如图6.1.3所示。

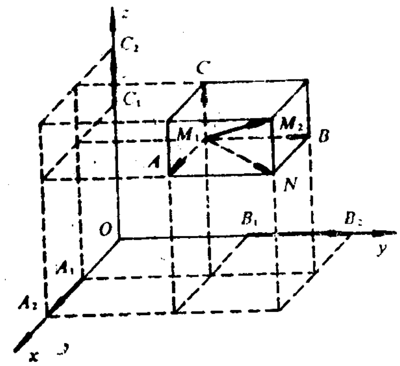


图6.1.3

$\because \triangle M_1NM_2$是Rt$\triangle$，$\triangle M_1AN$也是Rt$\triangle$，$\therefore M_1$与$M_2$两点间距离$|M_1M_2|$满足关系

$$|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2$$
$$=|M_1A|^2+|AN|^2+|NM_2|^2.$$

而$|M_1A|=|A_1A_2|=|x_2-x_1|$，$|AN|=|B_1B_2|=|y_2-y_1|$，$|NM_2|=|C_1C_2|=|z_2-z_1|$，故有空间两点间的距离公式：

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

特别，点$M(x, y, z)$与原点$O(0, 0, 0)$间的距离为

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ .$$

例1 试证以点$A(4, 1, 9)$，$B(10, -1, 6)$；$C(2, 4, 3)$为顶点的三角形为等腰直角三角形。

证：$\because$ $|AB|^2=(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2=49$;

$|BC|^2=(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2=98$;

$|CA|^2=(4-2)^2+(1-4)^2+(9-3)^2=49$,

$\therefore |AB|=|AC|$，$|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2$，故$\triangle ABC$为等腰Rt$\triangle$。

例2 在xy平面上求一点M，使得点M与点$A(3, 2, 1)$、$B(2, -1, -1)$及原点O距离相等。

解：$\because$点M在xy平面上，设坐标为$M(x, y, 0)$，由题意知$|MA|=|MB|=|MO|$，即有

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2+(0-1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(0+1)^2}$$
$$=\sqrt{x^2+y^2+0^2}$$

消去根号，并化简之，得方程组

$$3x+2y=7,\ 2x-y=-3$$

解得$x=\frac{1}{7}$，$y=\frac{23}{7}$，故所求点为$M\left(\frac{1}{7}, 3\frac{2}{7}, 0\right)$.

习 题 6-1

1. 下列各点对坐标系有何特殊位置

$A(-2,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,-5)$，$D(0,1,-2)$，$E(3,0,1)$，$F(2,-1,0)$.

2. 在直角坐标系中画出下列各方程所代表的平面（标明它们与某坐标轴的交点）

（1） $x=3$；（2） $y=-1$；（3） $z=2$.

3. 在直角坐标系中画出下列各方程所代表的直线（标明它们和某坐标面的交点）

（1） $x=3$，$y=2$；（2） $x=-2$，$z=3$.

4. 设某点与给定点$(2,-3,-1)$分别对称于下列坐标平面a) xoy；b) yoz；c) zox；求该点的坐标。

5. 设某点与给定点$(2,-3,-1)$分别对称于下列各轴(1) x轴；(2) y轴；(3) z轴，求该点的坐标。

6. 根据下列条件求点B的未知坐标

（1） $A(4,-7,1)$，$B(6,2,z)$，$|AB|=11$；

（2） $A(2,3,4)$，$B(x,-2,4)$，$|AB|=5$.

7. 求点$A(12,-3,4)$与原点和坐标轴的距离。

8. 求第三卦限内的点，已知它与三个坐标轴的距离为$d_x=5$，$d_y=3\sqrt{5}$，$d_z=2\sqrt{13}$.

9. 设长方体的三个棱长分别为2，7，8，若以它的对称中心为原点，以平行于上述三个棱的直线依次为x轴，y轴，z轴，求长方体各顶点的坐标。

10. 在z轴上求与点$A(-4,1,7)$和$B(3,5,-2)$等距离的点。

答案

4. （1） $(2,-3,1)$，（2） $(-2,-3,-1)$，（3） $(2,3,-1)$. 5. （1） $(2,3,1)$ （2） $(-2,-3,1)$，（3） $(-2,3,-1)$. 6. （1） $z=7$ 或 $z=-5$. 7. $d_0=13$，$d_x=5$，8. $(-6,-4,3)$ 10. $\left(0,0,\frac{14}{9}\right)$.

§6.2 向量及其线性运算

§6.2.1 向量概念

1° 什么是向量

在科学技术的学习与研究中，我们遇到的“量”可以分成两类。一类量用数值的大小就可以确定，称为数量（或叫纯量）。如长度，面积，体积，温度，密度，质量，时间等等；另一类量只知道它的数值大小还不行，还需要知道它的方向，然后才能确定，如力，力矩，位移，速度，加速度，电场强度等等。这类既有大小，又有方向的量称为**向量**（或称矢量）。通常用黑体字母或上面加箭头的字母来表示。如力$\mathbf{F}$或$\vec{F}$，速度$\mathbf{v}$或$\vec{v}$，加速度$\mathbf{a}$或$\vec{a}$。前者用于印刷，后者用于书写。

2° 向量的几何表示

在数学中，常常用空间一条有向线段来表示向量。如图6.2.1用有向线段$\boldsymbol{AB}$表示向量$\boldsymbol{b}$。这时有向线段的方向表示向量的方向，有向线段的长度表示向量的大小。

其实，有向线段本身也是向量，称为几何向量。今后我们将以它为代表来研究向量。从而$\boldsymbol{AB}$也是向量的符号.$\boldsymbol{AB}$表示以A为起点，B为终点的向量。特别，在空间直角坐标系中，以原点为起点的几何向量称为**向径**，若有点$M(x, y, z)$，则$\boldsymbol{OM}$为向径，常用$\boldsymbol{r}$来表示。

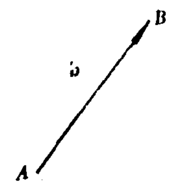


图6.2.1

3° 向量的模

向量的大小（即几何向量的长度）称为向量的**模**。向量$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{AB}$的模依次记作$|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{AB}|$。模为1的向量称为**单位向量**。模等于零的向量叫作**零向量**，记作$\boldsymbol{0}$。因为零向量的模为零，所以表示零向量的几何向量长度为零，从而起点与终点重合，方向不定（注意：零向量不是没有方向，而是方向可以任意）。

4°向量的相等

在实际问题中，有些向量与起点无关，有些向量与起点有关。我们取其普遍性（即向量有大小有方向）。舍其特殊性（对起点的限制），只研究与起点无关的向量，称为**自由向量**（简称向量）。这样做不失一般性，因为只要稍加处理，所得结果同样适用于与起点有关的向量。

在只研究自由向量的约定下，向量可以平行移动。从而有两向量相等的定义如下。

定义 若两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的模相等，方向相同（即彼此平行或在同一条直线上，且指向相同）。则称这两个向量相等，或者说它们是同一个向量，记作$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。

思考题

1. 什么是单位向量？单位向量有多少个？你能举出四个不相等的单位向量吗？

2. 下列等式恒成立吗？

$$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|,\quad \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}.$$

3. 向量的模能否为负数？

§6.2.2 向量的线性运算

1° 向量加法

由物理知，力的合成，速度的合成，都符合平行四边形法则。由此抽象出向量加法的定义如下，称之为向量加法的**平行四边形法则**。

定义 有向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$，以一定点O为起点，作向量$\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{OB}=\boldsymbol{b}$. 以它们为边作平行四边形，称对角线向量$\boldsymbol{OC}$为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的**和**，记作$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。

注意到平行四边形的对边平行且相等，所以由图6.2.2可知：$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{OB}$。于是，也可以这样来得到$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$：作$\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{a}$，再以$A$为起点作$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{b}$。连结$O$,$C$得向量$\boldsymbol{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这个方法叫做向量加法的**三角形法则**。其优点为：便于证明运算律；适用于$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$平行的情况；可推广到更多个向量相加。

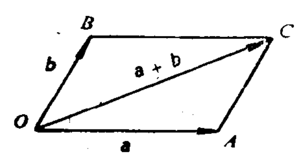


图6.2.2

向量的加法满足下列运算律

（1） 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

（2） 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$,

其中交换律可由平行四边形法则得出；结合律可由三角形法则得到，如图6.2.3。

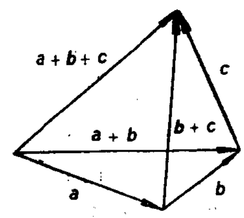


图6.2.3

由两向量求和的三角形法则，可知向量模满足所谓**三角形不等式**：

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

这是因为三角形两边之和大于第三边。其中等号当且仅当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同向时才成立。

2° 向量乘以数。

定义 向量$\boldsymbol{a}$与数量λ的**积**$\lambda\boldsymbol{a}$是指满足下列条件的向量：

（1） $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$（即$\lambda\boldsymbol{a}$的模是$\boldsymbol{a}$的模的$|\lambda|$倍）。

（2） $\lambda\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{a}$，且当$\lambda>0$时$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$同向；当$\lambda<0$时$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$反向。

特别，有$0\cdot\boldsymbol{a}=0$；$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$。$\lambda\cdot 0=0$。

向量乘以数满足下列运算律：

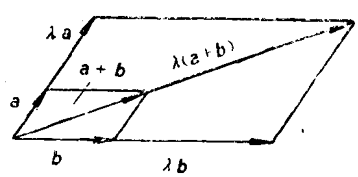
（1） 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$。

（2） 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$。

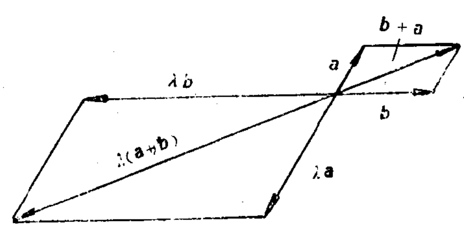
由定义可知$\lambda(\mu\boldsymbol{a})$、$\mu(\lambda\boldsymbol{a})$、$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$平行且指向相同。且$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})|=|\mu(\lambda\boldsymbol{a})|=|\lambda\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\mu|\cdot|\boldsymbol{a}|$。所以结合律成立。

下面证明分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$。

若$\lambda=0$，则$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{o}$，$\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o}$。结论成立。若$\lambda\neq 0$，只须注意到当平行四边形两邻边各变$\lambda$倍时（注意当$\lambda<0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$、$\lambda\boldsymbol{b}$分别与$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$反向）所得平行四边形与原平行四边形相似，因此对角线也变λ倍。如图6.2.4所示，故结论仍成立。



($\lambda>0$)



($\lambda<0$)

图6.2.4

分配律$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$的证明留作练习。

我们称平行于同一条直线的向量为**共线向量**，于是有

定理 两非零向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线的充要条件为存在非零常数λ，使得$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$。

证： （$\Leftarrow$） $\because\lambda\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{b}$，而$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ $\therefore$ $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$。

（$\Rightarrow$） 记$k=|\boldsymbol{a}|/|\boldsymbol{b}|$，若$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$同向取$\lambda=k$；若$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$反向取$\lambda=-k$，从而$\lambda\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$恒同向。又$|\lambda\boldsymbol{b}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{b}|=k|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|$，$\therefore\lambda\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$同向等模，从而相等，即$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$。

通常用$\boldsymbol{a}^{\circ}$来表示与非零向量$\boldsymbol{a}$同方向的单位向量，即$\boldsymbol{a}^{\circ}$与$\boldsymbol{a}$同向，且$|\boldsymbol{a}^{\circ}|=1$。则有

$$\boxed{a=|a|a^{\circ} \quad 或 \quad a^{\circ}=\frac{a}{|a|}}$$

只须注意$|a|>0$，$\therefore a$与$|a|a^{\circ}$同向．又$||a|a^{\circ}|=|a|\cdot|a^{\circ}|=|a|\cdot 1=|a|$　故$a=|a|a^{\circ}$。此式表明，任何非零向量可以分解成模与方向（用单位向量表示）两部分的乘积。

3° 逆向量，向量的减法

我们用$-b$表示$(-1)\cdot b$，称为向量b的**逆向量**。不难验证$-b$与b的模相等，方向相反，且有$b+(-b)=o$成立。

定义 向量a与向量b的逆向量$-b$之和，称为a与b的**差**，记作$a-b$。即有

$$a-b\triangleq a+(-b).$$

由定义可知$b-b=b+(-b)=o$。若记$c=a-b$，则有

$c+b=(a-b)+b=[a+(-b)]+b=a+[(-b)+b]=a+0=a$。

这表明向量的减法实质上仍是向量加法的逆运算。

也可以用几何方法求$a-b$，方法是：由同一个起点作a、b，则由b的终点到a的终点之向量即为$a-b$。

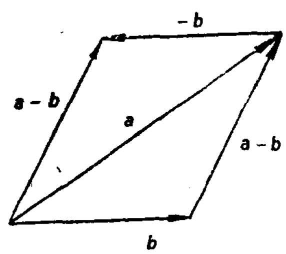


图6.2.5

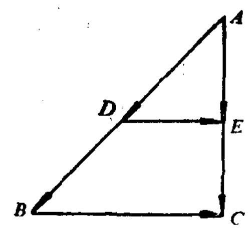


图6.2.6

例 求证：三角形两边中点的连线平行第三边，且为第三边的一半。（图6.2.6）。

证：设$\triangle ABC$中，D、E分别是AB，AC的中点，则有

$$AD=\frac{1}{2}AB, \qquad AE=\frac{1}{2}AC$$

从而 $$DE=AE-AD=\frac{1}{2}AC-\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}(AC-AB)=\frac{1}{2}BC.$$

这表明$DE//BC$，且为BC的一半长。

思考题

1. 证明分配律$(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$。

2. 证明，任意三角形的三条中线只作平行移动，可以构成一个三角形。

§6.2.3 向量的坐标表示式

为了方便地进行向量运算，我们引进向量的坐标表示式，使向量的运算完全代数化。

1° 向量的坐标表示

在空间建立一个直角坐标系，沿x轴、y轴、z轴的正方向各取单位向量依次记作i，j，k，称为空间直角坐标系的三个**基本单位向量**。

对任何向量$\boldsymbol{a}$，恒可作向径$\boldsymbol{OM}=\boldsymbol{a}$，设点$M$坐标为$(x, y, z)$。过点$M$作三个平面分别垂直于$x$轴、$y$轴、$z$轴，依次得交点$A(x, 0, 0)$，$B(0, y, 0)$，$C(0, 0, z)$。由图6.2.7知

$$\boldsymbol{OM}=\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{AP}+\boldsymbol{PM}=\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{OB}+\boldsymbol{OC}$$
$$=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

即 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，

称为向量$\boldsymbol{a}$的坐标表示式，有时也记成$\boldsymbol{a}=\{x, y, z\}$。其中$x$，$y$，$z$也称为向量$\boldsymbol{a}$的坐标，

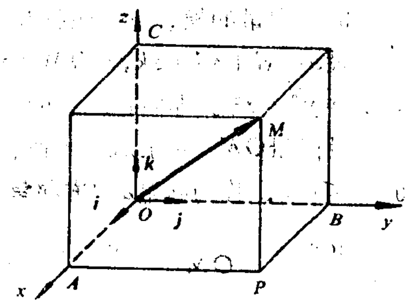


图6.2.7

2° 向量线性运算的坐标表示

设$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，则由运算律不难证明：

$$\boxed{\begin{gathered}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1\pm x_2)\boldsymbol{i}+(y_1\pm y_2)\boldsymbol{j}+(z_1\pm z_2)\boldsymbol{k}\\ \lambda\boldsymbol{a}=\lambda x_1\boldsymbol{i}+\lambda y_1\boldsymbol{j}+\lambda z_1\boldsymbol{k}\end{gathered}}$$

例1 设点$A(x_1, y_1, z_1)$，$B(x_2, y_2, z_2)$，求向量$\boldsymbol{AB}$的坐标表示式。

解：作向径$\boldsymbol{OA}$，$\boldsymbol{OB}$，则有

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{OB}-\boldsymbol{OA}=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})$$
$$=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.$$

例2 设向量$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$（其中$x_iy_iz_i\neq0, i=1,2$）。证明：$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线的充要条件为$\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$。

证：已知$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线$\Longleftrightarrow\exists\lambda$，使$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，即有

$$x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}=\lambda x_2\boldsymbol{i}+\lambda y_2\boldsymbol{j}+\lambda z_2\boldsymbol{k}.$$

即 $(x_1-\lambda x_2)\boldsymbol{i}+(y_1-\lambda y_2)\boldsymbol{j}+(z_1-\lambda z_2)\boldsymbol{k}=0.$

即 $x_1-\lambda x_2=0$，$y_1-\lambda y_2=0$。$z_1-\lambda z_2=0$。

即有 $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}=\lambda.$

例3 已知点$A(x_1, y_1, z_1)$，$B(x_2, y_2, z_2)$，而点$M(x, y, z)$在直线AB上，且使$\boldsymbol{AM}=\lambda\boldsymbol{MB}$（其中$\lambda\neq-1$，点$M$称为定比分点）。证明：

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

证：由例1知已知式$\boldsymbol{AM}=\lambda\boldsymbol{MB}$可表示为

$$(x-x_1)\boldsymbol{i}+(y-y_1)\boldsymbol{j}+(z-z_1)\boldsymbol{k}=\lambda(x_2-x)\boldsymbol{i}$$
$$+\lambda(y_2-y)\boldsymbol{j}+\lambda(z_2-z)\boldsymbol{k}$$

得 $x-x_1=\lambda(x_2-x)$，$y-y_1=\lambda(y_2-y)$，$z-z_1=\lambda(z_2-z)$.

解得 $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$，$y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$，$z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$.

特别，当$\lambda=1$时得中点公式

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

3° 向量的模、方向余弦及方向角

设$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，作$\boldsymbol{OM}=\boldsymbol{a}$，则点$M$的坐标为$(x,y,z)$。从而得$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{OM}|=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。即向量的模的平方等于它的三个坐标的平方和。

设向量$\boldsymbol{OM}=\boldsymbol{a}$与$x$轴、$y$轴、$z$轴的夹角依次为$\alpha$、$\beta$、$\gamma$（我们规定$0\leqslant\alpha\leqslant\pi$，$0\leqslant\beta\leqslant\pi$，$0\leqslant\gamma\leqslant\pi$）。称为向量$\boldsymbol{a}$的**方向角**。而称$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$为向量$\boldsymbol{a}$的**方向余弦**。由图6.2.7可知$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{OM}|}$，$\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{OM}|}$，$\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{OM}|}$，其中$|\boldsymbol{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

上述讨论表明：当已知一向量的坐标表示式后，可按下列公式计算它的模与方向余弦：

$$\boxed{\begin{gathered}\text{若}\ \boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},\ \text{则}\ |\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\\ \cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\end{gathered}}$$

若注意到向量$\boldsymbol{a}$的单位向量$\boldsymbol{a}^\circ=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，则有公式

$$\boxed{\begin{gathered}\boldsymbol{a}^\circ=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}\\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.\end{gathered}}$$

公式表明，已知一向量的方向余弦与已知向量的单位向量是一回事；向量的三个方向余弦（从而三个方向角）并非彼此独立的。

习　题 6-2

1. 在平行四边形$ABCD$内设$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{AD}=\boldsymbol{b}$，试用$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$表示向量$\boldsymbol{MA}$，$\boldsymbol{MB}$，$\boldsymbol{MC}$，$\boldsymbol{MD}$这里$M$是平行四边形对角线的交点。

2. 若四边形的对角线互相平分，证明它是平行四边形。

3. 已知三角形ABC，$\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{b}$，若边$BC$被$D$点分成$BD:DC=m:n$，边$AC$被点$E$分成$AE:EC=m:n$，证明$\boldsymbol{DE}//\boldsymbol{BA}$。

4. 向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$必须满足什么条件，以下各式成立：

（1）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；　（2）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

（3）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；　（4）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；

（5）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$；　（6）$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；

（7）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；　（8）$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

5. 在正六边形$ABCDEF$内已知：$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{n}$。沿这二向量分解$\boldsymbol{AC}$、$\boldsymbol{AD}$、$\boldsymbol{AF}$和$\boldsymbol{EF}$。

9. 平行于z轴的向量的坐标有什么特点？平行于x轴和y轴的向量的坐标分别有什么

特点？

7. 已知向量$a=e_1-2e_2+3e_3$，$b=2e_1+e_2$，$c=6e_1-2e_2+6e_3$其中e_1，e_2，e_3不共面，问$a+b$和c是否共线？

8. 已知向量l，m和n沿三个不共面向量a，b和c分解为$l=2a-b-c$，$m=2b-c-a$，$n=2c-a-b$，l，m，n是否共面？若共面，给出线性关系式。

9. 写出向量$a=\frac{1}{3}(2i+2j-k)$，$b=\frac{1}{3}(-i+2j+2k)$的坐标，并分别求它们的模和方向余弦。

10. 设$a=i+j+k$，$b=2i-3j+5k$，分别用单位向量a°，b°表示a，b。

11. 一向量与x轴和y轴构成等角，而与z轴构成的角是它们的两倍，试确定这个向量的方向。

12. 设向量$a=\{3,5,-1\}$，$b=\{2,2,3\}$，$c=\{4,-1,-3\}$，求（1）$2a-3b+4c$；（2）$ma+nb$。

13. 三力$F_1=\{1,2,3\}$，$F_2=\{-2,3,-4\}$，$F_3=\{3,-4,5\}$同时作用于一点，求合力的大小和方向余弦。

14. 已知三角形ABC的一个顶点$A(2,-5,3)$及与它的二边相合的向量$AB=\{4,1,2\}$，$BC=\{3,-2,5\}$，求其余的顶点和边CA。

15. 写出下列各点的向径和它们的坐标表示式，$A(2,0,3)$，$B(0,0,1)$，$C(2,0,0)$，$D(-1,-2,-3)$。

16. 证明向径$r_1=2i+4j+k$，$r_2=3i+7j+5k$，$r_3=4i+10j+9k$的终点$A(r_1)$，$B(r_2)$，$C(r_3)$在一条直线上。

17. 有三点$A(r_1)$，$B(r_2)$，$C(r_3)$，如果它们的向径满足$\alpha r_1+\beta r_2+\gamma r_3=0$，$\alpha+\beta+\gamma=0$，这三点有何关系？

18. 给定点$M_1(-1,4,1)$和$M_2(1,0,-3)$，求线段M_1M_2的中点及分线段M_1M_2成比值$\lambda=2$和$\lambda=-\frac{1}{2}$的点的坐标。

19. 直线a经过点$P_0(r_0)$并平行于非零向量a，设$P(r)$是直线a上任意一点，试利用向量共线的概念，写出向径r和r_0，a的关系。

答案

1. $-\frac{1}{2}(a+b)$，$\frac{1}{2}(a-b)$，$\frac{1}{2}(a+b)$，$\frac{1}{2}(b-a)$。 5. $\frac{3}{2}m+\frac{1}{2}n$，$m+n$，$\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}m$，$-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}n$。 7. 共线。 8. 共面，$l=-m-n$。

9. $a=\left\{\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right\}$，$|a|=1$，$\cos\alpha=\frac{2}{3}$，$\cos\beta=\frac{2}{3}$，$\cos\gamma=-\frac{1}{3}$。

10. $a=\sqrt{3}a^\circ$，$a^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k)$。 11. $a^\circ=\{0,0,-1\}$或$\left\{\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right\}$。

12. （1）$\{16,0,-23\}$。 13. $|F|=\sqrt{21}$，$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{21}}$，$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{21}}$，