山东科学技术出版社

一元微积分概念与解题方法

一元微积分概念与解题方法

陈广桐　张宜友　林初章

山东科学技术出版社

一九八三年·济南

内 容 提 要

本书概括了一元微积分的主要内容．对极限和连续，微分学，积分学等方面的概念作了详尽的说明．书中列举的定理，着重指出它们的作用和应该注意的地方，凡现行中学课本涉及到但未加证明的定理，本书都以例题的形式给出证明．书中还选编了有代表性的326道例题，目的在于归纳解题规律，介绍常用解题技巧．每节后均有思考题，书末附有全部解答．

本书以独特的编写手法，为大、中学生学习微积分提供了一本较好的参考书，也可作为中学教师讲授微积分的教学参考书，对广大自学青年来说也是一本很好的辅导用书．

一元微积分概念与解题方法

陈广桐　张宜友　林初章

*

山东科学技术出版社出版
山东省新华书店发行
山东新华印刷厂德州厂印刷

*

787×1092毫米32开本　15.5印张　329千字
1983年12月第1版　1983年12月第1次印刷
印数：1—20,000

书号 13195·105　定价 1.40 元

前　言

微积分学是在十七世纪末叶由英国物理、数学家牛顿(Newton,1642—1727)和德国数学家莱布尼兹(Leibniz,1646—1716)创立的数学理论，它是研究现实世界中变量变化规律的一门科学。目前，微积分学的理论和应用已经渗透到各个科学领域，成为各种科学技术、生产建设以至日常生活中不可缺少的重要工具。

现在中学数学已增加了微积分学的基本内容，高等院校、电视大学以及工矿企业的业余职工大学等也都把微积分作为主要课程之一。但是由于微积分的研究对象和研究方法与初等数学有着根本性的区别，因而初学者常会遇到各种各样的困难。为了帮助读者加深对微积分基本概念和理论的理解，进一步提高解题能力和熟练演算技巧，我们编写了这本书，希望能给读者一些有益的启发。

本书是按照目前大中学校所采用的微积分教材的顺序编写的。书中对微积分的基本概念和主要定理都做了尽可能详尽的说明或指出注意之点，并给出其几何意义以使数学概念形象化。对某些重要概念还给出其矛盾概念，以便读者从正反两方面加深理解。书中选编了较大数量的例题，目的在于归纳解题的规律，以便使读者尽快掌握解题的方法和技巧。在例题的编选上，注意了基本概念，定理和基本方法的运用，

力求使其具有典型性和一定的广泛性。对一些例题注意交代解题思路，凡估计读者容易发生困难的地方都作了必要的分析和说明。对于中学课本中涉及到但未加以证明的定理也通过例题给出了证明。书中每节最后都编选了一定数量的思考题，书末附有思考题的全部解答，以利于读者加深对该节内容和方法的理解。

本书可供中学教师作为教学参考，也可供各类大学及中等学校学生配合微积分教本使用，还可作为自学青年的辅导用书。

在编写本书的过程中，蒙王济诚、黄超群等老师提出了许多指导性意见，给予我们很大帮助，在此表示衷心感谢。

编　者

1983年4月

目　　录

第一章　极限和连续

极限是微积分学的基础．高等数学中某些其他概念如导数、微分和积分等都是以极限的形式给出或与之密切相关，即使在初等数学中，如将循环小数化为分数，无穷递缩等比数列求和，求圆的面积和周长等，也须应用极限的概念．

极限方法是寻求精确解答许多实际问题的基本方法，是描述变量在变化过程中变化趋势的重要工具，是人们对客观事物的认识从有限到无限，从近似到精确，从量变到质变的一种数学方法．因此，正确地理解和掌握极限的概念和方法，对于学好微积分有着根本的意义．

§1　数列及其极限

数列是一种最简单同时又是最基本的特殊类型的变量——整序变量，它的一切值可以按次序排列起来．数列的极限是各类变量极限的最简单情况，它的概念和理论都可以推广到其他变量中．反之，在某种意义上来说各种变量极限，都可以化为数列极限的情况来研究．因此，掌握数列及其极限的理论是重要的．

1.1　数列的概念

1．数列的定义　按自然数的顺序排列的无穷多个数

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

叫做无穷数列，简称数列，记为 $\{a_n\}$ 。

数列中的每一个数叫做数列的一项，而第n项a_n叫做数列的一般项或通项。例如：

$$2,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{3},\ \cdots,\ 1+\frac{1}{n},\ \cdots \qquad (1)$$

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \cdots,(-1)^{n-1}\frac{1}{n},\ \cdots \qquad (2)$$

$$4,\ 4,\ 4,\ 4,\ \cdots,\ 4,\ \cdots \qquad (3)$$

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \cdots,\ n^2,\ \cdots \qquad (4)$$

$$2,\ 0,\ 2,\ 0,\ \cdots,\ 1+(-1)^{n-1},\ \cdots \qquad (5)$$

都是数列的例子，它们的一般项a_n分别为

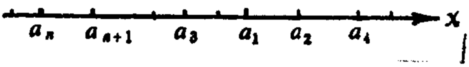
$$1+\frac{1}{n},\ (-1)^{n-1}\frac{1}{n},\ 4,\ n^2,\ 1+(-1)^{n-1}$$

说明：1° 由定义知，作为数列，第一，它其中的各项必须是有顺序的；第二，它必须含有无穷多个数，即当$n>m$时，a_n就在a_m的后面，且其中任何一个数后面都还有一个数.所以，不分先后次序的一堆数不能称为一个数列，也不能认为有先后次序的数集就是一个数列.例如，大于零而小于1的全体实数尽管有大小次序，但它不是一个数列，因为指不出哪一个数是第一个数，哪一个数是第二个数，因而不能按先后次序排列起来.

2° 一般地，知道了数列的一般项a_n的表达式，就能写出数列$\{a_n\}$的任意一项，从而数列就成为已知数列.数列一般项的表达式，通常可以通过观察数列的前有限项的规律得到.

3° 若数列的各项取同一数值，则称该数列为常数数列，如数列（3）即为常数数列.

4° 数列在几何上的表示是数轴上的一列点（图1.1）.



图（1.1）

2. 数列的性质

（1）数列的单调性

（i）单调增加数列：若

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \cdots$$

则称数列 $\{a_n\}$ 是单调增加数列。

（ii）单调减少数列：若

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant \cdots$$

则称数列 $\{a_n\}$ 是单调减少数列。

单调增加数列和单调减少数列统称为单调数列。如果等号不出现就称为严格单调数列。数列（4）是严格单调增加数列，数列（1）是严格单调减少数列。

（2）数列的有界性

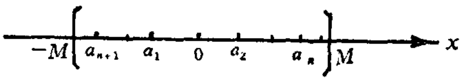
（i）有界数列：若存在某个正数 M，对于任意自然数 n，都有

$$|a_n| \leqslant M$$

则称数列 $\{a_n\}$ 为有界数列。数列（1）、（2）、（3）、（5）都是有界数列。

说明：1° 定义中的正数 M 叫做数列 $\{a_n\}$ 的界数．显然，若 M 为 $\{a_n\}$ 的界数，则 $M+1$，$M+2$，…都是 $\{a_n\}$ 的界数，因此，有界数列的界数是不唯一的．

2° 数列 $\{a_n\}$ 有界的几何意义是：数轴上对应于 $\{a_n\}$ 的点 a_n 全部落在一个以原点为中心，以 M 为半径的闭区间 $[-M, M]$ 内（图1.2）．



图（1.2）

（ii）数列的上界和下界：若存在两个数m和M，使得对任何自然数n都有

$$m\leqslant a_n\leqslant M$$

则称m为数列$\{a_n\}$的一个下界，M为$\{a_n\}$的一个上界。

显然，有界数列的上界和下界都是不唯一的.

（iii）无界数列：若对于任意正数M，总存在某个自然数n_0，使得

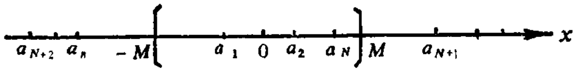
$$|a_{n_0}|>M$$

则称数列$\{a_n\}$为无界数列。

说明：1° 描述数列有界和无界时，加着重号的对偶形式值得注意，在叙述互相矛盾的两个概念时经常使用.

2° 在有界数列和无界数列的定义中都有一个正数M，但应注意两者对M的要求不同.有界数列要求M存在，它是一个"充分大"的数.有界数列的界数M本来有无穷多个，但只要找到一个就可以了.而无界数列要求M是任意数，它是一个"任意大"的数.在有界数列和无界数列的定义中对n的要求也不一样.有界数列的n是个"任意的"自然数，无界数列的n_0是一个"充分大"的自然数.对于"任意"和"充分"必须正确理解，仔细体会它们的区别.所谓任意大（小）的数，是指可以随便取多么大（小）的数，对于它的大小不得附加任何限制；而充分大（小）的数是指足够大（小）的数，在具体问题中有一定的标准，达到这个标准就是充分大（小）了.

3° 数列$\{a_n\}$无界的几何意义是：数轴上任何一个以原点为中心的闭区间之外都有对应于$\{a_n\}$的无穷多个点（图1.3）.



图（1.3）

1.2 数列的极限

数列的极限反映了n无限增大时，数列一般项a_n变化的趋势。按a_n的变化趋势，数列可分为以下三类：

第一，a_n的数值无限地趋近于某一常数A，例如数列（1）、（2）、（3）。

第二，a_n的绝对值$|a_n|$无限地增大，例如数列（4）。

第三，a_n的数值既不无限趋近于某一常数，而绝对值$|a_n|$又不无限地增大，例如数列（5）。

第一、二类数列有确定的变化规律，是我们要着重研究的数列。第一类数列称为有极限的数列，其极限为A。特别地，若$A=0$，即数列$\{a_n\}$的极限为零时，则称数列$\{a_n\}$为无穷小数列。第二类数列称为无穷大数列。

1。数列$\{a_n\}$以A为极限的定义　若对于任意正数ε（不论它多么小），总存在某个自然数N，使当$n>N$时，不等式

$$|a_n-A|<\varepsilon$$

恒成立，则称数列$\{a_n\}$以常数A为极限，或称数列$\{a_n\}$的极限为A，记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A$$

或

$$a_n\longrightarrow A\qquad(n\to\infty)$$

读作"当n趋向于无穷大时，a_n的极限是A"。符号"∞"表示"无穷大"，它仅仅是一个记号，不代表任何数，是用来表示变量变化趋势的。

说明：1° 上述定义通常称为数列极限的"$\varepsilon-N$定义"或"不等式定义"．它从数量关系上表达了"当n无限增大时，a_n无限地接近常数A"的含义．定义中的任意正数ε是用来刻划a_n与A的接近程度

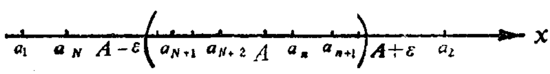
的. a_n趋近于A的过程是一个无限接近的过程，但这个过程的每一步又都是有限的.对于预先给定的正数ε来说，不等式$|a_n-A|<\varepsilon$正是表达了这种有限地接近程度.由于正数ε又是可以任意小的（定义中特意加上"无论它多么小"这几个字正是为了强调ε可任意小这一点），因此，就把a_n与A的有限接近转化为无限接近了.定义中的"N"用来刻划数列$\{a_n\}$的项数n应增大到什么程度时，不等式$|a_n-A|<\varepsilon$才能成立.数列$\{a_n\}$是否以A为极限，关键在于N的存在.数N是与ε相联系的，一般地说，当ε减小时，N将相应地增大.为了表明数N对ε的这种依赖关系，常记作$N=N(\varepsilon)$.对同一个正数ε，若存在自然数N，使当$n>N$时，恒有$|a_n-A|<\varepsilon$，则当$n>N+1$，$N+2$，…时，也必有$|a_n-A|<\varepsilon$，所以对给定的正数ε，与之对应的N是不唯一的.通常给定ε后找满足定义要求的N时，并不要求一定要找出最小的自然数N.

2° 按照定义，只要当$n>N$时，不等式$|a_n-A|<\varepsilon$成立，$\{a_n\}$就以A为极限，因此$\{a_n\}$是否以A为极限与数列$\{a_n\}$的前有限项（N项）无关.换句话说，数列$\{a_n\}$前有限项的数值并不影响它的极限值.因此在一个有极限的数列$\{a_n\}$中去掉或增加有限个项，它的极限值不变.

3° 数列$\{a_n\}$以A为极限的几何意义：由于不等式$|a_n-A|<\varepsilon$等价于

$$A-\varepsilon<a_n<A+\varepsilon$$

这表明数轴上对应于数列$\{a_n\}$各项的点除去有限个（N个）外，全部落在以A为中心以ε为半径的开区间$(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$内，$\varepsilon$越小，开区间也越小.若$\{a_n\}$以$A$为极限，则在数轴上对应于$\{a_n\}$的点$a_n$除去有限个外，全部聚集在点$A$附近（图1.4）.



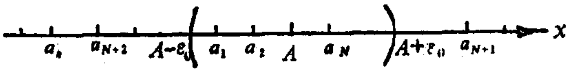
图（1.4）

4° 数列不以A为极限和数列以A为极限是互相矛盾的概念，因此，若存在某个正数ε_0，对于任意自然数N，都至少存在一个自然数$n_0>N$，使不等式

$$|a_{n_0}-A|\geqslant\varepsilon_0$$

成立，则称数列$\{a_n\}$不以A为极限.

该定义的几何意义是：在数轴上对应于$\{a_n\}$的点有无穷多个落在某个特定区间（$A-\varepsilon_0$，$A+\varepsilon_0$）之外（图1.5）.



图（1.5）

2. 数列$\{a_n\}$为无穷小数列的定义 若对于任意正数ε，总存在一个自然数N，使当$n>N$时，不等式

$$|a_n|<\varepsilon$$

恒成立，则称数列$\{a_n\}$为无穷小数列。

说明：1° 无穷小数列就是极限为零的数列，它是具有极限的数列的特殊情况.容易知道，若数列$\{a_n\}$以A为极限，则数列$\{a_n-A\}$，即

$$a_1-A,\ a_2-A,\ a_3-A,\ \cdots,\ a_n-A,\ \cdots$$

就是无穷小数列.无穷小数列是有极限的数列的基本类型.

2° 若把常数0看作为一个常数数列$\{0\}$，则无论预先给定怎样小的正数ε，对于一切的n，都有

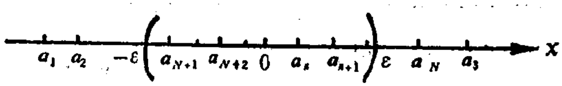
$$|a_n|=|0|=0<\varepsilon$$

因此，常数数列$\{0\}$是无穷小数列.由于无穷小数列$\{a_n\}$当n无限增大时，$|a_n|$可以小于任何一个预先给定的小正数，因此，除去数0以外的任何一个常数数列都不是无穷小数列.

3° 无穷小数列是指当n无限增大时，$|a_n|$可以无限地变小，而不是a_n的值无限变小.例如当n无限增大时，$a_n=-n$的值无限变小，但$|a_n|=n$却无限变大，因此数列$\{a_n=-n\}$不是无穷小数列。另外，

由数列的极限与其前有限项无关知，无穷小数列中的个别项可以是很大的数.

4° 无穷小数列的几何意义是：数轴上对应于无穷小数列$\{a_n\}$的点，除去有限个外，全部落在以原点为中心以ε为半径的开区间$(-\varepsilon,\ \varepsilon)$之内（图1.6）.



图（1.6）

3. 无穷大数列的定义 若对于任意正数M，总存在一个自然数N，使当$n>N$时，不等式

$$|a_n|>M$$

恒成立，则称数列$\{a_n\}$为无穷大数列，记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty \qquad 或 \qquad a_n\to\infty\ (n\to\infty)$$

说明：1° 按通常意义来说，无穷大数列$\{a_n\}$的极限是不存在的，但为了研究问题的方便，称其极限为“无穷大”，并采用极限的通常记法.

2° 定义中的M是用来描述$|a_n|$增大程度的，它的任意性是重要的.只有M是任意大的数，才能由不等式$|a_n|>M$反映出当n无限增大时，$|a_n|$无限制变大的意思.此外，正数M又是预先给定的，它与n无关.给定正数M之后，不等式$|a_n|>M$表达了$|a_n|$有限的增大程度，但M可以任意取，要多大就可以取多大，这样通过任取M，就可以把$|a_n|$的有限增大转变为无限地增大.定义从数量关系上反映了“$|a_n|$随n增大而无限增大”的实质，用有限的形式描述了$|a_n|$增大的无限过程.定义中的N用来描述数列项数的增大程度.数列$\{a_n\}$为无穷大数列，取决于任给正数M后，是否能找到自然数N，使当$n>N$时，恒有$|a_n|>M$.数N是和M相联系的，一般地，当M增大时，N将相应地增大.容易知道，若满足定义要求的N存在，则它不是唯一的.

3° 无穷大数列$\{a_n\}$并不要求a_n随着n的增大而单调增大，它不排除那种a_n的值忽大忽小，但总的说来$|a_n|$是无限增大的情形。例如数列$\{a_n=n+(-1)^n\}$就是一个无穷大数列，但它并非单调增大。由于无穷大数列只是要求当n充分大之后，绝对值$|a_n|$可以大于任给的正数M，因此无穷大数列中的个别项可以是很小的数。并且不难知道，任何常数数列都不是无穷大数列。

4° 若无穷大数列$\{a_n\}$的各项a_n（至少在若干项之后）只取正值或只取负值，则分别称之为正无穷大数列或负无穷大数列，并相应地记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$$

或者分别地简记为

$$a_n\to+\infty\ (n\to\infty) \quad 或 \quad a_n\to-\infty\ (n\to-\infty)$$

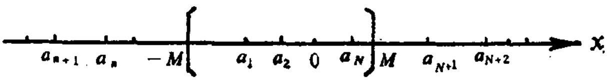
其中“$+\infty$”和“$-\infty$”分别读作“正无穷大”和“负无穷大”，它们和“∞”一样仅是一种记号而不是数。例如，数列$\{n\}$是正无穷大数列，数列$\{-n\}$是负无穷大数列，而数列$\{(-1)^n n\}$既非正无穷大数列又非负无穷大数列，但它们都是无穷大数列。

5° 由无穷大数列和无界数列的定义知，无穷大数列必为无界数列，但是无界数列不一定是无穷大数列，例如数列

$$1,\ 0,\ 2,\ 0,\ \cdots,\ n,\ 0,\ \cdots$$

是无界数列，但它不是无穷大数列

6° 数列$\{a_n\}$为无穷大数列的几何意义是数轴上对应于$\{a_n\}$的点除去有限个外，全部落在闭区间$[-M, M]$之外（图1.7）。



图（1.7）

数列极限和无穷大（小）数列的定义统称为数列极限的“$\varepsilon-N$定义”或“不等式定义”。它们是对数列变化趋势