科学通报

KEXUE TONGBAO

数学、物理学、化学专辑

1980

《科学通报》编辑委员会

主　编: 严济慈

副主编: 贝时璋　张文裕　李　苏　黄家驷　金善宝　尹赞勋　张光斗　王竹溪　吴文俊　叶再生　黄继武

委　员: (以姓名笔划为序)

马大猷　王之江　王大珩　王世强　王应睐　王梓坤　王绶琯　王葆仁
方励之　叶叔华　叶笃正　冯　康　卢佩章　卢衍豪　卢嘉锡　齐民友
孙艾玲　孙承谔　庄巧生　庄孝僡　朱既明　关肇直　刘恢先　刘静宜
汤定元　江泽涵　李　薰　李庆逵　李竞雄　李荫远　李肇特　张大煜
张文佑　张青莲　张柏荣　张香桐　张致一　张钰哲　陈世骧　陈庆宣
陈宗基　陈春先　吴中伦　吴仲华　吴守贤　吴金城　吴桓兴　沈　同
沈善炯　谷超豪　何泽慧　汪　猷　严东生　杨澄中　杨遵仪　周光召
金荫昌　林兰英　林自新　罗沛霖　邱式邦　邹承鲁　陆学善　郑万钧
胡　含　胡世华　段学复　施雅风　钟惠澜　娄成后　姚骏恩　唐有祺
唐敖庆　钱人元　钱　宁　钱令希　钱保功　高怡生　高景德　谈家桢
谈镐生　夏道行　涂光炽　顾功叙　殷宏章　黄　昆　黄汲清　黄秉维
龚　昇　龚祖同　崔　澂　陶亨咸　曾云鹗　曾呈奎　程民德　程绍迥
傅承义　彭桓武　慈云桂　裘维蕃　赫崇本

科学通报

一九八〇年　数学、物理学、化学专辑

编　辑	中国科学院 《科学通报》编辑委员会 北京朝阳门内大街137号
出　版	科学出版社 北京朝阳门内大街137号
印刷装订	中国科学院印刷厂
总发行处	新华书店北京发行所
订购处	全国各地新华书店
国外发行	中国国际书店 北京399信箱

一九八〇年十一月出版

统一书号：13031・1416　本社书号：1957・13-18

印数：1—6,980　定价：2.65元

科技新书目：175-14

71.
419

科学通报

数学、物理学、化学专辑

目　录

中国科学院xx大学图书馆 1981.2 图书馆藏

1108998

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

具有路长限制的顺序K分树

朱永津　　王建方
（中国科学院数学研究所）

Even[1] 曾研究过顺序K分树，介绍了它在编码理论中的作用．Glassey 和 Karp[2] 证明了 Huffman 算法对于K分树（没有顺序限制）也是适用的． 本文讨论具有路长限制的顺序K分树,给出了构造最优顺序K分树的算法,计算量为 $O(n^2L)$.

本文使用文献［1，3］的定义和符号．一个 l-限制 p-森林(简称 p-森林)是形式如下的 p 个 l-限制顺序K分树族：

$$F(l,i,j)=\{T(l,i,j_1),T(l,j_1+1,j_2),\cdots,T(l,j_{p-1}+1,j)\},$$

其中　$j-i+1\equiv p(\mathrm{mod}(K-1))$,

我们称 $\left[\frac{K}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{K+1}{2}\right]$ 为K的一次生成数;如果 q 是K的 α 次生成数，p 是 q 的一次生成数,则称 p 为K的 $\alpha+1$ 次生成数．我们规定 1 没有生成数．

一、算　　法

首先产生K的各次生成数（按定义算出来，相等的合并成一个），记为 $1=K_1<K_2<K_3<\cdots<K_t=\left[\frac{K+1}{2}\right]$． 对给定的正整数 L 和正数权的排列 $(P_1,P_2,\cdots,P_n)$（其中 $n\equiv 1(\mathrm{mod}(K-1))$）． 构造一个在排列 $(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 上的 L-限制顺序K分树的算法过程如下：

第 1 步(初始值)：对 $i=1,2,\cdots,n$ 和 $l=1,2,\cdots,L$，令

$$G(l,i,i)\leftarrow 0 \text{ 和 } d(l,i,i)\leftarrow i-1;$$

第 2 步（l 循环）：对 $l=1,2,\cdots,L$ 做第 3 步；

第 3 步（m 循环）:对 $m=0,1,2,\cdots,\frac{n-1}{K-1}$ 做第 4 步；

第 4 步（p 循环）：如果 $m\neq\frac{n-1}{K-1}$,则对 $p=K_1,K_2,\cdots,K_t$ 做第 5 步,否则对 $p=K_1$ 做第 5 步并终止算法；

第 5 步（i 循环）：对 $i=1,2,\cdots,n-(K-1)m-p+1$ 做第 6 步；

第 6 步(求 $G(l,i,j)$ 和 $d(l,i,j)$):令 $i+(K-1)m+p-1\rightarrow j$,如果 $p=1$，则做第 6(I) 步,否则做第 6(II) 步；

第 6(I) 步：令 $\left[\frac{K}{2}\right]\rightarrow q$.

本文 1978 年 5 月 13 日收到，1980 年 2 月 29 日收到修改稿.

1108998

如果 $l < \log_K(j-i+1)$，则 $G(l,i,j) \leftarrow \infty$，否则令

$$\min_{0\leqslant x\leqslant m}\left\{G(l-1,i,i+q-1+(K-1)x)+G(l-1,i+q+(K-1)x,j)+\sum_{y=i}^{j}P_y\right\}\rightarrow G(l,i,j)$$

和

$$\min\left\{\alpha=i+q-1+(K-1)x \mid G(l,i,j)=G(l-1,i,i+q-1+(K-1)x)\right.$$
$$\left.+G(l-1,i+q+(K-1)x,j)+\sum_{y=i}^{j}P_y\right\}\rightarrow d(l,i,j).$$

第 6(II) 步：令 $\left[\frac{p}{2}\right]\rightarrow q$，如果 $l<\log_K\left(\left[\frac{j-i+1}{p}\right]+1\right)$，则令

$$\infty\rightarrow G(l,i,j)，否则令$$

$$\min_{0\leqslant x\leqslant m}\{G(l,i,i+q-1+(K-1)x)+G(l,i+q+(K-1)x,j)\}\rightarrow G(l,i,j)$$

和

$$\min\{\alpha=i+q-1+(K-1)x \mid G(l,i,j)=G(l,i,i+q-1+(K-1)x)$$
$$+G(l,i+q+(K-1)x,j)\}\rightarrow d(l,i,j).$$

二、分界数定理

一个 p-森林的 p 个子树，把对应的排列分划成 p 个部分，由前 $p-1$ 个部分的每一个的最大指标，组成一个 $p-1$ 维向量，称这个向量为排列的一个分划向量. 对应于最优 l-限制 p-森林的分划向量被称为排列的分界向量. 在排列 $(P_i,P_{i+1},\cdots,P_j)$ 上的分界向量记为:

$$\boldsymbol{D}(l,i,j)=(d_1(l,i,j),d_2(l,i,j),\cdots,d_{p-1}(l,i,j)).$$

对维数相等的两个向量 $\boldsymbol{D}=(d_1,d_2,\cdots,d_t)$ 和 $\boldsymbol{D}'=(d_1',d_2',\cdots,d_t')$. $\boldsymbol{D}\leqslant\boldsymbol{D}'$ 意味着

$$d_q\leqslant d_q',\quad q=1,2\cdots,t.$$

设 $j-i+1\equiv p(\mathrm{mod}(K-1))$，当 $p\neq 1$ 时，如果 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_{p-1})$ 是对应一个 p-森林的分划向量，我们记

$$G_{\boldsymbol{A}}(l,i,j)=G(l,i,a_1)+G(l,a_1+1,a_2)+\cdots+G(l,a_{p-1}+1,j).$$

当 $p=1$ 时，如果 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_{K-1})$ 是对应一个树的分划向量，我们记

$$G_{\boldsymbol{A}}(l,i,j)=G(l-1,i,a_1)+G(l-1,a_1+1,a_2)+\cdots$$
$$+G(l-1,a_{k-1}+1,j)+\sum_{y=i}^{j}P_y.$$

引理 1 对任给正数权的排列 $(P_1,P_2,\cdots,P_n)$，对任意的 $i,j(i\leqslant j)$ 和 l，如果 $G(l,i,j)\neq+\infty$，则 $G(l,i,j)-G(l,i,j-K+1)\geqslant G(l,i+K-1,j)-G(l,i+K-1,j-K+1)$.

使用归纳法，证明思想与文献 [3] 中的引理 1 类似(略).

定理 1 如果 $G(l,i,j)\neq\infty$，则

$$\boldsymbol{D}(l,i,j-K+1)\leqslant\boldsymbol{D}(l,i,j)\leqslant\boldsymbol{D}(l,i+K-1,j).\tag{1}$$

证 用归纳法证明. 当 $p=2$ (即对 i_1 和 j_1，使得 $j_1-i_1+1\equiv 2(\mathrm{mod}(K-1))$.

给一个分划向量 $\boldsymbol{A}=(a)$,

$$f(a)=G_a(l,i_1,j_1)-G_a(l,i_1,j_1-K+1)$$
$$=G(l,a+1,j_1)-G(l,a+1,j_1-K+1),$$

由引理可知,当 a 增大时,函数 $f(a)$ 是非增的,故 $\boldsymbol{D}(l,i_1,j_1)\geqslant \boldsymbol{D}(l,i_1,j_1-K+1)$. 同理可证,$\boldsymbol{D}(l,i_1,j_1)\leqslant \boldsymbol{D}(l,i_1+K-1,j_1)$.

现在假设对 $p<m$,定理成立,我们来证明 $p=m$ 时,定理亦成立.

设 $\boldsymbol{D}(l,i,j-K+1)=(d_1,d_2,\cdots,d_{m-1})$,

$\boldsymbol{D}(l,i,j)=(d'_1,d'_2,\cdots,d'_{m-1})$,

给一个分划向量 $\boldsymbol{A}(l,i,j-K+1)=(a_1,a_2,\cdots,a_{m-1})=\boldsymbol{A}$,使得

$$d_q\geqslant a_q,\quad q=1,2,\cdots,m-1.$$

我们现在来证明函数 $f(a_1,a_2,\cdots,a_{m-1})=G_{\boldsymbol{A}}(l,i,j)-G_{\boldsymbol{A}}(l,i,j-K+1)$ 是非增的,当任意变量 a_q 增大时.

我们用归纳法来证明这一点. 首先对 a_{m-1} 增大时,函数 f 非增,由引理和下式立即可以得知这点:

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_{m-1})=G_{\boldsymbol{A}}(l,i,j)-G_{\boldsymbol{A}}(l,i,j-K+1)$$
$$=G(l,a_{m-1}+1,j)-G(l,a_{m-1}+1,j-K+1).$$

现在假设,对每个 $q>t$,当 a_q 增大时,函数 f 是非增的. 我们来证明当 a_t 增大时,函数 f 是非增的. 不失一般性,设 $t=1$.

设 $\boldsymbol{D}(l,a_1+1,j)=(\bar{d}_2,\bar{d}_3,\cdots,\bar{d}_{m-1})=\bar{\boldsymbol{D}}$,

$\boldsymbol{D}(l,a_1+1,j-K+1)=(\bar{\bar{d}}_2,\bar{\bar{d}}_3,\cdots,\bar{\bar{d}}_{m-1})=\bar{\bar{\boldsymbol{D}}}$.

由总的归纳假设,$\bar{d}_q\geqslant\bar{\bar{d}}_q$. $d_q\geqslant\bar{\bar{d}}_q$, $d'_q\geqslant\bar{d}_q$, $q=2,3,\cdots,m-1$. 记 $\bar{A}=(a_2,\cdots,a_{m-1})$,

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_{m-1})=G_A(l,i,j)-G_A(l,i,j-K+1)$$
$$=G_{\bar{A}}(l,a_1+1,j)-G_{\bar{A}}(l,a_1+1,j-K+1).$$

由后一层归纳假设,我们有

$$\begin{aligned}&G_{\bar{A}}(l,a_1+1,j)-G_{\bar{A}}(l,a_1+1,j-K+1)\\ &\geqslant G_{\bar{\bar{D}}}(l,a_1+1,j)-G_{\bar{\bar{D}}}(l,a_1+1,j-K+1)\\ &\geqslant G_{\bar{D}}(l,a_1+1,j)-G_{\bar{D}}(l,a_1+1,j-K+1)\\ &=G(l,a_1+1,\bar{d}_2)+\cdots+G(l,\bar{d}_{m-1}+1,j)\\ &\quad -G(l,a_1+1,\bar{\bar{d}}_2)-\cdots-G(l,\bar{\bar{d}}_{m-1},j-K+1).\end{aligned}$$

因为 $\bar{d}_2\geqslant\bar{\bar{d}}_2$,由引理 1 知,当 a_1 增大时,$G(l,a_1+1,\bar{d}_2)-G(l,a_1+1,\bar{\bar{d}}_2)$ 非增. 从而函数 $f(a_1,a_2,\cdots,a_{m-1})$ 非增,于是有 $\boldsymbol{D}(l,i,j)\geqslant\boldsymbol{D}(l,i,j-K+1)$.

同样可证 $\boldsymbol{D}(l,i,j)\leqslant\boldsymbol{D}(l,i+K-1,j)$. (证毕).

参 考 文 献

[1] Even, S., *Algorithm Combinatorics*, Macmillan Company, New York, 1973, 127—146.

[2] Glassey, C. R. & Karp, R. M., *Siam. J. Appl. Math.*, **31** (1976), 2.

[3] 朱永津、王建方,中国科学数学专辑 (I), 1979, 78.

一个富里埃系数级数收敛性的特征

杨 义 群

（浙 江 大 学）

本文设 $xg(x)\in L(0,\pi)$，对于实数 r 记

$$b_r(g)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\sin rx\,dx.$$

Boas[1] 曾证明

定理 A 当 $0\leqslant\alpha<1$ 时，假如

$$x^\alpha g(x)\in L(0,\pi), \tag{1}$$

那末级数 $\sum n^{-1-\alpha}b_n(g)$ 收敛.

定理 B 假如

$$g(x)x\ln x\in L(0,\pi), \tag{2}$$

那末级数

$$\sum n^{-2}b_n(g) \tag{3}$$

收敛.

最近 Дьяченко[2] 在 Ульянов 的指导下推广了上述结果.

为简单计，我们用记号 $f(x)\in CL$ 表示勒贝格积分 $\int_\varepsilon^\pi f(x)dx$ 在 $\varepsilon\to 0+$ 时收敛. 对于定理 A，我们早已证明(参见文献 [3])，条件 (1) 可减弱为 $x^\alpha g(x)\in CL$. 对于定理 B，本文不仅指出，条件 (2) 可减弱为

$$g(x)x\ln x\in CL, \tag{4}$$

而且给出了级数 (3) 收敛的充要条件. 由最末的附注可见，条件 (4) 还不是级数 (3) 收敛的必要条件.

定理 1 级数 (3) 收敛的充要条件是

$$\frac{1}{x}\int_0^x tg(t)\,dt\in CL. \tag{5}$$

为了证明定理，我们先引入一个引理. 记 $G(x)=\int_0^x(g(t)+a)\sin\frac{t}{2}\,dt$，其中 a 取得使 $G(\pi)=0$. 那末我们有

引理 1 级数 (3) 的收敛等价于级数 $\sum b_n(G)$ 的收敛.

证 由 $xg(x)\in L(0,\pi)$，对于任意实数 α 有

$$b_{r+\alpha}(g)-b_r(g)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)[\sin(r+\alpha)x-\sin rx]dx$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^\pi g(x)\sin\frac{\alpha}{2}x\cos\left(r+\frac{\alpha}{2}\right)xdx=o(1)\qquad(r\to+\infty), \tag{6}$$

及

本文 1978 年 6 月 16 日收到.

$$b_r(g)=\sum_{n=1}^{[r]}[b_n(g)-b_{n-1}(g)]+o(1)=o(r)\qquad(r\to+\infty).\tag{7}$$

再由

$$\begin{aligned}b_n(G)&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi G(x)\sin nx dx=\frac{2}{n\pi}\int_0^\pi[g(x)+a]\sin\frac{x}{2}\cos nx dx\\&=\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi g(x)\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right]dx+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\&=\frac{1}{2n}[b_{n+\frac{1}{2}}(g)-b_{n-\frac{1}{2}}(g)]+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}\tag{8}$$

利用 Abel 变换，可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^N b_n(G)&=\sum_{n=1}^N\frac{1}{2n}[b_{n+\frac{1}{2}}(g)-b_{n-\frac{1}{2}}(g)]+\sum_{n=1}^N O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1}b_{n+\frac{1}{2}}(g)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{2}b_{\frac{1}{2}}(g)+\frac{1}{2N}b_{N+\frac{1}{2}}(g)+\sum_{n=1}^N O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1}n^{-2}b_n(g)+\sum_{n=1}^N O\left(\frac{1}{n^2}\right)+o(1)\qquad(N\to+\infty).\end{aligned}$$

引理 1 证毕.

定理 1 的证明　先证必要性. 设级数 (3) 收敛，则由引理 1，级数 $\sum b_n(G)$ 收敛. 我们把 $G(x)$ 延拓为 $[-\pi,\pi]$ 上的奇函数. 基于 $G(\pi)=0$，再以 2π 为周期延拓 $G(x)$，便可得 $G(x)\in C_{2\pi}$. 记

$$G_1(x)=\int_0^x G(t)dt.$$

由于 $G_1'(x)=G(x)\in C_{2\pi}$，所以级数

$$G_1(x)=\sum_{n=1}^\infty\frac{b_n(G)}{n}(1-\cos nx)$$

匀敛，且对于 $\alpha\in(0,\pi)$ 成立着

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\pi\frac{G_1(x)}{x^2}dx&=\sum_{n=1}^\infty\frac{b_n(G)}{n}\int_\alpha^\pi\frac{1-\cos nx}{x^2}dx\\&=\sum_{n=1}^\infty b_n(G)\int_{n\alpha}^\infty\frac{1-\cos x}{x^2}dx-\sum_{n=1}^\infty b_n(G)\int_{n\pi}^\infty\frac{1-\cos x}{x^2}dx.\end{aligned}$$

因为 $\int_{n\alpha}^\infty\frac{1-\cos x}{x^2}dx$ 关于 n 及 α 单调且一致有界，所以上述级数收敛，从而有

$$x^{-2}G_1(x)\in CL.\tag{9}$$

利用分部积分法可知，(9) 式等价于 (5) 式.

现在证明充分性. 设条件 (5) 满足. 由引理 1，我们只要证明级数 $\sum b_n(G)$ 收敛. 先考察其部分和的算术平均，

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N\sum_{k=1}^n b_k(G)=\frac{N+1}{N\pi}\int_0^\pi G(x)\operatorname{ctg}\frac{x}{2}dx-\frac{1}{2N\pi}\int_0^\pi G(x)\frac{\sin(N+1)x}{\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}dx.\tag{10}$$

对于任意 $\alpha>0$，可把上式最末一个积分写成

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\int_0^\pi G(x)\frac{\sin(N+1)x}{\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}dx=\int_0^{1/N}+\int_{1/N}^\alpha+\int_\alpha^\pi\equiv I_1+I_2+I_3. \tag{11}$$

我们有

$$I_3=o(1)\qquad(N\to+\infty), \tag{12}$$

$$|I_2|\leqslant 8\max_{0\leqslant x\leqslant\alpha}|G(x)|\int_{1/N}^\alpha\frac{dx}{x^2}\leqslant 8N\max_{0\leqslant x\leqslant\alpha}|G(x)| \tag{13}$$

以及由积分第二中值定理

$$I_1=2(N+1)\int_0^\eta\frac{G(x)}{\sin\frac{x}{2}}dx=o(N)\qquad(N\to+\infty), \tag{14}$$

其中 $0<\eta<\frac{1}{N}$. 由 (10)—(14) 式以及 $\alpha>0$ 的任意性，级数 $\sum b_n(G)(c,1)$ 可和，再由 $b_n(G)=o\left(\frac{1}{n}\right)$ [见 (6) 及 (8) 式],可知级数 $\sum b_n(G)$ 收敛. 定理 1 证毕.

附注 条件 (4) 含有条件 (5). 另一方面，存在 $g(x)$ 使 $xg(x)\in L(0,\pi)$ 且条件 (5) 满足,而条件 (4) 不满足.

证 当条件 (4) 满足时,有

$$\int_0^x tg(t)\,dt=(\ln x)^{-1}\int_\eta^x g(t)\,t\ln t\,dt=o\left[\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{-1}\right]\qquad(x\to0+),$$

其中 $0<\eta<x$. 于是由

$$\int_\alpha^\pi x^{-1}\int_0^x tg(t)\,dt\,dx=(\ln x)\int_0^x tg(t)\,dt\Big|_{x=\alpha}^{\pi}-\int_\alpha^\pi g(x)x\ln x\,dx\qquad(\alpha>0),$$

可知条件 (5) 式也成立. 另一方面,若令

$$g(x)=\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin\left(\ln\frac{\pi}{x}\right)^\alpha}{\ln x}\right)\qquad(0<\alpha<1),$$

那末 $xg(x)\in L(0,\pi)$ 且满足 (5) 式,但条件 (4) 式不满足.

参 考 文 献

[1] Boas, R. P., *Tohoku Math. J.*, **14** (1962), 4:363—368.
[2] Дьяченко М. И., *Вестн. Моск. ун-та., Матем. механ.*, 1977, 4:18—27.
[3] 陈建功,数学进展, **8**(1965),4: 373—391.

一类特殊非线性方程组(II)

罗 佩 珠

(中国科学院系统科学研究所)

对一类特殊非线性偏微分方程组

$$\begin{cases} A_1p_1 + B_1q_1 + C_1p_2 + D_1q_2 + E_1 + N_1(p_1q_2 - p_2q_1) = 0, \\ A_2p_1 + B_2q_1 + C_2p_2 + D_2q_2 + E_2 + N_2(p_1q_2 - p_2q_1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, N_i$ 均为 x, y, u_1, u_2 的正规函数, $p_i = \frac{\partial u_i}{\partial x}$, $q_i = \frac{\partial u_i}{\partial y}$ $(i = 1, 2)$. 当考虑方程组 (1) 为双曲型方程组时, 在文献 [1] 中曾经用引入特征参量和化为标准方程组的方法证明了方程组 (1) 的 Cauchy 问题古典解的存在性和唯一性.

本文是解决方程组 (1) 的第三问题和第四问题.

一、方程组 (1) 的第三问题

考虑

$$\begin{cases} A_1p_1 + B_1q_1 + C_1p_2 + D_1q_2 + E_1 + N_1(p_1q_2 - p_2q_1) = 0, \\ A_2p_1 + B_2q_1 + C_2p_2 + D_2q_2 + E_2 + N_2(p_1q_2 - p_2q_1) = 0, \\ u_1|_{s_1} = \bar{u}_{10}(\tau), \\ u_2|_{s_2} = u_{20}(\tau). \end{cases} \tag{2}$$

其中 $s_1: x = x_{10}(\tau)$, $y = y_{10}(\tau)$ 为非特征,即其每点的切线方向与特征方向不重合, $s_2: x = x_{20}(\tau)$, $y = y_{20}(\tau)$, 由 $x_{20}(\tau)$, $y_{20}(\tau)$, $u_{20}(\tau)$ 定出 s_2 为方程组 (1) 的特征线, 有交点 o, s_1 在 o 点的两特征线的夹角之间.

引理 1 若在 o 点 $\begin{vmatrix} [BN][DN] \\ [NA][NC] \end{vmatrix} \neq 0$ ([ ]表示两行两列的行列式),则由 $x_{20}(\tau)$, $y_{20}(\tau)$, $u_{20}(\tau)$ 可定出 s_2 为方程组(1)的特征线.

引理 2 对特殊的定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} = 0, \\ u|_{\beta=\alpha} = u_0(\alpha), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial\beta}\right|_{\beta=\alpha} = \Psi(\alpha), \end{cases}$$

有解 $$u(\alpha,\beta) = u_0(\alpha) - \int_\beta^\alpha \Psi d\alpha.$$

本文 1978 年 7 月 20 日收到.

以下的讨论是在 o 点附近的邻域 $\Omega:\{|x-x^0|<\delta_1, |y-y^0|<\delta_1, |u_1-u_1^0|<\delta_1, |u_2-u_2^0|<\delta_1\}$ 中进行，其中 $\delta_1>0$ 充分小，我们得到

定理 1 设 1) 方程组 (1) 的系数和 $\bar{u}_{10}(\tau)$, $u_{20}(\tau)$ 为正规函数，s_1 为非特征，s_2 为特征，有交点 o，且 s_1 夹在 o 点的两特征方向之间，2) 在 Ω 上方程组(1)为双曲型，即 $\Delta|_\Omega>0$，3) $G|_\Omega \neq 0$，4) 在 Ω 上，$\begin{vmatrix}[BN][DN]\\ [NA][NC]\end{vmatrix} \neq 0$，则定解问题(2)在 s_1s_2 组成的角域 Ω_1（属于 Ω 内）上解，存在且唯一，其中

$$\Delta=([AD]+[BC]+[EN])^2-4([AC][BD]-[NC][BE]-[AN][DE]),$$

$$G=\begin{vmatrix}B_1dx-A_1dy-N_1du_2 & D_1dx-C_1dy+N_1du_1\\ B_2dx-A_2dy-N_2du_2 & D_2dx-C_2dy+N_2du_1\end{vmatrix}. \tag{3}$$

利用文献 [1] 中引入的 Hans Lewy 理论[2,3]，问题 (2) 化为求解定解问题

$$\begin{cases}[BN]\dfrac{\partial u_1}{\partial\alpha}+[DN]\dfrac{\partial u_2}{\partial\alpha}+[BD]\dfrac{\partial x}{\partial\alpha}+([EN]+\lambda_1)\dfrac{\partial y}{\partial\alpha}=0,\\ [NA]\dfrac{\partial u_1}{\partial\alpha}+[NC]\dfrac{\partial u_2}{\partial\alpha}+[AC]\dfrac{\partial y}{\partial\alpha}+\lambda_2\dfrac{\partial x}{\partial\alpha}=0,\\ [BN]\dfrac{\partial u_1}{\partial\beta}+[DN]\dfrac{\partial u_2}{\partial\beta}+[BD]\dfrac{\partial x}{\partial\beta}+([EN]+\lambda_2)\dfrac{\partial y}{\partial\beta}=0,\\ [NA]\dfrac{\partial u_1}{\partial\beta}+[NC]\dfrac{\partial u_2}{\partial\beta}+[AC]\dfrac{\partial y}{\partial\beta}+\lambda_1\dfrac{\partial x}{\partial\beta}=0,\\ x(\alpha,\beta)|_{\beta=0}=x_{20}(\alpha),\quad x(\alpha,\beta)|_{\beta=\alpha}=x_{10}(\alpha),\\ y(\alpha,\beta)|_{\beta=0}=y_{20}(\alpha),\quad y(\alpha,\beta)|_{\beta=\alpha}=y_{10}(\alpha),\\ u_1(\alpha,\beta)|_{\beta=0}=u_{10}(\alpha),\quad u_1(\alpha,\beta)|_{\beta=\alpha}=\bar{u}_{10}(\alpha),\\ u_2(\alpha,\beta)|_{\beta=0}=u_{20}(\alpha),\quad u_2(\alpha,\beta)|_{\beta=\alpha}=\Phi(\alpha),\end{cases} \tag{4}$$

其中 Φ 为待定函数.

由于定解问题 (4) 中的 1—4 式的系数行列式

$$\bar{\Delta}=-(\lambda_2-\lambda_1)^2\begin{vmatrix}[BN][DN]\\ [NA][NC]\end{vmatrix}\neq 0,$$

故定解问题 (4) 可化为求解如下的定解问题(记 $(x,y,u_1,u_2)=(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4)$).

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\omega_i}{\partial\alpha\partial\beta}+f_i=0,\\ \omega_1(\alpha,\beta)|_{\beta=0}=x_{20}(\alpha),\qquad \omega_j|_{\beta=\alpha}=\omega_{j0}(\alpha),\qquad \left.\dfrac{\partial\omega_i}{\partial\beta}\right|_{\beta=\alpha}=\Psi_i(\alpha),\\ \omega_2(\alpha,\beta)|_{\beta=0}=y_{20}(\alpha),\\ \omega_3(\alpha,\beta)|_{\beta=0}=u_{10}(\alpha),\qquad \omega_4|_{\beta=\alpha}=\Phi(\alpha),\\ \omega_4(\alpha,\beta)|_{\beta=0}=\omega_{40}(\alpha),\end{cases} \tag{5}$$

其中 $i=1,2,3,4$，$j=1,2,3$，Φ, Ψ_i 为待定函数，f_i 为12个变元的已知函数.

用引理 1 和 2，定解问题 (5) 可化为求解非线性 Volterra 型积分微分方程组的问题. 即求解

$$
\begin{cases}
\omega_i(\alpha,\beta)=\omega_{i0}(\alpha)-\int_\beta^\alpha \Psi_i(\xi)d\xi+\int_\beta^\alpha d\xi\int_\beta^\xi f_i d\eta \qquad (i=1,2,3), \\
\omega_4(\alpha,\beta)=\omega_{40}(\alpha)+\int_0^\beta \sum_{j=1}^{3} V_{4_j}(\Phi)\Psi_j d\xi+\int_\beta^\alpha d\xi\int_\beta^\xi f_4 d\eta, \\
\Phi(\alpha)=\omega_{40}(\alpha)+\int_0^\alpha \sum_{j=1}^{3} V_{4_j}(\Phi)\Psi_j d\xi-\int_0^\alpha d\xi\int_0^\xi f_4 d\eta,
\end{cases}
\tag{6}
$$

其中

$$\Psi_1(\alpha)=x'_{10}(\alpha)-x'_{20}(\alpha)+\int_0^\alpha f_1\Big|_{\xi=\alpha}d\eta,$$

$$\Psi_2(\alpha)=y'_{10}(\alpha)-y'_{20}(\alpha)+\int_0^\alpha f_2\Big|_{\xi=\alpha}d\eta,$$

$$\Psi_3(\alpha)=\bar{u}'_{10}(\alpha)-u'_{10}(\alpha)+\int_0^\alpha f_3\Big|_{\xi=\alpha}d\eta,$$

$$\Psi_4(\alpha)=V_{41}(\Phi)\Psi_1+V_{42}(\Phi)\Psi_2+V_{43}(\Phi)\Psi_3.$$

$$V_{41}=-\frac{[BD]}{[DN]}\Big|_{\beta=\alpha},\quad V_{42}=-\frac{([EN]+\lambda_2)}{[DN]}\Big|_{\beta=\alpha},\quad V_{43}=-\frac{[BN]}{[DN]}\Big|_{\beta=\alpha}.$$

由于 (6) 式可用熟知的压缩映象原理，在连续可微直到二阶微商有界的函数类中，用逐次逼近法求解．即 $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$ 存在且唯一，和文献 [1] 中一样，在 Ω 上 $x(\alpha,\beta)$，$y(\alpha,\beta)$ 可以反解得到 $\alpha(x,y)$，$\beta(x,y)$，代入到 $u_1(\alpha,\beta)$，$u_2(\alpha,\beta)$ 得到 $u_1(x,y)$，$u_2(x,y)$，此即为方程组 (1) 的第三问题的解．

二、方程组 (1) 的第四问题

考虑方程组 (2)，其中 $s_1{:}\,x=x_{10}(\tau)$，$y=y_{10}(\tau)$（或 $y=g_1(x)$），$s_2{:}\,x=x_{20}(\tau)$，$y=y_{20}(\tau)$（或 $y=g_2(x)$）均为非特征，有交点 o，并设

$$\lambda_2^0>g'_1(0)>g'_2(0)>\lambda_1^0.$$

λ_1^0，λ_2^0 为特征根在 o 点的值．

容易证明

引理 3 $\quad k(\alpha)=\int_0^\alpha \frac{g'_2x_\alpha-y_\alpha}{y_\beta-g'_2x_\beta}d\beta.$

我们得到

定理 2 设 1) 方程组 (1) 的系数和 $u_{10}(\tau)$，$u_{20}(\tau)$ 为正规函数，s_1，s_2 均为非特征，有交点 o，且 $\lambda_2^0>g'_1(0)>g'_2(0)>\lambda_1^0$，2) 在 Ω 上方程组 (1) 为双曲型，即 $\Delta|_\Omega>0$，3) $G|_\Omega\neq 0$，4) $\begin{vmatrix}[BN][DN]\\ [NA][NC]\end{vmatrix}_\Omega\neq 0$，则方程组 (1) 的第四问题在 s_1s_2 组成的角域 Ω_1（属于 Ω）解存在且唯一．

其证明方法和第一节完全类似，不过此时化为去求解 Volterra 型积分、微分、差分方程组．即求解

$$
\begin{cases}
\omega_i(\alpha,\beta) = \omega_{i0}(\alpha) - \int_\beta^\alpha \Psi_i d\xi + \int_\beta^\alpha d\xi \int_\beta^\xi f_i d\eta, \\
\omega_3(\alpha,\beta) = \omega_{30}(\alpha) - \int_\beta^\alpha \sum_{j=1}^2 L_{3j}(\Phi_2)\Psi_j d\xi + \int_\beta^\alpha d\zeta \int_\beta^\xi f_3 d\eta, \\
\omega_4(\alpha,\beta) = \omega_{40}(\alpha) + \int_{k(\alpha)}^\alpha \sum_{j=1}^2 L_{4j}(\Phi_2)\Psi_j d\zeta - \int_{k(\alpha)}^\alpha d\xi \int_{k(\alpha)}^\xi f_4 d\eta \\
\qquad - \int_\beta^\alpha \sum_{j=1}^2 L_{4j}(\Phi_2)\Psi_j d\xi + \int_\beta^\alpha d\xi \int_\beta^\xi f_4 d\eta, \\
\Psi_i(\alpha) - k'\Psi_i(k(\alpha)) = (\omega_i)'_{10} - (\omega_i)'_{20} + \int_{k(\alpha)}^\alpha f_i|_{\xi=\alpha} d\eta \\
\qquad - k' \int_{k(\alpha)}^\alpha f_i|_{\xi=k(\alpha)} d\eta, \\
\Phi_2(\alpha) = \omega_{40}(\alpha) + \int_{k(\alpha)}^\alpha \sum_{j=1}^2 L_{4j}(\Phi_2)\Psi_j d\xi - \int_{k(\alpha)}^\alpha d\xi \int_{k(\alpha)}^\xi f_4 d\eta, \\
k(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{g_2' x_\alpha - y_\alpha}{y_\beta - g_2' x_\beta} d\alpha,
\end{cases}
$$

$$i = 1, 2,$$

其中

$$\Psi_3(\alpha) = L_{31}(\Phi_2)\Psi_1 + L_{32}(\Phi_2)\Psi_2,$$

$$\Psi_4(\alpha) = L_{41}(\Phi_2)\Psi_1 + L_{42}(\Phi_2)\Psi_2,$$

$$L_{31} = -\left\{\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}[BD] & [DN] \\ \lambda_1 & [NC]\end{vmatrix}\right\}_{\beta=\alpha}, \quad L_{32} = -\left\{\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}[EN]+\lambda_2[DN] \\ [AC] & [NC]\end{vmatrix}\right\}_{\beta=\alpha},$$

$$L_{41} = -\left\{\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}[BN] & [BD] \\ [NA] & \lambda_1\end{vmatrix}\right\}_{\beta=\alpha}, \quad L_{42} = -\left\{\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}[BN] & [EN]+\lambda_2 \\ [NA] & [AC]\end{vmatrix}\right\}_{\beta=\alpha},$$

和第一节一样用压缩映象原理证明其解存在且唯一，从而方程组 (1) 的第四问题的解存在且唯一.

三、应　　用

例 1　二阶 Monge-Ampére 方程[4]

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

当其系数 H, K, L, M, N 仅为 $x, y,\ p = \frac{\partial\varphi}{\partial x},\ q = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ 的函数时，可以化为我们所考虑的方程组 (1)，故对这种方程当其为双曲型时，应用我们上面研究的结果得到其第三问题和第四问题的古典解存在且唯一. 此时

$$\begin{vmatrix}[BN] & [DN] \\ [NA] & [NC]\end{vmatrix} = N^2 \neq 0, \quad \lambda_i = -K \pm \sqrt{K^2 - (HL - MN)} \quad (i = 1, 2).$$

例 2　方程 $rt - s^2 + a^2 = 0 \quad (a \neq 0)$,

它对应于一阶组

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial x}=0, \\[2ex]
\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}\right]+a^2=0,
\end{cases}
$$

此时

$$
\begin{vmatrix} [BN] & [DN] \\ [NA] & [NC] \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \quad \lambda_i = \pm a \qquad (i=1,2).
$$

应用我们上面研究的结果,即得到它的第三问题和第四问题的古典解存在且唯一。

参　考　文　献

[1] 罗佩珠,数学学报, **14**(1964), 627—633.

[2] 吴新谋、丁夏畦,中国科学技术大学微分方程专门化讲义, 1963.

[3] Hadamard, J., *Le probléme de cauchy et les équation, aux dériveés partielles pineaires hyperboliques* Hermann et Cie, Paris, 1932.

[4] Curant-Hilbert, *Methods of Mathematic Physics*, Vol. II, 1962.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com