

科学通报

KEXUE TONGBAO

数学、物理学、化学专辑

1980

《科学通报》编辑委员会

主 编: 严济慈

副主编: 贝时璋 张文裕 李 苏 黄家驷 金善宝 尹赞勋 张光斗 王竹溪

吴文俊 叶再生 黄继武

委 员: (以姓名笔划为序)

马大猷	王之江	王大珩	王世强	王应睐	王梓坤	王绶琯	王葆仁
方励之	叶叔华	叶笃正	冯 康	卢佩章	卢衍豪	卢嘉锡	齐民友
孙艾玲	孙承谔	庄巧生	庄孝僊	朱既明	关肇直	刘恢先	刘静宜
汤定元	江泽涵	李 薰	李庆逵	李竞雄	李荫远	李肇特	张大煜
张文佑	张青莲	张柏荣	张香桐	张致一	张钰哲	陈世骧	陈庆宣
陈宗基	陈春先	吴中伦	吴仲华	吴守贤	吴金城	吴桓兴	沈 同
沈善炯	谷超豪	何泽慧	汪 猷	严东生	杨澄中	杨遵仪	周光召
金荫昌	林兰英	林自新	罗沛霖	邱式邦	邹承鲁	陆学善	郑万钧
胡 含	胡世华	段学复	施雅风	钟惠澜	姜成后	姚骏恩	唐有祺
唐敖庆	钱人元	钱 宁	钱令希	钱保功	高怡生	高景德	谈家桢
谈镐生	夏道行	涂光炽	顾功叙	殷宏章	黄 昆	黄汲清	黄秉维
龚 昇	龚祖同	崔 澂	陶亨咸	曾云鹗	曾呈奎	程民德	程绍迥
傅承义	彭桓武	慈云桂	裘维蕃	赫崇本			

科学通报

一九八〇年 数学、物理学、化学专辑

编 辑 中 国 科 学 院
《科学通报》编辑委员会
北京朝阳门内大街 137 号

出 版 科 学 出 版 社
北京朝阳门内大街 137 号

印刷装订 中国科学院印刷厂
总发行处 新华书店北京发行所
订购处 全国各地新华书店
国外发行 中国 国际 书 店
北京 399 信箱

一九八〇年十一月出版

统一书号: 13031·1416 本社书号: 1957·13-18

印数: 1—6,980 定价: 2.65 元

科技新书目: 175-14

科学通报

数学、物理学、化学专辑

目 录

具有路长限制的顺序 K 分树.....	朱永津 王建方	1
一个富里埃系数级数收敛性的特征.....	杨义群	4
一类特殊非线性方程组 (II).....	罗佩珠	7
实主三维子代数.....	陈仲沪	12
关于广义函数乘积的一些结果.....	李雅卿	16
$(0, 1)$ -矩阵类 $\mathfrak{M}(R, S)$	魏万迪	21
形式幂级数域上的微积分.....	李邦河	24
Martin 公理, CW 复形的可乘性与拟距离空间	周浩旋	27
不定尺度空间上的酉和自共轭算子.....	严绍宗	30
不分明单位区间的紧性的一个问题.....	刘应明	33
关于 Newton 方法的收敛域	王兴华	36
拟共形扩张的参数表示 (II).....	何成奇	38
Немыцкий 算子的若干性质	王声望	42
关于整函数的最大模及特征函数的增长性的比较.....	庄圻泰	46
有关星象函数的一族解析函数.....	吴卓人	50
再论一类数论函数值的分布问题.....	邵品臻	54
广义压缩和不动点定理.....	丁协平 张石生	57
关于拓扑动力系统的几个问题.....	张芷芬 丁同仁 黄文灶	62
数学规划相对最小解的稳定性.....	陈光亚	65
关于严志达图解的一点笔记.....	江家福	68
Goldbach 数	潘承洞	71
平面化图的哈密顿充要条件.....	陆生勋	74
关于 Hermite-Fejér 插值多项式的逼近阶.....	王斯雷	76
误差方差估计的不变原理.....	陈希孺	81
五次样条函数的导数界限.....	陈天平	86
关于随机变量独立性的一个问题.....	白志东 苏 淳 方开泰 陈培德	90
关于富里埃级数绝对收敛的 M. 和 S. Izumi 定理	王斯雷 施咸亮	93



一个 Diophantine 逼近定理	朱尧辰	99
位势理论平衡问题的推广	李志闻	101
纤维空间与纤维丛	周学光	105
最优搜索树的一个不等式	屠规彰	109
关于 Kähler 浸入的一点注记	陈志华	111
关于 S. R. Sinha 和 K. Prasad 的一个定理	施咸亮 陈全德	115
富里埃级数的蔡查罗平均与典型平均的逼近问题	郑士明	120
指数族分布参数的 MLE 的存在性和唯一性	成 平	123
以素数幂为模的一次同余方程组的转换定理	王连祥 任建华	127
非平稳高斯序列的最大项的极限定理	苏明礼	131
布尔函数对某一变量无关的条件	万哲先 戴宗铎	135
$c\bar{c}$ 矢介子对 $\Gamma(J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma)$ 贡献的估计	张鉴祖	138
棒旋星系的边值问题	陈振诚 翁士达 许 霖	142
稳定态线性积分 Boltzmann 方程的 Neumann 级数解	阳名珠 朱广田	147
用单路 10^{10} 瓦大功率激光加热固氘和氘化锂平面靶获得中子 中国科学院上海光学精密机械研究所激光核聚变实验室		151
多束激光辐照空心玻璃壳微球靶的实验研究 中国科学院上海光学精密机械研究所激光核聚变实验室		155
极值原理与迁移算子	阳名珠 朱广田	158
一个关于大变形的极限分析定理	薛大为	162
层子囚禁和核子颜色	王 凡 和 音	166
Higgs 机制的另一种表述形式	倪光炯 苏汝铿	169
多体系统中消除质心运动的方法	鲍诚光 赵维勤 朱熙泉	173
金属间化合物 CoAl 外层电子实验等密度曲线的分析 ——金属间化合物中存在共价键的直接证据	王奎雄 王兆民 陈雅符	176
e^+e^- 湮没中层子强子化产生喷注的模型	刘连寿 彭宏安	179
一个新的湍流扩散实验方法的探讨	谈 洪 王永光 乐 瑶 阎明山	183
一种可能的 $SU(5/1)$ 弱电统一模型	韩其智 俞允强 孙洪洲	186
平方律取样系统的两个法则	刘文生 李锦林	189
一种描述禁闭机制的古典场论	阮图南 陈 时 何祚庠	194
散斑运动规律应用于测量表面变形	伍小平 何世平 李志超	199
$PbFe_{12}O_{19}$ 单晶的层生长	刘寄浙 廖秉良	201
伸展无奇异四维膜单极——带 Higgs 场的半子——与禁闭 王 佩 李子平 侯伯元 侯伯宇		203
掺铁铈酸锂晶体的 X 射线形貌观察	郭常霖 黄月鸿	206
碳化硅多型体 $123R$ 和 $159R_0$ 的晶体结构	郭常霖	209
用液晶的多环芳烃气相色谱分离	戴乾圜 李惕川 黄煒孟 刘立群 李运香	212
场论在化学中的应用 ——螺旋性与开壳体系	赵学庄	215

碱金属助催的合成氨铁催化剂的研究

——EHMO 法计算七铁原子簇对氮分子的活化作用	忻新泉 朱龙根 孟庆金 张雪琴 戴安邦	217
二乙基二硫代氨基甲酸银 (Ag-DDC) 试剂应用于分光光度法测定微量 PH_3 的研究	胡慰望 谢笔钧	221
温和条件下二茂铁-活性炭-钾合成氨催化剂的研究	华 瑾 沈剑霞 魏秋峰	225
$\text{UO}_2^{2+}\text{-Fe(CN)}_6^{4-}\text{-AgCl}$ 体系环炉倍增反应的研究		
——大气及岩石中痕量铀的测定	章竹君	229
关于 Cu(II)-EDTA 催化释放反应的机理与空间位阻效应	姚守拙	233
固态金属氧化物生成反应平衡常数的熵法近似式	周振华	235
铟与铋的分离	宋玉林	238
高磁能 Fe-Cr-Co 变形永磁合金的研究	李东升 李云起 边树华	242
铝-铜合金中位错与溶质原子交互作用引起的振幅、时效和温度内耗峰		
	潘正良 王中光 孔庆虎 葛庭燧	246
共轭烃的离域能	杨丕鹏	249
铬的极谱催化波		
——饮用水中铬 (VI) 和铬 (III) 的测定	李南强 田晓娅 高小霞	253
硅氧烷化合物溶液中激基缔合物 (Excimer) 形成的研究	吴世康 姜永才	256
表面活性物质溶液胶囊形成过程中激基缔合物 (Excimer) 之形成	吴世康 姜永才	260
离子的晶格能参数	王忠录	264
1-苯基-3-甲基-4-苯甲酰基-吡唑酮-5 对稀土元素的萃取及固态络合物组成与性质的研究	刘建民 杨汝栋 马太儒	267
二环戊二烯基二 (邻甲苯基) 锆及其水解产物	陈寿山 王积涛	270
多元络合物显色反应的研究		
——钪-铬天青 S-溴化十六烷基吡啶-乙醇体系	慈云祥 赵玉珍 胡可人	272
不同键型化合物折射度的统一算法	杨 频	275
NaNO_2 晶体倍频效应的 EHMO 理论	陈创天 陈孝琛 刘执平	280
原子的近似波函数	李忠甫	284
锆和铪的二乙三胺五醋酸双核络合物的研究	黄春辉 李标国 周永芬 徐光宪	288
一级化学反应的图形理论	李根远	293
有机固体电导性的研究		
——侧链为 2-氨基吡啶季胺盐的共聚氯醇橡胶与 7,7,8,8-四腈代对苯醌二甲烷生成电荷转移复合物的研究	毕先同 姚幼新 钱人元	298
孔雀绿-碘化钾新萃取光度法测定铋 (III)	徐其亨 刘松愈 刘锦耀	302
某些 α -甲基吡啶氯代产物的气相色谱保留值与其分子结构间的关系		
	胡皆汉 张俊杰 张 凯	305
键参数 $f\left(\frac{z^2}{r}, \frac{z^*}{r_c}\right), f\left(\frac{z}{r}, \frac{z^*}{r_c}\right)$ 与硬软酸碱势标度		
——酸碱加合物亲强 P_{AB} 与金属络合物稳定常数 $\log K_1$	万嘉铸	312

一种新的选择性高的氧化试剂

——重铬酸三乙基苄基铵的合成及其应用	陈振初	黄 宪	316
络合物稳定常数的计算	温元凯	周志华 陆大洪 李振民	吴吉安 318
青岛近岸海水中碘含量的测定			
——应用催化法测定总碘量	陈德昌	唐思齐	323
双(三正丁基膦三烷基钴)与对苯醌的电子转移作用	汪汉卿	冯良波	陈英武 327
海水中元素的逗留时间	张正斌	刘莲生	331

具有路长限制的顺序K分树

朱永津 王建方

(中国科学院数学研究所)

Even^[1]曾研究过顺序K分树,介绍了它在编码理论中的作用。Glassey 和 Karp^[2]证明了 Huffman 算法对于K分树(没有顺序限制)也是适用的。本文讨论具有路长限制的顺序K分树,给出了构造最优顺序K分树的算法,计算量为 $O(n^2L)$ 。

本文使用文献[1, 3]的定义和符号。一个 l -限制 p -森林(简称 p -森林)是形式如下的 p 个 l -限制顺序K分树族:

$$F(l, i, j) = \{T(l, i, i_1), T(l, i_1 + 1, i_2), \dots, T(l, i_{p-1} + 1, j)\},$$

其中 $j - i + 1 \equiv p(\text{mod}(K - 1))$,

我们称 $\left\lfloor \frac{K}{2} \right\rfloor$ 和 $\left\lfloor \frac{K+1}{2} \right\rfloor$ 为K的一次生成数;如果 q 是K的 α 次生成数, p 是 q 的一次生成数,则称 p 为K的 $\alpha + 1$ 次生成数。我们规定1没有生成数。

一、算 法

首先产生K的各次生成数(按定义算出来,相等的合并成一个),记为 $1 = K_1 < K_2 < K_3 < \dots < K_i = \left\lfloor \frac{K+1}{2} \right\rfloor$ 。对给定的正整数 L 和正数权的排列 $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ (其中 $n \equiv 1(\text{mod}(K - 1))$)。构造一个在排列 $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 上的 L -限制顺序K分树的算法过程如下:

第1步(初始值): 对 $i = 1, 2, \dots, n$ 和 $l = 1, 2, \dots, L$, 令

$$G(l, i, i) \leftarrow 0 \text{ 和 } d(l, i, i) \leftarrow i - 1;$$

第2步(l 循环): 对 $l = 1, 2, \dots, L$ 做第3步;

第3步(m 循环): 对 $m = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-1}{K-1}$ 做第4步;

第4步(p 循环): 如果 $m \neq \frac{n-1}{K-1}$, 则对 $p = K_1, K_2, \dots, K_i$ 做第5步, 否则对 $p = K_1$ 做第5步并终止算法;

第5步(i 循环): 对 $i = 1, 2, \dots, n - (K - 1)m - p + 1$ 做第6步;

第6步(求 $G(l, i, j)$ 和 $d(l, i, j)$): 令 $i + (K - 1)m + p - 1 \rightarrow j$, 如果 $p = 1$, 则做第6(I)步, 否则做第6(II)步;

第6(I)步: 令 $\left\lfloor \frac{K}{2} \right\rfloor \rightarrow q$ 。

本文1978年5月13日收到, 1980年2月29日收到修改稿。

如果 $l < \log_K(j-i+1)$, 则 $G(l, i, j) \leftarrow \infty$, 否则令

$$\min_{0 \leq x \leq m} \left\{ G(l-1, i, i+q-1+(K-1)x) + G(l-1, i+q+(K-1)x, j) + \sum_{y=i}^j P_y \right\} \rightarrow G(l, i, j)$$

和

$$\min \left\{ \alpha = i + q - 1 + (K-1)x \mid G(l, i, j) = G(l-1, i, i+q-1+(K-1)x) \right. \\ \left. + G(l-1, i+q+(K-1)x, j) + \sum_{y=i}^j P_y \right\} \rightarrow d(l, i, j).$$

第 6(II) 步: 令 $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor \rightarrow q$, 如果 $l < \log_K \left(\left\lfloor \frac{j-i+1}{p} \right\rfloor + 1 \right)$, 则令

$\infty \rightarrow G(l, i, j)$, 否则令

$$\min_{0 \leq x \leq m} \{ G(l, i, i+q-1+(K-1)x) + G(l, i+q+(K-1)x, j) \} \rightarrow G(l, i, j)$$

和

$$\min \{ \alpha = i + q - 1 + (K-1)x \mid G(l, i, j) = G(l, i, i+q-1+(K-1)x) \\ + G(l, i+q+(K-1)x, j) \} \rightarrow d(l, i, j).$$

二、分界数定理

一个 p -森林的 p 个子树, 把对应的排列分划成 p 个部分, 由前 $p-1$ 个部分的每一个的最大指标, 组成一个 $p-1$ 维向量, 称这个向量为排列的一个分划向量. 对应于最优 l -限制 p -森林的分划向量被称为排列的分界向量. 在排列 $(P_i, P_{i+1}, \dots, P_j)$ 上的分界向量记为:

$$D(l, i, j) = (d_1(l, i, j), d_2(l, i, j), \dots, d_{p-1}(l, i, j)).$$

对维数相等的两个向量 $D = (d_1, d_2, \dots, d_t)$ 和 $D' = (d'_1, d'_2, \dots, d'_t)$. $D \leq D'$ 意味着

$$d_q \leq d'_q, \quad q = 1, 2, \dots, t.$$

设 $j-i+1 \equiv p \pmod{(K-1)}$, 当 $p \neq 1$ 时, 如果 $A = (a_1, a_2, \dots, a_{p-1})$ 是对应一个 p -森林的分划向量, 我们记

$$G_A(l, i, j) = G(l, i, a_1) + G(l, a_1+1, a_2) + \dots + G(l, a_{p-1}+1, j).$$

当 $p = 1$ 时, 如果 $A = (a_1, a_2, \dots, a_{K-1})$ 是对应一个树的分划向量, 我们记

$$G_A(l, i, j) = G(l-1, i, a_1) + G(l-1, a_1+1, a_2) + \dots$$

$$+ G(l-1, a_{K-1}+1, j) + \sum_{y=i}^j P_y.$$

引理 1 对任给正数权的排列 $(P_1, P_2, \dots, P_n)$, 对任意的 $i, j (i \leq j)$ 和 l , 如果 $G(l, i, j) \neq +\infty$, 则 $G(l, i, j) - G(l, i, j-K+1) \geq G(l, i+K-1, j) - G(l, i+K-1, j-K+1)$.

使用归纳法, 证明思想与文献 [3] 中的引理 1 类似(略).

定理 1 如果 $G(l, i, j) \neq \infty$, 则

$$D(l, i, j-K+1) \leq D(l, i, j) \leq D(l, i+K-1, j). \quad (1)$$

证 用归纳法证明. 当 $p = 2$ (即对 i_1 和 j_1 , 使得 $j_1 - i_1 + 1 \equiv 2 \pmod{(K-1)}$).

给一个分划向量 $A = (a)$,

$$\begin{aligned} f(a) &= G_a(l, i_1, j_1) - G_a(l, i_1, j_1 - K + 1) \\ &= G(l, a + 1, j_1) - G(l, a + 1, j_1 - K + 1), \end{aligned}$$

由引理可知, 当 a 增大时, 函数 $f(a)$ 是非增的, 故 $D(l, i_1, j_1) \geq D(l, i_1, j_1 - K + 1)$.
同理可证, $D(l, i_1, j_1) \leq D(l, i_1 + K - 1, j_1)$.

现在假设对 $p < m$, 定理成立, 我们来证明 $p = m$ 时, 定理亦成立.

设 $D(l, i, j - K + 1) = (d_1, d_2, \dots, d_{m-1})$,

$$D(l, i, j) = (d'_1, d'_2, \dots, d'_{m-1}),$$

给一个分划向量 $A(l, i, j - K + 1) = (a_1, a_2, \dots, a_{m-1}) = A$, 使得

$$d_q \geq a_q, \quad q = 1, 2, \dots, m-1.$$

我们现在来证明函数 $f(a_1, a_2, \dots, a_{m-1}) = G_A(l, i, j) - G_A(l, i, j - K + 1)$ 是非增的, 当任意变量 a_q 增大时.

我们用归纳法来证明这一点. 首先对 a_{m-1} 增大时, 函数 f 非增, 由引理和下式立即可以得知这点:

$$\begin{aligned} f(a_1, a_2, \dots, a_{m-1}) &= G_A(l, i, j) - G_A(l, i, j - K + 1) \\ &= G(l, a_{m-1} + 1, j) - G(l, a_{m-1} + 1, j - K + 1). \end{aligned}$$

现在假设, 对每个 $q > t$, 当 a_q 增大时, 函数 f 是非增的. 我们来证明当 a_t 增大时, 函数 f 是非增的. 不失一般性, 设 $t = 1$.

设 $D(l, a_1 + 1, j) = (\bar{d}_2, \bar{d}_3, \dots, \bar{d}_{m-1}) = \bar{D}$,

$$D(l, a_1 + 1, j - K + 1) = (\bar{d}_2, \bar{d}_3, \dots, \bar{d}_{m-1}) = \bar{D}.$$

由总的归纳假设, $\bar{d}_q \geq \bar{d}_q$, $d_q \geq \bar{d}_q$, $d'_q \geq \bar{d}_q$, $q = 2, 3, \dots, m-1$. 记 $\bar{A} = (a_2, \dots, a_{m-1})$,

$$\begin{aligned} f(a_1, a_2, \dots, a_{m-1}) &= G_A(l, i, j) - G_A(l, i, j - K + 1) \\ &= G_{\bar{A}}(l, a_1 + 1, j) - G_{\bar{A}}(l, a_1 + 1, j - K + 1). \end{aligned}$$

由后一层归纳假设, 我们有

$$\begin{aligned} &G_{\bar{A}}(l, a_1 + 1, j) - G_{\bar{A}}(l, a_1 + 1, j - K + 1) \\ &\geq G_{\bar{D}}(l, a_1 + 1, j) - G_{\bar{D}}(l, a_1 + 1, j - K + 1) \\ &\geq G_{\bar{D}}(l, a_1 + 1, j) - G_{\bar{D}}(l, a_1 + 1, j - K + 1) \\ &= G(l, a_1 + 1, \bar{d}_2) + \dots + G(l, \bar{d}_{m-1} + 1, j) \\ &\quad - G(l, a_1 + 1, \bar{d}_2) - \dots - G(l, \bar{d}_{m-1}, j - K + 1). \end{aligned}$$

因为 $\bar{d}_2 \geq \bar{d}_2$, 由引理 1 知, 当 a_1 增大时, $G(l, a_1 + 1, \bar{d}_2) - G(l, a_1 + 1, \bar{d}_2)$ 非增. 从而函数 $f(a_1, a_2, \dots, a_{m-1})$ 非增, 于是有 $D(l, i, j) \geq D(l, i, j - K + 1)$.

同样可证 $D(l, i, j) \leq D(l, i + K - 1, j)$. (证毕).

参 考 文 献

- [1] Even, S., *Algorithm Combinatorics*, Macmillan Company, New York, 1973, 127—146.
- [2] Glassey, C. R. & Karp, R. M., *Siam. J. Appl. Math.*, **31** (1976), 2.
- [3] 朱永津、王建方, 中国科学数学专辑 (I), 1979, 78.

一个富里埃系数级数收敛性的特征

杨 义 群

(浙 江 大 学)

本文设 $xg(x) \in L(0, \pi)$, 对于实数 r 记

$$b_r(g) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \sin rx dx.$$

Boas^[1] 曾证明

定理 A 当 $0 \leq \alpha < 1$ 时, 假如

$$x^\alpha g(x) \in L(0, \pi), \quad (1)$$

那末级数 $\sum n^{-1-\alpha} b_n(g)$ 收敛.

定理 B 假如

$$g(x)x \ln x \in L(0, \pi), \quad (2)$$

那末级数

$$\sum n^{-2} b_n(g) \quad (3)$$

收敛.

最近 Дьяченко^[2] 在 Ульянов 的指导下推广了上述结果.

为简单计, 我们用记号 $f(x) \in CL$ 表示勒贝格积分 $\int_\varepsilon^\pi f(x) dx$ 在 $\varepsilon \rightarrow 0+$ 时收敛. 对于定理 A, 我们早已证明(参见文献 [3]), 条件 (1) 可减弱为 $x^\alpha g(x) \in CL$. 对于定理 B, 本文不仅指出, 条件 (2) 可减弱为

$$g(x)x \ln x \in CL, \quad (4)$$

而且给出了级数 (3) 收敛的充要条件. 由最末的附注可见, 条件 (4) 还不是级数 (3) 收敛的必要条件.

定理 1 级数 (3) 收敛的充要条件是

$$\frac{1}{x} \int_0^x t g(t) dt \in CL. \quad (5)$$

为了证明定理, 我们先引入一个引理. 记 $G(x) = \int_0^x (g(t) + a) \sin \frac{t}{2} dt$, 其中 a 取得使 $G(\pi) = 0$. 那末我们有

引理 1 级数 (3) 的收敛等价于级数 $\sum b_n(G)$ 的收敛.

证 由 $xg(x) \in L(0, \pi)$, 对于任意实数 α 有

$$\begin{aligned} b_{r+\alpha}(g) - b_r(g) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) [\sin(r+\alpha)x - \sin rx] dx \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^\pi g(x) \sin \frac{\alpha}{2} x \cos \left(r + \frac{\alpha}{2} \right) x dx = o(1) \quad (r \rightarrow +\infty), \end{aligned} \quad (6)$$

及

本文 1978 年 6 月 16 日收到.

$$b_r(g) = \sum_{n=1}^{[r]} [b_n(g) - b_{n-1}(g)] + o(1) = o(r) \quad (r \rightarrow +\infty). \quad (7)$$

再由

$$\begin{aligned} b_n(G) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} G(x) \sin nx dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} [g(x) + a] \sin \frac{x}{2} \cos nx dx \\ &= \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} g(x) \left[\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x - \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) x \right] dx + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{2n} [b_{n+\frac{1}{2}}(g) - b_{n-\frac{1}{2}}(g)] + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned} \quad (8)$$

利用 Abel 变换, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N b_n(G) &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n} [b_{n+\frac{1}{2}}(g) - b_{n-\frac{1}{2}}(g)] + \sum_{n=1}^N O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} b_{n+\frac{1}{2}}(g) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{2} b_{\frac{1}{2}}(g) + \frac{1}{2N} b_{N+\frac{1}{2}}(g) + \sum_{n=1}^N O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} n^{-2} b_n(g) + \sum_{n=1}^N O\left(\frac{1}{n^2}\right) + o(1) \quad (N \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

引理 1 证毕.

定理 1 的证明 先证必要性. 设级数 (3) 收敛, 则由引理 1, 级数 $\sum b_n(G)$ 收敛. 我们把 $G(x)$ 延拓为 $[-\pi, \pi]$ 上的奇函数. 基于 $G(\pi) = 0$, 再以 2π 为周期延拓 $G(x)$, 便可得 $G(x) \in C_{2\pi}$. 记

$$G_1(x) = \int_0^x G(t) dt.$$

由于 $G_1'(x) = G(x) \in C_{2\pi}$, 所以级数

$$G_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(G)}{n} (1 - \cos nx)$$

一致收敛, 且对于 $\alpha \in (0, \pi)$ 成立着

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\pi} \frac{G_1(x)}{x^2} dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(G)}{n} \int_{\alpha}^{\pi} \frac{1 - \cos nx}{x^2} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(G) \int_{n\alpha}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx - \sum_{n=1}^{\infty} b_n(G) \int_{n\pi}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx. \end{aligned}$$

因为 $\int_{n\alpha}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ 关于 n 及 α 单调且一致有界, 所以上述级数收敛, 从而有

$$x^{-2} G_1(x) \in CL. \quad (9)$$

利用分部积分法可知, (9) 式等价于 (5) 式.

现在证明充分性. 设条件 (5) 满足. 由引理 1, 我们只要证明级数 $\sum b_n(G)$ 收敛. 先考察其部分和的算术平均,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^n b_k(G) = \frac{N+1}{N\pi} \int_0^{\pi} G(x) \operatorname{ctg} \frac{x}{2} dx - \frac{1}{2N\pi} \int_0^{\pi} G(x) \frac{\sin(N+1)x}{\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2} dx. \quad (10)$$

对于任意 $\alpha > 0$, 可把上式最末一个积分写成

$$\int_0^{\pi} G(x) \frac{\sin(N+1)x}{\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2} dx = \int_0^{1/N} + \int_{1/N}^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\pi} \equiv I_1 + I_2 + I_3. \quad (11)$$

我们有

$$I_3 = o(1) \quad (N \rightarrow +\infty), \quad (12)$$

$$|I_2| \leq 8 \max_{0 \leq x \leq \alpha} |G(x)| \int_{1/N}^{\alpha} \frac{dx}{x^2} \leq 8N \max_{0 \leq x \leq \alpha} |G(x)| \quad (13)$$

以及由积分第二中值定理

$$I_1 = 2(N+1) \int_0^{\eta} \frac{G(x)}{\sin \frac{x}{2}} dx = o(N) \quad (N \rightarrow +\infty), \quad (14)$$

其中 $0 < \eta < \frac{1}{N}$. 由 (10)–(14) 式以及 $\alpha > 0$ 的任意性, 级数 $\sum b_n(G)(c, 1)$ 可和, 再由 $b_n(G) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ [见 (6) 及 (8) 式], 可知级数 $\sum b_n(G)$ 收敛. 定理 1 证毕.

附注 条件 (4) 含有条件 (5). 另一方面, 存在 $g(x)$ 使 $xg(x) \in L(0, \pi)$ 且条件 (5) 满足, 而条件 (4) 不满足.

证 当条件 (4) 满足时, 有

$$\int_0^x \operatorname{tg}(t) dt = (\ln x)^{-1} \int_{\eta}^x g(t) t \ln t dt = o\left[\left(\ln \frac{1}{x}\right)^{-1}\right] \quad (x \rightarrow 0+),$$

其中 $0 < \eta < x$. 于是由

$$\int_{\alpha}^{\pi} x^{-1} \int_0^x \operatorname{tg}(t) dt dx = (\ln x) \int_0^x \operatorname{tg}(t) dt \Big|_{x=\alpha}^{\pi} - \int_{\alpha}^{\pi} g(x) x \ln x dx \quad (\alpha > 0),$$

可知条件 (5) 式也成立. 另一方面, 若令

$$g(x) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin\left(\ln \frac{\pi}{x}\right)^{\alpha}}{\ln x} \right) \quad (0 < \alpha < 1),$$

那末 $xg(x) \in L(0, \pi)$ 且满足 (5) 式, 但条件 (4) 式不满足.

参 考 文 献

- [1] Boas, R. P., *Tohoku Math. J.*, **14** (1962), 4:363–368.
- [2] Дьяченко М. И., *Вестн. Моск. ун-та., Матем. механ.*, 1977, 4:18–27.
- [3] 陈建功, 数学进展, **8**(1965), 4: 373–391.

一类特殊非线性方程组 (II)

罗佩珠

(中国科学院系统科学研究所)

对一类特殊非线性偏微分方程组

$$\begin{cases} A_1 p_1 + B_1 q_1 + C_1 p_2 + D_1 q_2 + E_1 + N_1(p_1 q_2 - p_2 q_1) = 0, \\ A_2 p_1 + B_2 q_1 + C_2 p_2 + D_2 q_2 + E_2 + N_2(p_1 q_2 - p_2 q_1) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, N_i$ 均为 x, y, u_1, u_2 的正规函数, $p_i = \frac{\partial u_i}{\partial x}, q_i = \frac{\partial u_i}{\partial y} (i = 1, 2)$. 当

考虑方程组 (1) 为双曲型方程组时, 在文献 [1] 中曾经用引入特征参量和化为标准方程组的方法证明了方程组 (1) 的 Cauchy 问题古典解的存在性和唯一性.

本文是解决方程组 (1) 的第三问题和第四问题.

一、方程组 (1) 的第三问题

考虑

$$\begin{cases} A_1 p_1 + B_1 q_1 + C_1 p_2 + D_1 q_2 + E_1 + N_1(p_1 q_2 - p_2 q_1) = 0, \\ A_2 p_1 + B_2 q_1 + C_2 p_2 + D_2 q_2 + E_2 + N_2(p_1 q_2 - p_2 q_1) = 0, \\ u_1|_{s_1} = \bar{u}_{10}(\tau), \\ u_2|_{s_2} = u_{20}(\tau). \end{cases} \quad (2)$$

其中 $s_1: x = x_{10}(\tau), y = y_{10}(\tau)$ 为非特征, 即其每点的切线方向与特征方向不重合, $s_2: x = x_{20}(\tau), y = y_{20}(\tau)$, 由 $x_{20}(\tau), y_{20}(\tau), u_{20}(\tau)$ 定出 s_2 为方程组 (1) 的特征线, 有交点 o , s_1 在 o 点的两特征线的夹角之间.

引理 1 若在 o 点 $\begin{vmatrix} [BN][DN] \\ [NA][NC] \end{vmatrix} \neq 0$ ($[]$ 表示两行两列的行列式), 则由 $x_{20}(\tau), y_{20}(\tau), u_{20}(\tau)$ 可定出 s_2 为方程组 (1) 的特征线.

引理 2 对特殊的定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} = 0, \\ u|_{\beta=\alpha} = u_0(\alpha), \\ \frac{\partial u}{\partial \beta}|_{\beta=\alpha} = \Psi(\alpha), \end{cases}$$

有解

$$u(\alpha, \beta) = u_0(\alpha) - \int_{\beta}^{\alpha} \Psi d\alpha.$$

本文 1978 年 7 月 20 日收到.

以下的讨论是在 o 点附近的邻域 $\Omega: \{|x - x^0| < \delta_1, |y - y^0| < \delta_1, |u_1 - u_1^0| < \delta_1, |u_2 - u_2^0| < \delta_1\}$ 中进行, 其中 $\delta_1 > 0$ 充分小, 我们得到

定理 1 设 1) 方程组 (1) 的系数和 $\bar{u}_{10}(\tau), u_{20}(\tau)$ 为正规函数, s_1 为非特征, s_2 为特征, 有交点 o , 且 s_1 夹在 o 点的两特征方向之间, 2) 在 Ω 上方程组 (1) 为双曲型, 即 $\Delta|_o > 0$, 3) $G|_o \neq 0$, 4) 在 Ω 上, $\begin{vmatrix} [BN][DN] \\ [NA][NC] \end{vmatrix} \neq 0$, 则定解问题 (2) 在 s_1, s_2 组成的角域 Ω_1 (属于 Ω 内) 上解, 存在且唯一, 其中

$$\Delta = ([AD] + [BC] + [EN])^2 - 4([AC][BD] - [NC][BE] - [AN][DE]),$$

$$G = \begin{vmatrix} B_1 dx - A_1 dy - N_1 du_2 & D_1 dx - C_1 dy + N_1 du_1 \\ B_2 dx - A_2 dy - N_2 du_2 & D_2 dx - C_2 dy + N_2 du_1 \end{vmatrix}. \quad (3)$$

利用文献 [1] 中引入的 Hans Lewy 理论^[2,3], 问题 (2) 化为求解定解问题

$$\begin{cases} [BN] \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + [DN] \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + [BD] \frac{\partial x}{\partial \alpha} + ([EN] + \lambda_1) \frac{\partial y}{\partial \alpha} = 0, \\ [NA] \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + [NC] \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + [AC] \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \lambda_2 \frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0, \\ [BN] \frac{\partial u_1}{\partial \beta} + [DN] \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + [BD] \frac{\partial x}{\partial \beta} + ([EN] + \lambda_2) \frac{\partial y}{\partial \beta} = 0, \\ [NA] \frac{\partial u_1}{\partial \beta} + [NC] \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + [AC] \frac{\partial y}{\partial \beta} + \lambda_1 \frac{\partial x}{\partial \beta} = 0, \\ x(\alpha, \beta)|_{\beta=0} = x_{20}(\alpha), \quad x(\alpha, \beta)|_{\beta=\alpha} = x_{10}(\alpha), \\ y(\alpha, \beta)|_{\beta=0} = y_{20}(\alpha), \quad y(\alpha, \beta)|_{\beta=\alpha} = y_{10}(\alpha), \\ u_1(\alpha, \beta)|_{\beta=0} = u_{10}(\alpha), \quad u_1(\alpha, \beta)|_{\beta=\alpha} = \bar{u}_{10}(\alpha), \\ u_2(\alpha, \beta)|_{\beta=0} = u_{20}(\alpha), \quad u_2(\alpha, \beta)|_{\beta=\alpha} = \Phi(\alpha), \end{cases} \quad (4)$$

其中 Φ 为待定函数.

由于定解问题 (4) 中的 1—4 式的系数行列式

$$\bar{\Delta} = -(\lambda_2 - \lambda_1)^2 \begin{vmatrix} [BN][DN] \\ [NA][NC] \end{vmatrix} \neq 0,$$

故定解问题 (4) 可化为求解如下的定解问题 (记 $(x, y, u_1, u_2) = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$).

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial \alpha \partial \beta} + f_i = 0, \\ \omega_1(\alpha, \beta)|_{\beta=0} = x_{20}(\alpha), \quad \omega_i|_{\beta=\alpha} = \omega_{i0}(\alpha), \quad \frac{\partial \omega_i}{\partial \beta}|_{\beta=\alpha} = \Psi_i(\alpha), \\ \omega_2(\alpha, \beta)|_{\beta=0} = y_{20}(\alpha), \\ \omega_3(\alpha, \beta)|_{\beta=0} = u_{10}(\alpha), \quad \omega_4|_{\beta=\alpha} = \Phi(\alpha), \\ \omega_4(\alpha, \beta)|_{\beta=0} = u_{20}(\alpha), \end{cases} \quad (5)$$

其中 $i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3, \Phi, \Psi_i$ 为待定函数, f_i 为 12 个变元的已知函数.

用引理 1 和 2, 定解问题 (5) 可化为求解非线性 Volterra 型积分微分方程组的问题. 即求解

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_i(\alpha, \beta) = \omega_{i0}(\alpha) - \int_{\beta}^{\alpha} \Psi_i(\xi) d\xi + \int_{\beta}^{\alpha} d\xi \int_{\beta}^{\xi} f_i d\eta \quad (i = 1, 2, 3), \\ \omega_4(\alpha, \beta) = \omega_{40}(\alpha) + \int_0^{\beta} \sum_{j=1}^3 V_{4j}(\Phi) \Psi_j d\xi + \int_{\beta}^{\alpha} d\xi \int_{\beta}^{\xi} f_4 d\eta, \\ \Phi(\alpha) = \omega_{40}(\alpha) + \int_0^{\alpha} \sum_{j=1}^3 V_{4j}(\Phi) \Psi_j d\xi - \int_0^{\alpha} d\xi \int_0^{\xi} f_4 d\eta, \end{array} \right. \quad (6)$$

其中

$$\Psi_1(\alpha) = x'_{10}(\alpha) - x'_{20}(\alpha) + \int_0^{\alpha} f_1 \Big|_{\xi=\alpha} d\eta,$$

$$\Psi_2(\alpha) = y'_{10}(\alpha) - y'_{20}(\alpha) + \int_0^{\alpha} f_2 \Big|_{\xi=\alpha} d\eta,$$

$$\Psi_3(\alpha) = \bar{u}'_{10}(\alpha) - u'_{10}(\alpha) + \int_0^{\alpha} f_3 \Big|_{\xi=\alpha} d\eta,$$

$$\Psi_4(\alpha) = V_{41}(\Phi) \Psi_1 + V_{42}(\Phi) \Psi_2 + V_{43}(\Phi) \Psi_3.$$

$$V_{41} = - \frac{[BD]}{[DN]} \Big|_{\beta=\alpha}, \quad V_{42} = - \frac{([EN] + \lambda_2)}{[DN]} \Big|_{\beta=\alpha}, \quad V_{43} = - \frac{[BN]}{[DN]} \Big|_{\beta=\alpha}.$$

由于(6)式可用熟知的压缩映象原理,在连续可微直到二阶微商有界的函数类中,用逐次逼近法求解.即 $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ 存在且唯一,和文献[1]中一样,在 $\mathcal{Q}$ 上 $x(\alpha, \beta)$, $y(\alpha, \beta)$ 可以反解得到 $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$,代入到 $u_1(\alpha, \beta)$, $u_2(\alpha, \beta)$ 得到 $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$,此即为方程组(1)的第三问题的解.

二、方程组(1)的第四问题

考虑方程组(2),其中 $s_1: x = x_{10}(\tau)$, $y = y_{10}(\tau)$ (或 $y = g_1(x)$), $s_2: x = x_{20}(\tau)$, $y = y_{20}(\tau)$ (或 $y = g_2(x)$)均为非特征,有交点 o ,并设

$$\lambda_2^0 > g'_1(0) > g'_2(0) > \lambda_1^0.$$

λ_1^0, λ_2^0 为特征根在 o 点的值.

容易证明

引理 3 $k(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{g'_2 x_{\alpha} - y_{\alpha}}{y_{\beta} - g'_2 x_{\beta}} d\beta.$

我们得到

定理 2 设1) 方程组(1)的系数和 $u_{10}(\tau)$, $u_{20}(\tau)$ 为正规函数, s_1, s_2 均为非特征,有交点 o ,且 $\lambda_2^0 > g'_1(0) > g'_2(0) > \lambda_1^0$, 2) 在 $\mathcal{Q}$ 上方程组(1)为双曲型,即 $\Delta|_{\mathcal{Q}} > 0$, 3) $G|_{\mathcal{Q}} \neq 0$,

4) $\frac{[BN][DN]}{[NA][NC]}|_{\mathcal{Q}} \neq 0$,则方程组(1)的第四问题在 $s_1 s_2$ 组成的角域 $\mathcal{Q}_1$ (属于 $\mathcal{Q}$)解存在且唯一.

其证明方法和第一节完全类似,不过此时化为去求解 Volterra 型积分、微分、差分方程组.即求解

$$\left\{ \begin{aligned}
\omega_i(\alpha, \beta) &= \omega_{i0}(\alpha) - \int_{\beta}^{\alpha} \Psi_i d\xi + \int_{\beta}^{\alpha} d\xi \int_{\beta}^{\xi} f_i d\eta, \\
\omega_3(\alpha, \beta) &= \omega_{30}(\alpha) - \int_{\beta}^{\alpha} \sum_{j=1}^2 L_{3j}(\Phi_2) \Psi_j d\xi + \int_{\beta}^{\alpha} d\xi \int_{\beta}^{\xi} f_3 d\eta, \\
\omega_4(\alpha, \beta) &= \omega_{40}(\alpha) + \int_{k(\alpha)}^{\alpha} \sum_{j=1}^2 L_{4j}(\Phi_2) \Psi_j d\xi - \int_{k(\alpha)}^{\alpha} d\xi \int_{k(\alpha)}^{\xi} f_4 d\eta \\
&\quad - \int_{\beta}^{\alpha} \sum_{j=1}^2 L_{4j}(\Phi_2) \Psi_j d\xi + \int_{\beta}^{\alpha} d\xi \int_{\beta}^{\xi} f_4 d\eta, \\
\Psi_i(\alpha) - k' \Psi_i(k(\alpha)) &= (\omega_i)'_{10} - (\omega_i)'_{20} + \int_{k(\alpha)}^{\alpha} f_i|_{\xi=\alpha} d\eta \\
&\quad - k' \int_{k(\alpha)}^{\alpha} f_i|_{\xi=k(\alpha)} d\eta, \\
\Phi_2(\alpha) &= \omega_{40}(\alpha) + \int_{k(\alpha)}^{\alpha} \sum_{j=1}^2 L_{4j}(\Phi_2) \Psi_j d\xi - \int_{k(\alpha)}^{\alpha} d\xi \int_{k(\alpha)}^{\xi} f_4 d\eta, \\
k(\alpha) &= \int_0^{\alpha} \frac{g_2' x_{\alpha} - y_{\alpha}}{y_{\beta} - g_2' x_{\beta}} d\alpha, \\
i &= 1, 2,
\end{aligned} \right.$$

其中

$$\Psi_3(\alpha) = L_{31}(\Phi_2) \Psi_1 + L_{32}(\Phi_2) \Psi_2,$$

$$\Psi_4(\alpha) = L_{41}(\Phi_2) \Psi_1 + L_{42}(\Phi_2) \Psi_2,$$

$$L_{31} = - \left\{ \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} [BD] & [DN] \\ \lambda_1 & [NC] \end{vmatrix} \right\}_{\beta=\alpha}, \quad L_{32} = - \left\{ \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} [EN] + \lambda_2 [DN] \\ [AC] & [NC] \end{vmatrix} \right\}_{\beta=\alpha},$$

$$L_{41} = - \left\{ \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} [BN] & [BD] \\ [NA] & \lambda_1 \end{vmatrix} \right\}_{\beta=\alpha}, \quad L_{42} = - \left\{ \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} [BN] & [EN] + \lambda_2 \\ [NA] & [AC] \end{vmatrix} \right\}_{\beta=\alpha}.$$

和第一节一样用压缩映象原理证明其解存在且唯一，从而方程组(1)的第四问题的解存在且唯一。

三、应 用

例1 二阶 Monge-Ampère 方程^[4]

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

当其系数 H, K, L, M, N 仅为 $x, y, p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ 的函数时，可以化为我们所考虑的方程组(1)，故对这种方程当其为双曲型时，应用我们上面研究的结果得到其第三问题和第四问题的古典解存在且唯一。此时

$$\left| \begin{vmatrix} [BN] & [DN] \\ [NA] & [NC] \end{vmatrix} \right| = N^2 \neq 0, \quad \lambda_i = -K \pm \sqrt{K^2 - (HL - MN)} \quad (i = 1, 2).$$

例2 方程 $rt - s^2 + a^2 = 0 \quad (a \neq 0)$,

它对应于一阶组

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right] + a^2 = 0, \end{cases}$$

此时

$$\begin{vmatrix} [BN] & [DN] \\ [NA] & [NC] \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \quad \lambda_i = \pm a \quad (i = 1, 2).$$

应用我们上面研究的结果,即得到它的第三问题和第四问题的古典解存在且唯一。

参 考 文 献

- [1] 罗佩珠, 数学学报, 14(1964), 627—633.
- [2] 吴新谋、丁夏娃, 中国科学技术大学微分方程专门化讲义, 1963.
- [3] Hadamard, J., *Le problème de cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques* Hermann et Cie, Paris, 1932.
- [4] Curant-Hilbert, *Methods of Mathematic Physics*, Vol. II, 1962.