# 最优化方法及实用程序

郑大素　江允正　编著
李范春　　　　主审

哈尔滨工程大学出版社

# 最优化方法及实用程序

郑大素　江允正　编著
李范春　　主审



哈尔滨工程大学出版社

## 内 容 简 介

本书介绍了计算机科学管理方法和现代工程设计方法及程序。书中详细讲解了常用的优化算法，包括线性规划的单纯形法、整数规划的分枝定界法、0－1规划的隐枚举法、分派问题的匈牙利法、线性目标规划法；非线性规划的有约束和无约束常用优化方法等。几乎每个算法都给出了计算机 FORTRAN 程序和详细的使用说明及应用实例，以便读者应用。书中有些程序是作者多年来教学和科研工作的结晶，程序中有许多重大改进，是市面上见不到的。

书中详细介绍了各种优化问题的建模方法，提供了大量的建模实例，并给出了优化过程的计算机图象显示程序。

本书谨献给既想了解又想使用优化技术解决实际问题的读者。

最优化方法及实用程序

郑大豪　江允正　编著

责任编辑：张　奎

*

哈尔滨工程大学出版社出版发行

新　华　书　店　经　销

哈 尔 滨 工 程 大 学 印 刷 厂

*

开本 787×1092 1/16　印张 17.5 字数 403 千字

1997 年 4 月第 1 版　　1997 年 4 月第 1 次印刷

印数：1－1 000 册

ISBN 7－81007－743－0

O·67　　定价：19.50 元

# 前　言

本书是为既想了解又想使用优化方法解决实际问题的读者而编写的。现在已出版的有关优化方法的书丛，如运筹学、线性规划、非线性规划、最优化方法、最优化技术等，有些考虑了数学上的严密性，理论上有很大的价值，但阅读起来比较困难，应用不方便；有些从实用出发为读者提供有用的工具，介绍了优化方法步骤，但书中却没提供源程序，只提供另外购买的程序包，这实际是个黑箱，使用时一旦出错，就无法处理；有些书有源程序，但由于排版打字印刷错误，书中的程序很少能在计算机上运行。对于想学、想用优化方法解决实际问题的读者，需要一本既有基本理论方法，又有能运行的实用程序的书，本书的目的就在于此。为了保证读者易懂，本书采用了大量的例题说明。为了保证程序不出错，采用了计算机源程序直接激光输出，不排版加工，避免中间环节出错而导致程序无法使用。

本书包含了作者多年来教学、科研的成果，部分程序有重大改进，为了让更多的读者掌握优化技术，现把程序无私地奉献给大家。

本书实用面广，书中提供的优化方法对各行各业，都是有利的工具。本书对推广应用优化方法贡献一份力量。我国在应用优化方法解决实际问题上，有很大的潜力，有着大批的各行各业人员，他们有专业知识，有数学基础。如果再把优化方法学到手，一定会在现有人力、物力、资源的条件下，创造出更大的经济效益。

本书第一章详细介绍了优化数学模型的建立。第二章至第四章介绍了解线性规划的单纯形法、整数规划的分枝定界法、0－1规划的隐枚举法、分派问题的匈牙利法、解多目标问题的线性目标规划的序贯法和多阶段算法，这些都属于线性目标函数在线性约束条件下的最优化方法。第五章至第七章介绍了非线性约束和无约束常用优化方法。第八章为优化实例。在附录部分提供了优化数学基础及显示优化过程图象的绘图程序。

本书第一、二、三、四章由郑大豪编著，其余四章和附录由江允正编著。全书由李范春主审。

限于水平，本书可能有错误和不妥之处，希望本书的读者指正。

作者

1996年12月

# 目　　录

## 第一篇　优化概述



## 第二篇　线性优化方法

## 第三篇　非线性优化方法



## 第四篇　优化方法的应用

# 第一篇　优化概述

## 第一章　最优化问题及优化数学模型与建模实例

### §1-1　引　　言

从古到今,人们无论做任何事情,总想从所有可行方案中,通过分析、判断比较,从中找出一种最理想的,即最佳方案来,这就是人们常说的最优化问题。

最优化问题普遍地存在于人类活动的各个领域、各行各业,范围之广、数量之多,难以一一列举,如营养学问题,确定什么样的食谱既能满足人们健康所需的要求,又使价格最便宜;在生产计划中,在一定人力、机器、原材料、资金条件下,如何安排生产,使生产成本达到最低;在农作物生产安排中,如何合理布局各种农作物,最佳地发挥地区优势、达到高产稳产,获得最大利润;在资源分配中,怎样分配有限资源,使得分配方案既能满足各项基本要求,又得到最大经济效益;在下料问题上,采取什么样的下料方式,才能使原材料消耗最少;在运输问题上,采用怎样的调运方案,方能在满足供求条件下,使总运费最省;在区域水质管理问题中,选取什么样的系统设计方案,使上水系统净水厂和下水系统污水处理厂,有最优处理能力,既使水质满足标准,又使处理费用最小;在配料问题中,如汽油的配料,食品中原料配比,动物饲料的配制,化工原料的配方等,如何确定各基本成分原料的数量,方能生产出一种既满足各项指标要求,又使成本达到最低的新产品;在广告宣传上,采取什么方式,使宣传面大而广告费用又最低;在产品设计中,选择什么样的设计参数,使设计的方案安全可靠,且重量最轻或成本最低;在新理论研究中,需要做实验,并且需用实验数据得到各参量之间定量关系式,这就是曲线拟合问题,即寻找一个关系式,使之和已知实验数据的误差越小越好等等,这些都是最优化问题。

人们探索解决最优化问题的途径,已有几个世纪之久,但是由于在电子数字计算机问世之前,因为没有一个强有力的计算工具,人们解决最优化问题的方法,只限于古典的微分法和变分法。这种方法解决的问题是十分有限的。直到 1946 年,大型电子数字计算机在美国宾州大学变成现实,这一年正好是一个有效的优化方法——解线性规划问题单纯形法创立的前一年,这样,用这个有效方法求解非常大型的现实生活中的优化问题,就有了实用工具。第一次成功地求解线性规划问题,是 1952 年在美国国家标准局的 SEAC 的计算机上实现的。这样,由于数字电子计算机的出现,求解优化问题有了有力的工具,从而又促进了优化理论和算法的迅速发展,形成了一门新学科。60 年代中期,优化方法才得以广泛推广。近三十年来,优化理论和方法在各个领域得到了广泛的应用。实践证明,优化设计的产品,可节省

材料10~40%。美国500家有财运的公司,85%的公司都曾应用了优化方法。一架高速运输机利用美国波音公司的一种优化程序,对其载重方案进行最优化选择,结果使载客人数从原来的192人增加到253人,即增加31%,这是一笔可观的财富。所以,任何试图盈利的企业,优化方法将为他们指出获得竞争优势的途径。

目前,我国微机逐渐普及到了千家万户,但一般经营管理及工程设计,还是采用着传统的方法,优化方法在广大管理人员和技术人员中,还没有普及。输入微机内的数据,是一笔很大的财富,如果能用优化方法处理,将会有助于一个单位、一个企业、一个公司有效地利用本单位资源,实施科学管理。用现代优化方法,进行科学管理、科学设计,将产生不可估量的经济效益。

优化方法是以优化理论为基础,借助电子计算机,自动完成对参数的调优,得到在一定条件下的最优方案。这种方法,可大大缩短选优方案的周期,提高设计质量,把人们从繁锁的计算中和大量的重复劳动中解放出来,去从事更有价值的创造性的工作。而传统的选优,往往是先凭经验,找出几种可行方案,然后,经过检验,从中选取较好的。这种方法往往得到的不是最优方案,因为,最优方案可能没在候选的可行方案之中。计算机的迅速发展,优化理论和方法的成熟,适用于电子计算机的各种数值计算方法的完善,这些都给采用优化方法的人员带来很大的方便。

## §1-2 最优化问题实例及优化常用术语

例1-1 某建筑公司签订一合同,要在12000m$^2$的土地上,建造两种规格住房。甲种每所占地1012m$^2$,乙种每所占地1617m$^2$,甲种限制不超过8所,乙种不超过4所,甲种住房每所可得利润1万元、乙种每所得利润2万元,问每种住房各建几所可获得最大利润?

解 设建造甲种、乙种规格住房的数目,分别为 $x_1$、$x_2$,我们可以把这个问题用数学形式表达如下

求 $x_1,x_2$,使利润达最大。即

$$\max Z = 1x_1 + 2x_2 \tag{1-1}$$

要求占地总面积不超过12000m$^2$,即

$$1012x_1 + 1617x_2 \leqslant 12000 \tag{1-2}$$

甲种、乙种住房数分别不超过8所和4所,即

$$x_1 \leqslant 8 \tag{1-3}$$

$$x_2 \leqslant 4 \tag{1-4}$$

住房数必须为正整数,即

$$x_1, x_2 \geqslant 0 \quad \text{且为整数} \tag{1-5}$$

例1-2 长期服用药物 $A$ 和 $B$,能治疗某种疾病,为了缩短治疗时间,某医生通过临床实验的数据,并用优化曲线拟合方法,得到治愈时间 $Z$ 与 $A$ 每天服用量 $x_1$ 和 $B$ 每天服用量 $x_2$ 之间关系为

$$Z = 53 + x_1^2 - 8x_1 + x_2^2 + 12x_2 - 0.10x_1x_2$$

服用 $A$,$B$ 药量每天不能超过7个单位,求每天服用药物 $A$、$B$ 量 $x_1$ 和 $x_2$ 各多少,才能

使治愈天数最少？

解　这个问题可用数学表达式描述如下：

求　$x_1, x_2$

使
$$\min Z = 53 + x_1^2 - 8x_1 + x_2^2 + 12x_2 - 0.10x_1x_2 \tag{1-6}$$
且满足
$$x_1 \leqslant 7 \tag{1-7}$$
$$x_2 \leqslant 7 \tag{1-8}$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

前面式中的 max 是英文极大化的简写，min 是极小化的简写。

例 1-3　将一根长 $L$ 的铁丝截成两段，一段弯成圆圈，另一段弯折成方形，问应以怎样的比例截断铁丝，才能使圆圈和方形的面积之和为最大？

解　设圆形的半径为 $x_1$，方形的长为 $x_2$，宽为 $x_3$。

由题意，该问题可用如下的数学表达式来描绘。

求　$x_1, x_2$ 和 $x_3$，使围成的面积之和最大。

即
$$\max Z = \pi x_1^2 + x_2x_3 \tag{1-9}$$
满足要求总长为 $L$，即
$$2\pi x_1 + 2(x_2 + x_3) = L \tag{1-10}$$

尺寸不能为负数，即
$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \tag{1-11}$$

则　两段比例 $K$ 为
$$K = \frac{2\pi x_1}{2(x_1 + x_2)}$$

使圆和方形围成面积之和为最大。

从以上三个实例可以看出，对一个实际问题进行优化，就是在一定限制条件下，选择适当的参数，使某项指标达到最优值(极大值或极小值)。在优化中常用到下面定义的一些优化常用术语。

**一、变量**

优化中要求的一些参数，在优化过程中可变化的一些参量称变量。如例 1-1 中甲、乙种住房的数量；例 1-2 中每天服用 $A$、$B$ 两种药的数量，例 1-3 中圆圈的半径，方形的长和宽，它们都是对优化追求目标有影响的参数，在经济管理问题中常把它们叫做决策变量，在工程设计中，常把它们叫设计变量，统称为变量。数学上，把它们用 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 一组数组成的向量 $\boldsymbol{X}$ 表示，即 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，$\boldsymbol{X}$ 是列向量，$T$ 表示转置(见附录优化数学基础)。$n$ 是设计变量个数，称维数，一个设计变量($n = 1$)的问题称一维优化问题，3 个设计变量($n = 3$)的问题称三维优化问题，以此类推。对不同的问题选取变量的内容是不一样的，变量选取越多，求解的难度就越大，选取变量的原则是变量之间要线性独立。

**二、目标函数**

所谓目标函数，是指优化中追求的目标，如利润最大、成本最低、体积最小、重量最轻，某项性能最佳等。目标函数是变量的函数，其数学表达式的形式为
$$Z = Z(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

或
$$F(\boldsymbol{X}) = F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

在例 1-1 中(1-1)式利润最大,在例 1-2 中(1-6)式治愈天数最少,在例 1-3 中(1-9)式面积之和最大,都是不同优化问题目标函数的具体形式。

只有一个目标的优化问题,称单目标优化问题;存在两个或两个以上目标函数的优化问题,称多目标优化问题。目标函数越多,评价的越周全,但计算也就越复杂。目标函数可以求极大,即max $Z$或 max $F(\boldsymbol{X})$,也可以求极小,即 min $Z$ 或 min $F(\boldsymbol{X})$。

**三、约束条件**

优化过程中必须满足或遵守的限制条件,称约束条件。如例 1-1 中(1-2)式至(1-5)式,例 1-2 中(1-7)式至(1-8),例 1-3 中(1-10)式至(1-11)式,都是约束条件。约束条件从数学形式上,可以分不等式约束和等式约束。

不等式约束的数学表达式为
$$g_j(\boldsymbol{X}) \geqslant 0$$
$$g_j(\boldsymbol{X}) \leqslant 0 \qquad (j = 1,2,\cdots,m)$$
等式约束的数学表达式为
$$h_L(\boldsymbol{X}) = 0 \qquad (L = 1,2,\cdots,p < n)$$
式中,$g_j(\boldsymbol{X})$,$h_L(\boldsymbol{X})$表示约束函数。$m$,$p$ 分别为不等式和等式约束的个数。约束条件用英语表示为 Subject to,简写为 s·t,表示受限于,或受约束于。

在确定约束条件时,要比一般常规设计考虑更多方面的要求,只要某种限制能用变量表示(包括近似表达式,经验公式),即可确定为约束条件,特别是对每个变量都给上、下限约束是完全可能的,实践证明也是有益的,当然不必要的约束,不仅是多余的,而且还影响最优结果的获得。

当约束条件的个数 $m = 0, p = 0$ 时,称无约束最优化问题,相反,称约束最优化问题。

变量(决策变量、设计变量)、目标函数、约束条件,是建立优化数学模型的三要素。

**四、等值面(线)、约束界面(线),可行域,可行点,可行方案**

1. 等值面(线)

具有同一函数值的点的集合称等值面(或线)。在等值面(线)上,函数有相同的值。例如目标函数 $F(\boldsymbol{X}) = 4x_1 + x_2$,我们可以在 $x_1Ox_2$ 坐标系中,画出其等值线。其作法是:先令 $F_1(\boldsymbol{X}) = 4x_1 + x_2 = C_1$($C_1$ 为任一常数,如 $C_1 = 4$),则取 $x_1 = 0$,得 $x_2 = 4$,在 $x_1Ox_2$ 坐标系上可确定一个点,再取 $x_2 = 0$ 得 $x_1 = 1$,又在坐标系中又得到一个点,把这两点用直线连起来,如图 1-1 所示。在这条直线上的所有点,都具有同一目标函数值 $F_1(\boldsymbol{X}) = 4$,因此,这条线就是该目标函数的等值线。同理,可取 $F_2(\boldsymbol{X}) = 8, F_3(\boldsymbol{X}) = 12$,等等,得到一系列等值线,称等值线族。因为该目标函数是变量的一次式,因此等值线族为一系列平行直线,如图 1-1。

又如,$F(\boldsymbol{X}) = x_1^2 + x_2^2$,目标函数为变量的二次式。与前面的办法相同,可令 $F(\boldsymbol{X})$ 分别等于常数 $C_1 < C_2 < C_3 \cdots$(令 $C_1 = 4, C_2 = 16$)可在 $x_1Ox_2$ 坐标系中画出一系列等值线,即为图 1-2 中所示的同心圆,其圆心为极小点 $X^*$。

由以上分析可以看出,等值线的分布情况反映了目标函数值的变化情况。等值线形象直观,在优化方法研究中有重要作用。

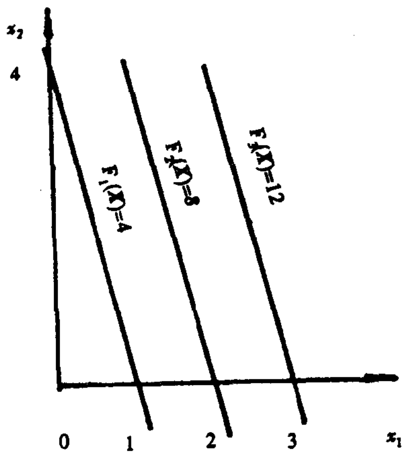


图 1－1

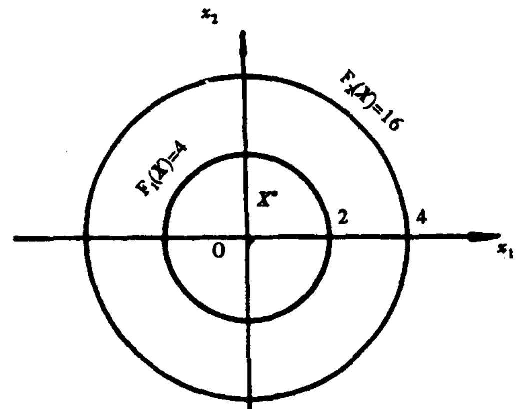


图 1－2

2. 约束界面(线)、可行域,可行点

如有两个约束条件 $g_1(X) = x_1 + x_2 - 1 \geqslant 0$ 和 $g_2(X) = 4 - (x_1^2 + x_2^2) \geqslant 0$ 需要满足,我们可直观地用图形表达这两个约束。首先考虑约束 $g_1(X) = x_1 + x_2 - 1 \geqslant 0$ 等于零的部分。$g_1(X) = x_1 + x_2 - 1 = 0$ 在 $x_1ox_2$ 坐标系上对应一条直线,如图 1－3 $g_1(X) = 0$,这条直线的右上部满足约束 $g_1(X) = x_1 + x_2 - 1 \geqslant 0$,左下方不满足 $g_1(X) \geqslant 0$ 约束,我们称 $g_1(X) = x_1 + x_2 - 1 = 0$ 的直线为约束界线。下面再考虑约束 $g_2(X) = 4 - (x_1^2 + x_2^2) \geqslant 0$ 的等于零的部分 $g_2(X) = 4 - (x_1^2 + x_2^2) = 0$,也可以得到一个约束界线 $g_2(X) = 0$,是半径为 2 的圆心在坐标原点的一个圆。通过考查,可知圆内部和圆周上点是满足 $g_2(X) \geqslant 0$ 约束的,同时满足这两个约束条件的区域称可行域,可行域内和边界上的点为可行点。图 1－3 中 $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$ 为可行点;不同时满足这两个约束的区域称非可行域,非可行域内的点为非可行点,如图 1－3 中 $X^{(4)}, X^{(5)}, X^{(6)}$。一个可行点对应一个可取的优化方案(但不一定是最优方案)。一个可行点的几何意义是从坐标原点出发的一个向量 $X^{(1)} = (x_1, x_2)^T$,也就是一个可取的优化可行方案可以用 $x_10x_2$ 坐标系中一个向量表示(如图 1－4)。如果一个可行方案为 $X^{(1)}$,另一改进的可行方案为 $X^{(2)}$,由向量加法可知(图 1－4)两者之间关系为

$$X^{(2)} = X^{(1)} + hS$$

式中　$h$ 称步长,$S$ 是单位方向向量。这个关系式将在非线性优化方法中用到。

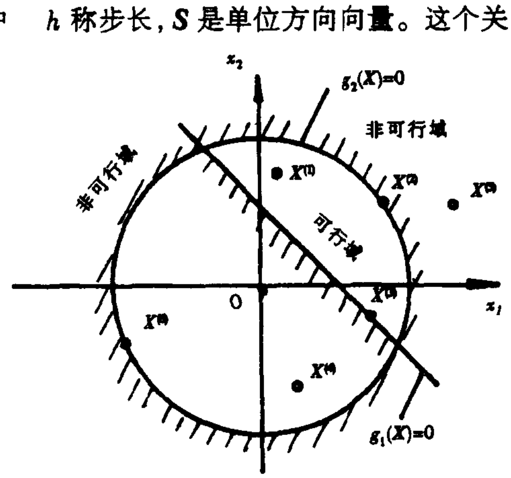


图 1－3

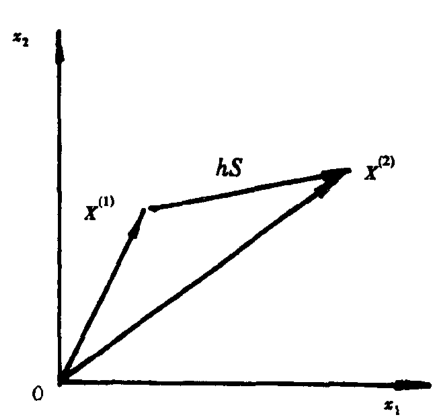


图 1－4

## §1－3 优化数学模型及建模实例

优化问题的数学模型，是实际问题的数学抽象，从数量上反映了研究对象有关参数及其相互关系。建立优化数学模型是优化设计的第一步，也是关键的一步，更是困难的一步。它要求人们具有专业知识，也要会抓主要矛盾。建立优化数学模型时，必须考虑哪些参数作为变量，受限于哪些约束条件，优化追求的目标函数是什么，这就是优化数学模型的三要素。用数学表达式表达上述内容，可写出优化数学模型的一般表达式为

求变量

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \tag{1－12}$$

使目标函数

$$Z \text{ 或 } F(X) \rightarrow \min \text{ 或} (\max)$$

写成

$$\min(\max)\ Z$$

或

$$\min(\max)\ F(X) \tag{1－13}$$

约束条件(或写成 s·t)

$$g_j(X) \geqslant 0 \quad (\text{或} \leqslant 0) \qquad j = (1,2,\cdots\cdots,m) \tag{1－14a}$$

$$h_L(X) = 0 \quad (L = 1,2,p < n) \tag{1－14b}$$

建立优化数学模型的步骤是：

1. 选取变量；
2. 恰当地表达目标函数；
3. 确定约束条件。

由实际问题抽象出优化数学模型，因问题不同而异，对不同领域内的具体问题，需要不同的专业知识，这是一项复杂而困难的工作，因实际应用领域太广，不能一一列举，只想通过一些示范性实例，给读者一些启示。

例 1－4 某房地产公司有水泥 100 吨，木材 160 吨和玻璃 410 吨，用以建造 $A$ 型和 $B$ 型住宅。建一栋 $A$ 型住宅需水泥 1 吨，木材 2 吨、玻璃 2 吨，每栋售价 100 万元。建一栋 $B$ 型住宅需水泥 1 吨，木材 1 吨，玻璃 5 吨，每栋售价 150 万元。该公司应如何安排两种住宅的建造数量，才能使总售价最高？试建立该问题的优化数学模型。

解 选取建造 $A$、$B$ 型住宅的栋数 $x_1$，$x_2$ 为决策变量。

目标函数是总售价最高，即

$$\max Z = 100x_1 + 150x_2$$

约束条件为水泥用量不超过 100 吨，即

$$x_1 + x_2 \leqslant 100$$

木材用量不超过 160 吨，即

$$2x_1 + x_2 \leqslant 160$$

玻璃用量不超过 410 吨，即

$$2x_1 + 5x_2 \leqslant 410$$

变量不能为负数，必须为整数

$$x_1, x_2 \geqslant 0 \quad 且为整数$$

综上所述，该问题的优化数学模型是

求 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2)^T$

$$\begin{aligned} \max Z &= 100x_1 + 150x_2 \\ \text{s} \cdot \text{t} \quad & x_1 + x_2 \leqslant 100 \\ & 2x_1 + x_2 \leqslant 160 \\ & 2x_1 + 5x_2 \leqslant 410 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \quad 且为整数 \end{aligned}$$

这个优化问题的目标函数和约束条件，都是变量 $x_1, x_2$ 的线性函数，则称这样的问题为线性规划问题。又因要求变量 $x_1, x_2$ 为非负整数，因此该问题是线性规划中的整数规划问题。

例 1-5 某项工程需成套横截面相同且长度不同的钢梁，每一套由 7 根 2 米长与 2 根 7 米长的钢梁组成。这些钢梁是由 15 米长的钢坯截下的，现生产 100 套钢梁，问应如何下料使用料最省，建立这一问题的优化数学模型。

解 每一根 15 米长的钢坯可能的下料方式有三种：第一种，在 15 米钢坯上截 7 根 2 米长的钢梁和 0 根 7 米长钢梁，剩料头 1 米。第二种，在 15 米钢坯上截 0 根 2 米的钢梁和 2 根 7 米的钢梁，剩料头 1 米。第三种，在 15 米钢坯上截 4 根 2 米的和 1 根 7 米的钢梁，无剩料。由题意知，生产 100 套钢梁需 $7 \times 100 = 700$ 根 2 米的钢梁和 $2 \times 100 = 200$ 根 7 米长的钢梁。

选取第一、第二、第三种下料方式分别需 15 米钢坯的根数 $x_1, x_2, x_3$ 为变量。

目标函数为需钢坯根数最少，即

$$\min Z = x_1 + x_2 + x_3$$

约束条件为 2 米长钢梁不能小于 700 根，7 米长的钢梁不小于 200 根，即

$$\begin{aligned} 7x_1 + 4x_3 &\geqslant 700 \\ 2x_1 + x_2 &\geqslant 200 \\ x_1, x_2, x_3 &\geqslant 0 \quad 为整数 \end{aligned}$$

该问题的化数学模型是

求 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, x_3)^T$

$$\begin{aligned} \min Z &= x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s} \cdot \text{t} \quad & 7x_1 + 4x_3 \geqslant 700 \\ & 2x_1 + x_2 \geqslant 200 \\ & x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \quad 且为整数，是下料最优化。\end{aligned}$$

例 1-6 某养鸡专业户养鸡 10000 只，用大豆和谷物混合饲料喂养，每天每只鸡平均吃混合饲料 0.5 公斤，要求其中至少含有 0.1 公斤蛋白质和 0.002 公斤钙。已知每公斤大豆中含 50%蛋白质和 0.5%的钙，每公斤价格为 1.00 元。每公斤谷物含有 10%蛋白质和 0.4%钙，每公斤价格是 0.30 元。粮食部门每周保证供应谷物饲料 25000 公斤。问应如何搭配两种饲料，才能使喂养成本最低(大豆供应不限量)。建立优化数学模型。

解 设每天每只鸡喂大豆 $x_1$ 公斤、谷物 $x_2$ 公斤。该问题的优化数学模型是

求 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2)^T$

$$\min Z = 1.00x_1 + 0.3x_2 \quad (\text{成本最低})$$

$$\text{s} \cdot \text{t} \quad 7 \times 10000x_2 \leqslant 25000 \quad (\text{谷物总量限制})$$

$$50\%x_1 + 10\%x_2 \geqslant 0.1 \quad (\text{蛋白质要求})$$

$$0.5\%x_1 + 0.4\%x_2 \geqslant 0.002 \quad (\text{含钙量要求})$$

$$x_1 + x_2 \leqslant 0.5 \quad (\text{每天饲料限量})$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0 \quad (\text{变量非负条件})$$

该问题是饲料配方最优化问题。因目标函数和约束条件均为变量 $x_1, x_2$ 的一次函数，因此，是线性规划问题。

例 1－7 研制两种添加剂对某化学过程生成物的影响，经过多次试验，确定了生成物数量 $Z$ 与两种添加剂加入量 $x_1$ 和 $x_2$ 的关系为

$$Z = 3850 - x_1^2 + 100x_1 - x_2^2 + 60x_2 + 0.1x_1x_2$$

从化学理论知，添加剂 $A$ 不允许超过 60 个单位，添加剂 $B$ 不允许超过 65 个单位。问加入 $A$、$B$ 各多少单位，才能使生成物最多？建立优化数学模型。

解 设 $x_1, x_2$ 分别为添加剂 $A$、$B$ 的加入量。根据题意，该问题的优化数学模型是

求 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2)^T$

$$\max Z = 3850 - x_1^2 + 100x_1 - x_2^2 + 60x_2 + 0.1x_1x_2$$

$$\text{s} \cdot \text{t} \quad x_1 \leqslant 60$$

$$x_2 \leqslant 65$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

该问题的目标函数是变量的二次函数，称非线性优化问题，也称非线性规划问题。

例 1－8 真实空气压力 $P$(atm，大气压)，摩尔容积 $V$($cm^3/g \cdot mol$，厘米$^3$/克·摩尔)和温度 $T$(K，开)三者之间的关系，可用半经验的雷德利克—夸思(Kedlick—Kwong)方程表示

$$P = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{T^{\frac{1}{2}} V(V + b)} \tag{1-15}$$

应用(1－15)式来表达二氧化碳气体的 $PVT$ 关系，通过实验测得 8 组数据，如表 1－1 所示。要求用这些数据确定出(1－15)式中的待定常数 $a$、$b$。

**表 1－1**

| 实验序号 | $P$(atm) | $V$($cm^3/g \cdot mol$) | $T$(K) |
|---|---|---|---|
| 1 | 33 | 500 | 273 |
| 2 | 43 | 500 | 323 |
| 3 | 45 | 600 | 373 |
| 4 | 26 | 700 | 273 |
| 5 | 27 | 600 | 323 |
| 6 | 39 | 700 | 373 |
| 7 | 38 | 400 | 273 |
| 8 | 63.6 | 400 | 373 |

解 这个问题是通过一组实验数据，来决定半理论公式中的一些未知参数 $a$ 和 $b$。$a$ 和 $b$ 的选取应该使半理论公式与已知数据拟合得越近越好，这类曲线拟合数据处理问题，实质

上是个最优化问题。

选取 $a, b$ 为变量，分别用 $x_1, x_2$ 表示。

取实验值与理论值之差的平方和最小为目标函数，即

$$\min Z = \sum_{i=1}^{8}\left[P_i - \frac{RT_i}{V_i - x_2} + \frac{x_1}{T_i^{\frac{1}{2}} V_i(V_i + x_2)}\right]^2$$

该问题的目标函数是变量 $x_1, x_2$ 的二次函数，且无约束条件，因此是无约束非线性优化问题。可选择后面要介绍的非线性无约束优化算法上机求得 $x_1, x_2$ 的最优值，即 $x_1^* = 6.377 \times 10^7, x_2^* = 29.7$，所以 $a = 6.377 \times 10^7, b = 29.7$

## §1-4 优化问题求解的步骤

具体问题用数学表达式描述，即建立优化数学模型之后，接下来的任务是求最优解。实质上，是求目标函数的极值。本书介绍的方法与微分法、变分法经典求极值方法有根本的差别，优化方法采用的是适应于电子计算机工作特点的迭代法。其基本思想是，从一个初始解(即初始方案)开始，构造一种使目标函数逐次下降(对于求极小)的逐次逼近，用电子计算机进行这种重复性的，有规律的迭代，这种迭代是一步步搜索，调优到达极小点的过程。

优化问题具体求解步骤是：

1. 根据实际问题，选取变量，建立目标函数，确定约束条件，建立优化数学模型。
2. 根据数学模型，判别是线性优化问题，还是非线性优化问题；是有约束优化问题，还是无约束优化问题；是单目标优化问题，还是多目标优化问题。以此来选择后面要介绍的相应的优化方法。
3. 编制程序，上机调试。
4. 以电子计算机为工具，求出最优解。
5. 对优化结果进行分析。

# 第二篇　线性优化方法

## 第二章　线性规划

### §2-1　引　　言

线性目标函数在线性约束条件下的最优化称线性规划。线性规划是第二次世界大战中,为了解决战中后勤供应问题而产生的。早期应用在军事上,1946 年大型电子数学计算机的问世,1947 年解线性规划的有效方法单纯形法的提出及初期成功的应用,使得能用线性规划解决问题的类型迅速地增加。例如在军事上,火箭点火的最优顺序和时间,导弹阵地的合理位置,军事指挥和控制中心的设计,空中和陆地雷达防卫系统的部署,警察巡逻路线等;在工业上,生产计划的制定,资源的合理分配,产品的经营管理,人员的培训计划等;造纸工业的配料,废纸的回收,纸张切边的浪费;在采矿业中,露天矿床的合理形状及开采顺序;在农林牧业中,农业合理种植计划,森林管理及砍伐策略;畜饲料的最优调配,化肥的合理混合;在交通运输业中,车辆、船只、飞机的最佳调度,人员的分配,载重最优分配,大修计划,交通信号计划,运输计划和路径,乘务员排班时间表,仓库的选址等;财政金融业中的有价证卷的选择,财政计划,资金预算,最优税收,资金合理利用等;商业外贸广告宣传的最优途径,合同的签订,销售网点,投资招商等;在环保业中,空气污染的监控,污水的处理,固体废料的收集和方式,水质的控制等;在医疗保健业中,社会保健服务系统区域保健中心的选址和人员配备,医生值班表;学校课表的最优安排,图书馆期刊的订阅,教师培训计划,讲课老师的最优分派;在电子电力业中,最优电路的设计,电网设计;在房地产业中,不同档次住宅的分配比例等等,都可用线性规划求解。可见线性规划应用领域范围有多么广,数量有多么大。在一些国家,线性规划几乎成为所有商业活动、工业生产和军事行动的一个重要组成部分。他们在设计和决策过程中,由于应用了线性规划,大大地节省了资金,收到了巨大的经济效益。曾有人估计,全世界的计算机约有 25% 是用于进行线性规划的计算的。可见,线性规划是现代科学管理方法的一个强有力的工具。

### §2-2　实例及数学模型的一般形式

**一、实例**

第一章中例 1-1,例 1-4,例 1-5,例 1-6 的目标函数和约束条件均是变量的一次函数,它们都是线性规划问题。下面再举几个实例。