中国科学院研究生教学丛书

数学物理中的渐近方法

李家春 周显初 编著

科学出版社

6

中国科学院研究生教学丛书

数学物理中的渐近方法

李家春　周显初　编著

科学出版社

1998

内 容 简 介

本书讲述渐近分析和摄动方法的基本理论，其中包括：渐近积分的Laplace方法、驻相法、最陡下降法、求微分方程渐近解的主项平衡法、WKB方法、摄动展开的PLK方法、匹配渐近展开法、多重尺度法等. 本书强调同科学研究和工程实践的结合，分别讨论了理论在波动、稳定性、流动问题中的应用. 书中还专门论述摄动级数改进的理论和实用方法. 本书是一本适合研究生使用的应用数学教材. 书中包括了作者多年的研究成果，可供力学、声学、光学、理论物理、大气动力学、物理海洋学、地球物理学、应用数学等专业的研究人员、工程师、高等学校的教师和高年级学生参考.

图书在版编目（CIP）数据

数学物理中的渐近方法/李家春，周显初编著.-北京：科学出版社，1998.2

（中国科学院研究生教学丛书/路甬祥，叶朝辉主编）

ISBN 7-03-006109-8

Ⅰ.数… Ⅱ.①李… ②周… Ⅲ.渐近方法-应用-数学物理方程 Ⅳ.O411.1

中国版本图书馆CIP数据核字（97）第11986号

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1998年2月第一版　开本：850×1168　1/32

1998年2月第一次印刷　印张：12⅜

印数：1—2 000　字数：324 000

定价：24.50元

《中国科学院研究生教学丛书》
序

在21世纪曙光初露，中国科技、教育面临重大改革和蓬勃发展之际，《中国科学院研究生教学丛书》——这套凝聚了中国科学院新老科学家、研究生导师们多年心血的研究生教材面世了. 相信这套丛书的出版，会在一定程度上缓解研究生教材不足的困难，对提高研究生教育质量起着积极的推动作用.

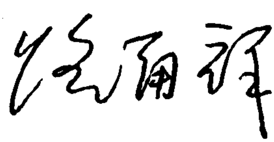
21世纪将是科学技术日新月异，迅猛发展的新世纪，科学技术将成为经济发展的最重要的资源和不竭的动力，成为经济和社会发展的首要推动力量. 世界各国之间综合国力的竞争，实质上是科技实力的竞争. 而一个国家科技实力的决定因素是它所拥有的科技人才的数量和质量. 我国要想在21世纪顺利地实施"科教兴国"和"可持续发展"战略，实现小平同志规划的第三步战略目标——把我国建设成中等发达国家，关键在于培养造就一支数量宏大、素质优良、结构合理，有能力参与国际竞争与合作的科技大军，这是摆在我国高等教育面前的一项十分繁重而光荣的战略任务.

中国科学院作为我国自然科学与高新技术的综合研究与发展中心，在建院之初就明确了出成果出人才并举的办院宗旨，长期坚持走科研与教育相结合的道路，发挥了高级科技专家多，科研条件好，科研水平高的优势，结合科研工作，积极培养研究生；在出成果的同时，为国家培养了数以万计的研究生. 当前，中国科学院正在按照江泽民同志关于中国科学院要努力建设好"三个基地"的指示，在建设具有国际先进水平的科学研究基地和促进高新技术产业发展基地的同时，加强研究生教育，努力建设好高级

人才培养基地，在肩负起发展我国科学技术及促进高新技术产业发展重任的同时,为国家源源不断地培养输送大批高级科技人才.

质量是研究生教育的生命，全面提高研究生培养质量是当前我国研究生教育的首要任务．研究生教材建设是提高研究生培养质量的一项重要的基础性工作．由于各种原因，目前我国研究生教材的建设滞后于研究生教育的发展．为了改变这种情况，中国科学院组织了一批在科学前沿工作，同时又具有相当教学经验的科学家撰写研究生教材，并以专项资金资助优秀的研究生教材的出版．希望通过数年努力，出版一套面向 21 世纪科技发展，体现中国科学院特色的高水平的研究生教学丛书．本丛书内容力求具有科学性、系统性和基础性，同时也兼顾前沿性，使阅读者不仅能获得相关学科的比较系统的科学基础知识，也能被引导进入当代科学研究的前沿．这套研究生教学丛书，不仅适合于在校研究生学习使用，也可以作为高校教师和专业研究人员工作和学习的参考书.

“桃李不言，下自成蹊.”我相信，通过中国科学院一批科学家的辛勤耕耘,《中国科学院研究生教学丛书》将成为我国研究生教育园地的一丛鲜花，也将似润物春雨，滋养莘莘学子的心田，把他们引向科学的殿堂，不仅为科学院，也为全国研究生教育的发展作出重要贡献.



目　　录

绪　　言

“数学物理中的渐近方法”是我们在研究生院开设的一门应用性较强的数学课程，也可以说是数学物理方法的续篇. 在现代科学研究中，主要是理论分析工作中，这类方法应用得相当普遍，它几乎已经成为力学、大气动力学、海洋动力学、声学、光学和其它物理专业研究人员必不可少的数学工具. 在近期文献中，使用这类方法来解决一些重大的基础理论和工程实际问题也并不罕见. 可以毫不夸张地说，如果不懂得这一方面的基本知识，从事上述领域的研究工作，阅读近期文献就会有一定困难. 然而，在我们的高等数学课程中，这些内容恰恰是被忽视了的，或者说是十分欠缺的，往往有这样的情况：一个学生成绩很好，但到了工作岗位遇到实际问题时却束手无策. 这不能不使人联想到高等学校的数学教学问题，似乎令人有科学研究与工程实际脱节之感. 为了使数学教学与今后的科学研究工作有机地衔接起来，我们准备用 80 学时的时间来讲授这门课程，并编写了这本教材.

在开始学习这门课程以前，我们首先要搞清这门课程的性质，根据我们的理解，从两个方面来说明这个问题：

1. 渐近分析是理论研究中进行近似计算有效方法

在科学研究的开始阶段，由于受到生产力发展，人的认识水平与数学工具的限制，人们往往仅局限于线性问题. 也就是说，迭加原理适用的那一类问题，经过近三百年的发展，对这类问题已经有一系列非常成熟的方法了. 即使如此，也只是对于一些理想化的问题 (简单几何形状，均匀各向同性介质) 才能获得少量的精确解. 在这些精确解中，还有相当一部分是用级数积分，特殊函数表达的. 研究人员为了要从中得到一些有用的科学结论，工程师为了要把结果用于具体的工程设计，就必须要依靠近似方法计算出具体的数值来，这是渐近分析的任务之一.

随着生产力发展的需要，人们必须深入到非线性问题的研究领域中去. 以力学学科为例，正如钱伟长教授在“关于非线性力学”一文中指出的，本世纪 40 年代人造纤维与塑料的问世 (它们的本构关系是非线性的)，航空工业采用薄的固体材料 (因而产生大变形)，飞机飞行速度要突破“声障” (跨声速方程)，这就是非线性力学出现的工业与生产背景. 在非线性领域中，还出现了许多线性问题中所没有发现的新现象：解对振幅的依赖关系；解的畸变；间断和孤立子现象；唯一性的破坏和对称的破缺 (分岔)；内在随机性 (混沌) 等等. 在这一领域中，由于叠加原理不适用了，原先那一套数学方法失效了，我们必须寻找新的途径. 渐近方法中的奇异摄动理论是解决弱非线性问题行之有效的手段之一. 它不仅可用于局部分析，有时亦可帮助我们了解全局行为. 航空航天事业的发展是一个最明显的例子，为了要计算升力与阻力，即便是今天对 Navier–Stokes 方程，用最先进的计算机求解完整飞机的绕流也是不可能的， Prandtl 的边界层理论 (1904)，升力线理论 (1925) 促进了航空工业的发展，这不能不归功于渐近分析，因此，边界层理论是渐近分析的范例.

当然，电子计算机的革命使数值模拟成为科学研究的重要途径，理论分析常常要与数值模拟方法结合起来解决某一具体问题. 但是，数值模拟不能完全代替理论分析. 相反地，只有在理论分析指导下的数值模拟，才能克服计算中遇到的有关收敛性、稳定性、奇异性的困难，才能得到一些真正有价值的结果. 何况，在某些场合，还非得用理论分析方法不可，譬如：要准确计算高速振荡的积分，计算光波的传播 (波长要比通常的特征长度短得多)，采用驻相法，几何光学近似可以有事半功倍之效.

有人以为近似解不如精确解好. 如果我们能做到这一点当然是好的. 从另一方面讲，我们在归纳数学问题时就或多或少地作了近似，我们的方程只是真实物理世界的近似描摹. 所以，求近似方程的精确解并不比求近似方程的近似解更有意义，只要我们能做到误差在工程允许范围内就可以了.

2. 渐近分析是应用数学的重要分支

自古以来, 数学的发展是与人类的生产实践活动紧密相关的. 即使到了 17 世纪牛顿时代, 纯粹数学与应用数学也没有明确的界限. 当时, 为了研究天体运行的规律, 迫切需要确定瞬时速度, 切线、弧长等概念, 因此, Newton, Leibniz 创立了微积分学. 在 Newton 的经典著作三卷本《自然哲学的数学原理》中, 数学理论是与解决质点运动、流体力学和潮汐等问题紧密联系的. 同样地, 当时变分法的出现是以力学中 Maupertuis 的最小作用量原理和光学中 Fermat 原理为动力的. 从 19 世纪起, 由于数学的严密化, 以 Bolzano,Cauchy 为代表的一批数学家开始用逻辑推理的方法来建立完整的体系, 出现了函数论和非欧几何的一些分支, 纯粹数学与应用数学开始分道扬镳了. 20 世纪, 由于数学研究对象的一般化, 在 Cantor 无限集合概念的基础上, 形成了近世代数, 拓扑学和泛函分析等现代数学分支. 为了说明应用数学特点, 我们用下面几个例子来说明:

1. 1807 年, Fourier 在《热的解析理论》一书中, 提出了一个解决数学物理问题的一般方法. 譬如: 对于热传导方程:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\qquad (0<x<\pi) \tag{1}$$

$$T(0,t)=T(\pi,t)=0 \tag{2}$$

$$T(x,0)=f(x) \tag{3}$$

它的解可表达成级数形式

$$T(x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}b_j\sin\ jxe^{-a^2j^2t} \tag{4}$$

式中, b_j 为 $f(x)$ 展开成正弦级数的 Fourier 系数:

$$b_j=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(\tau)\sin\ j\tau d\tau \tag{5}$$

虽然这种方法有很大实际意义, 法国科学院于 1812 年授于 Fourier 大奖. 但 Laplace, Legendre, Lagrange 却指责他在数学上不严格.

而恰恰也是 Fourier 的这种“不严格”的真知灼见是数学物理中的重要方法，而且为抽象的集合论， Hilbert 空间提供了理论基础. Lord Kelvin 称 Fourier 的这个发现为“最伟大的数学诗篇”.

2. 19 世纪下半叶，电机工程师 Heaviside 创立了一套符号法则来求解电工学中的微分方程，叫运算微积法. 他规定了符号 p 的代数运算与微分，积分运算间的对应关系：

$$p^n\widetilde{x} \Longleftrightarrow \frac{d^n}{dt^n}x \tag{6}$$

$$\frac{\widetilde{x}}{p^n} \Longleftrightarrow \int\int\int x\cdots dt \tag{7}$$

这样一来，解微分方程

$$\frac{dx}{dt} - x = 1 \tag{8}$$

就相当于解代数方程

$$(p-1)\widetilde{x} = 1 \tag{9}$$

即

$$\widetilde{x} = \frac{1}{p}(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots) \tag{10}$$

由于 $\dfrac{1}{p^n} \Longleftrightarrow \dfrac{t^n}{n!}$, 所以

$$x = t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots \tag{11}$$

这样就得到了方程 (8) 的解

$$x = e^t - 1 \tag{12}$$

这种方法既然没有考虑初始条件, 往往会导致错误的结果. 直到 1920 年，由 Bromwich 等人把复变函数中的积分变换方法同它联系起来以后，才使这种方法具备了坚实的理论基础.

3. 本世纪开始使用的 Dirac δ 函数也是为了研究物理问题中的集中现象的需要而产生的，直到 50 年代，才形成了分布与广义函数的理论.

所以，应用数学的首要特征是它同自然科学和工程实际的紧密联系．现在，它已渗透到经济学、生态学等更广泛的领域；其次是它不像纯粹数学那样靠逻辑推理来进行研究的，所以有一个从不严格到建立完整理论体系的过程．正如“一个不亲自检查桥梁每一部分坚固性就不过桥的旅行者不可能走远的”那样，在数学中，有些事情必须冒险，这就说明应用数学存在的必要性．为了防止出现偏差，我们有一个很好的检验可靠性方法，那就是同实验、同实际情况作比较．

现在，我们对什么是应用数学看得更清楚了．“应用数学是连接纯粹数学和科学技术的桥梁．”(W. Prager) 通过这座桥梁，一方面将来自生产实践的数学理论问题提供给纯粹数学家；另一方面，它将现有的数学研究成果应用于解决实际问题．这种比喻是非常恰当的．

根据应用数学的性质，应用数学工作者的任务是

(1) 用数学语言来归纳、描述科学问题；

(2) 用现有方法或创造新方法来解决数学问题；

(3) 阐释解的物理意义；

不要认为只是第二步才是重要的，第一、三两步既是必不可少，也不是轻而易举的．由于来源于某一学科的数学问题与其它学科的数学问题间具有很大的相似性，我们还要做最后一步工作，即

(4) 通过一般化，建立新的数学分支．

这本数学物理中的渐近方法，经过较长时间的发展，可以说达到第四步了，所以，它已有点同一般的数学课程相像了．但大家一定不要忘记它是从应用数学中刚刚脱胎出来的，它还带有应用数学的许多特征，所以，也一定要用研究应用数学的方法和观点来学习它．希望大家把重点放在了解出现这种数学理论的物理背景和应用这种方法的技巧上，而不要把重点放在过分地追究严格性和逻辑性上．每个读者要熟悉一门学科领域，并努力把学到的知识用到这一学科的科学研究中去．为了熟练运算技巧，多做一些习题也是十分

必要的. 复变函数与微分方程是学习这门课程所必备的基础知识.

目前，国际上有关渐近理论与摄动方法的书籍大体上有两类：一类以 Bender 和 Orszag 的高等应用数学方法 (1978) 和 Nayfeh 的摄动法 (1973) 为代表. 主要讨论数学方法和技巧，但一个明显的缺陷是没有使用有物理背景的实际例子，所以，对于从事物理领域研究的学生来说，由于不知问题如何归纳，方程如何导出，在科学研究中遇到实际问题往往仍然束手无策. 另一类是以 Van Dyke 的摄动法及其在流体力学中的应用 (1975) 为代表. 主要以物理问题为红线来讨论摄动方法. 这样做虽然比较直观，但数学理论不够系统与完整，没有讨论渐近分析，经验成分较多，不利于提高学生的数学理论基础. 本书的著者，统观了目前渐近方法的教学状况，在编写教材时，注意发扬本学科现有书籍的优点，弥补其不足，体现了理论与实用并重的特色：既然渐近分析已成为一门应用数学的分支学科，我们必须要注意理论的完整性，应尽量涉及有重要理论意义与实际应用的诸方面. 如：既讨论了渐近分析，又讨论了摄动法；既涉及积分的渐近展开，也涉及了方程 (包括微分与差分方程) 的渐近解；既进行局部分析，也进行全局分析；在研究级数求和时，补充了发散级数理论. 在必要的地方，必须有严格的证明，使学生注意理论的严谨性. 另一方面，我们又强调本学科的实用性. 所以，本书的安排是理论与应用部分相互交替的，所给出的例子不是抽象的，而是从实际问题中提炼出来的数学问题. 这样做，不仅使学生懂得了相关领域内的物理概念，如：色散，相速度和群速度，几何光学和物理光学，线性与非线性波，流动稳定性，量子力学等等. 还学会了如何直接将物理现象归纳成数学问题，并求分析解的方法. 本书无意灌输这一领域的全部知识，而将注意力放在培养学生分析能力上. 所以本书详略适度，在着重阐明本学科若干最基本的概念和方法后，对那些在学习本课程后，可以自学读懂的，非基本的内容，一概省略. 更重要的是，使学生学会处理非标准的，无准确解的数学物理问题的方法和哲理，以及求近似解和近似结果的技巧，从而

提高他们独立科学研究的能力.

“数学物理中的渐近方法”共分两大部分：第一部分是渐近分析，包括渐近级数，积分的渐近展开，微分方程的渐近解，WKB方法，级数的分析与改进等内容，除了WKB方法外，多数是属于局部分析的范畴. 第二部分是奇异摄动理论，这也是我国与华裔科学家作出过较大贡献的学科领域. 这一部分介绍了匹配渐近展开法，变形坐标法，多重尺度法，平均法等方面. 与第一部分不同的是，它是属于全局分析的范畴. 应用的领域涉及波动，稳定性，粘性流，气泡运动等方面. 本书将原讲义很多内容作了更新，尤其是包含了作者近十年来的研究工作新成果. 本书一至六章及第八章第五节，第九、十章由李家春撰写，第七、八章由周显初撰写. 其中的第七章是在戴世强教授准备的原讲义的有关章节基础上经较大修改而成，对此，本书作者谨致谢意.

我们还要特别感谢中国科学院研究生教材出版基金的资助，使本书得以出版.

我们开设这门课程和编写这份讲义都是带有探索性的，由于水平所限与经验不足，在取材和安排方面很可能不够恰当，错误疏漏之处也在所难免，希望读者提出批评和建议.

第一章　渐近级数

渐近级数的概念是由 Poincaré 和 Stieltjes 于 1886 年建立起来的，但在此以前，这类级数已被用于计算积分和求解微分方程. 在这一章里，我们首先介绍有关渐近级数的历史，然后，给出渐近级数的定义和性质. 我们强调指出了“渐近”和“收敛”这两个概念的区别.

1.1　引言

为了使大家有一个直观的概念，我们首先用一个具体的例子来说明渐近级数的实际用途. 譬如说，我们要计算零阶 Bessel 函数 $J_0(x)$ 的值，我们可以用幂级数方法求和，即

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \\ &= 1-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{64}x^4-\frac{1}{2304}x^6+\frac{1}{147456}x^8-\cdots \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

虽然级数 (1.1.1) 的收敛半径为 ∞, 但对于较大的 x, 该交错级数收敛得非常缓慢. 对于 $x=4$, 头三项逐渐增大，似乎像个发散级数. 为了准确到三位有效数字，至少要计算八项，$J_0(4)=-0.397$.

在实际上，对于大的 x, 我们可以用如下的渐近级数来进行计算：

$$J_0(x)\sim\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(1-\frac{(3!!)^2}{2!(8x)^2}+\frac{(7!!)^2}{4!(8x)^4}-\cdots\right)\cos\left(x+\frac{1}{4}\pi\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{8x}-\frac{(5!!)^2}{3!(8x)^3}+\frac{(9!!)^2}{5!(8x)^5}-\cdots\right)\sin\left(x-\frac{1}{4}\pi\right)\right]$$