高等结构力学丛书之一

结构随机振动

陈英俊　甘幼琛　于希哲

人民交通出版社

D 324

高等结构力学丛书之一

Jiegou Suiji Zhendong

结构随机振动

陈英俊　甘幼琛　于希哲

人民交通出版社

(京)新登字091号

内容提要

全书共分六章。前二章介绍与本学科直接有关的数学(随机过程)与力学(系统的动力特性)问题，第三、四章介绍离散系统与连续系统的随机振动，第五章介绍结构的非线性随机振动，包括动力稳定性，第六章结构动力可靠性理论，包括非线性结构与软化(劣化)结构。另外还结合工程实际，介绍了包括交通荷载、地震、风、波浪等随机激励所产生的结构响应与动力可靠度分析方法。介绍了大量的文献，以作为进一步研究的参考。

本书可供高等院校工民建、桥梁、水利、机械、航空、海洋工程等专业的研究生，有关大学师生，工程技术人员及科研人员使用和参考。

高等结构力学丛书之一
结构随机振动
陈英俊 甘幼琛 于希哲
责任编辑：丁[illegible] 封面设计：袁 毅
插图设计：王惠茹 正文设计：[illegible] 责任校对：杨 杰
人民交通出版社出版发行
(100013 北京和平里东街10号)
各地新华书店经销
北京交通印务实业公司印刷
开本：850×1168 1/32 印张：15.625 字数：408千
1993年6月 第1版
1993年6月 第1版 第1次印刷
印数：0001—3510 册 定价：20.00元
ISBN7-114-01552-6
O·00002

出 版 说 明

我社组织编写的“高等结构力学丛书”，包括（暂定名）：结构力学基础、拱结构的稳定与振动、曲线梁、结构动力学、随机振动、杆系结构稳定、板结构、壳结构、薄壁杆件、弹性工程力学、结构塑性分析、非线性结构分析、高层建筑结构分析、复合材料结构力学和结构优化设计等共15卷，将于1987年开始陆续出版。

参加丛书编写的教授、专家，都有较深的理论造诣和较丰富的教学或工程实践经验。丛书内容丰富，论述系统，可作为某学科的专业基础课或其他学科的选修课教材，可供有关专业的科研和工程技术人员参考使用，也可作为培养大学本科高年级学生智能的自学读物。

高等结构力学丛书

结构力学基础	王朝伟、李廉锟、缪加玉
拱结构的稳定与振动	项海帆、刘光栋
曲线梁	姚玲森
结构动力学	杨茀康
结构随机振动	陈英俊、甘幼琛、于希哲
杆系结构稳定	刘光栋、罗汉泉
板结构	黄与宏
壳结构	薛大为
薄壁杆件	陆　楸、汤国栋
弹性工程力学	何福照
结构塑性分析	熊祝华
非线性结构分析	万　虹、梅占馨
高层建筑结构分析	李君如、詹肖兰、欧阳炎
复合材料结构力学	蔡四维
结构优化设计	李炳威

序

结构力学是固体力学的一个分支。任何工程结构物的设计和建造，都会遇到结构力学问题。进入20世纪后，随着生产的发展和科学技术的进步，结构物的形式更加多样，受力体系更加复杂，这就要求有相应的理论分析方法和实用而有效的计算手段，编写高等结构力学丛书的着眼点即在于此。丛书在介绍力学的基本理论方面，重点突出了弹性理论和塑性理论。20世纪中期以后，复合材料结构和高层结构以及非线性结构的分析研究，取得了可喜的成果。随着电子计算机的广泛应用，在结构分析中普遍采用矩阵法，并进一步建立了有限元法。有了有限元法的分析方法和电子计算机的计算工具，人们便可以对工程结构物的设计由先设定结构方案，后进行综合考虑多方面的因素，以求得最优结构方案的设计，即所谓的结构优化设计。如上所述的有限元法和结构优化设计使结构力学走向计算机化，通称计算结构力学，从而开拓了新的结构力学领域。

本丛书在"结构力学基础"一卷里对杆系结构的经典理论先作概括性的论述，而后重点讲述分析杆系结构的矩阵方法和在电子计算机上实现该法的程序设计问题；在"高层建筑结构分析"一卷里也是在论述经典理论之后，主要讲述程序设计问题。经典的杆系结构和拱结构各设专卷讲述其稳定与振动；板壳结构中也都包括稳定与振动的论述。关于振动加"随机振动"，另有专卷论述。当代工程中遇到的曲线梁和薄壁杆件问题，亦有专卷论述，当代的复合材料结构和非线性结构的分析，以及结构优化设计，也都各列专卷。至于"有限无法"则另编一书以资配合。

对结构力学专业和各类结构工程专业的研究生来说，上述广

泛范围内的结构力学分支有些是必修的专业基础课程，如板、壳结构（包括稳定与振动）、结构的塑性分析和张量分析在弹性力学中的应用等课程中的一至二门；有些是不同专业的专门课程，如曲线梁、复合、高层、优化、非线性和随机振动等课程中的一门（根据研究方向所需的非力学课程不在此列）；还有些是需要开列出来由学生选修的课程。当然，反映当代力学计算方法的有限元法，包括加权残数法及其计算机程序设计也应是必修的。若采用各个分支的专著作教材，学时是不够的，适当精简内容以适应研究生学习的需要是我们编写这套丛书的第一个目的。

结构力学按专业来划分可分为：房屋结构力学、桥梁结构力学、隧道结构力学、飞机结构力学、车辆结构力学、船舶结构力学和水工结构力学等等。而这些不同专业的结构力学都有共同的基本理论。为各个专业的结构力学奠定共同的理论基础是我们编写这套丛书的第二个目的。

随着时代的推移，新的结构形式将不断涌现。工程师们为创造新的结构形式，往往需要广泛的结构力学知识，熟悉新结构的受力图式和掌握分析方法。为工程技术人员提供参考资料是我们编写这套丛书的第三个目的。

当今大学本科的结构力学教材所涉及的范围仅仅局限于杆系结构，有些内容需要提炼和概括以便增加课外阅读学时数；同时也有些内容（如稳定与振动）则需要抽出来单独设课。这是当前结构力学内容改革的趋向。丛书对杆系结构中的基本内容作了提炼和概括的尝试，以供学生参考；对于专题的内容则抽出来单独编辑成册，虽内容较深，但可供教师因材施教，培养拔尖学生之用。

既要传授知识，也要培养智能，这是当今高等学校的教学工作中应该大力提倡的。培养学生自学能力是培养智能的一个重要方面。我们安排学生自学，除必须给学生有足够的课外学时数外，最根本的一条就是要调动学生自学的主动性和积极性。为了做到这一点，除教师的引导和启发外，还必须恰当地提供自学的

内容。根据本人三十年代学习结构力学时的经验，我认为最好是超越本科教材的范围，提供广泛的结构力学分支学科，让学生去涉猎，使学生学后而知不足，这样学生就会在教师的诱导和鼓舞下，更加自觉地去挤时间钻研较高深理论的积极性，并写出有一定水平的论文来。因此，我们编写的这套丛书亦可供培养学生自学能力之用。

如上提出的三个目的和两个作用，是我们的主观愿望，目的是否能达到，作用是否有成效，有待于今后的长期教学实践来检验。

本丛书中各个结构力学分支将单独成册，初步安排陆续出版15卷，将来再根据结构力学的新进展进行扩编。

由于工作需要，脱稿时间仓促，更重要的是限于水平，缺点和错误在所难免，望海内外同行专家不吝赐教，批评指正。

王朝伟

1986年1月

前　　言

结构随机振动是60年代以后发展起来的一门新的学科。线性时不变系统随机振动的一般理论虽然已经比较成熟，但非线性系统的随机振动问题或线性系统在非平稳随机激励下的一些振动问题，尚无成熟的一般解法，只能在某些特殊情况下求其近似解。本书以各种结构在随机激励下的动力响应问题为主，作了比较详细的介绍，并且举了许多实例。对故障识别问题，虽然另设一节，但也只作了概要的介绍。关于随机疲劳的机理及结构疲劳安全度的问题，无论在累积损伤计算方面或裂纹扩展理论方面，结合动态可靠性理论的研究，最近已经有了很大的发展，但限于本书的性质，未能做详细介绍。关于模糊随机振动问题，本书也未涉及。

本书第一章随机过程，第二章力学系统的动力特性，都是为了以后几章的需要而做了概括性的介绍。假设本书的读者在概率论与数理统计，结构动力学，结构安全度与可靠性等方面已经有了初步知识，所以起点比较高。这也是因为本门学科所用的数学知识比较多以及考虑到今后发展的缘故。但我们在以后各章中也随时做了解释，有些读者也可以在读到以后各章时再随时翻阅。例如有的读者希望先读第六章结构动力可靠性理论，就可以在只阅读第一章第一节第六项可靠度函数之后直接阅读。但我们仍想强调数学和力学的基础知识是非常重要的。并且注意保持全书的连贯性。第三章随机激励下离散系统的响应，未按传统方法从单自由度系统开始逐步介绍，一来是为了节省篇幅，二来也是编者贯彻了想要深化理论研究的意图。第四章、第五章分别介绍了连续与复杂系统的随机振动以及结构的非线性随机振动与动力稳定性。考虑到本书的应用面比较广以及在工程结构上的实际应用，

在介绍基础理论的同时也举了一些实例。鉴于首次超越问题以及结构寿命分布与评估问题都是一些具有重要实际意义的问题，所以在第六章结构动力可靠性理论里作了比较详细的介绍，包括非线性系统的首次超越问题以及软化（劣化）系统的动力可靠性问题，尽管当前在理论上尚不足以解决复杂的工程问题，但毕竟还有一些近似方法可资参考。鉴于高性能电子计算机的发展，在本章为结合实际工程结构问题的需要，也介绍了非平稳随机过程数字模拟的基本理论，编者想要强调的是，在重视数学基础的同时，更应注意问题的物理概念。

本书重点在于基本概念和基础理论的阐述。此外也介绍了大量的文献，指出研究方向，力求反映当代的水平，以启发读者进一步探讨和深入研究，书中引用了不少文献，都已随时注明，特向这些作者们表示感谢。本人对在旅美期间美国工程科学院院士、哥伦比亚大学主任教授 M.Shinozuka 的指导和帮助深表谢意。此外，本书也介绍了编者们自己的一些科研成果，这些工作主要是为了在现有条件下对实际工程结构提出一些实用的近似解法。

本书第一、二、三章由甘幼琛编写，第四、五章由于希哲编写，第六章由陈英俊编写，并由陈英俊担任主编。在全书定稿之前，主编者曾经作了一些修订、删减或补充，并通过在北方交通大学及长沙铁道学院教学中的试用情况又作了一些修改。限于编者的水平，难免还有缺点或错误，请读者批评指正。

陈英俊

1989年12月

目　录

第一章　随 机 过 程

本章概括地介绍《结构随机振动》所需要的概率论和随机过程中的一些基本概念和结果。它们在以后的实质性章节中经常用到。介绍是概括性的，内容不求完备，有些数学证明仅作概略的叙述，有些则只给出结果，而不给出证明。这些概括归纳材料的详细论述，在专门的论著[1][2]中可以找到。

第1.1节　概率论的几个基本概念

一、随机试验　事件　概率空间

研究随机现象需要对现象进行反复地观测试验。在概率论中将具有性质：①可以在相同条件下重复地进行；②每次试验的可能结果不只一个，且试验前不能确定那一个结果出现的试验，称为**随机试验**，简称**试验**。

随机试验 E 的一个可能结果 ω 叫做**基本事件**，也称为**样本点**。所有基本事件的集合，叫做**基本事件空间**，也称**样本空间**，以 Ω 记之。基本事件空间 Ω 中的每一个子集称为事件，有时也称为可观察事件或复合事件。Ω 中一些子集组成的类称为**事件体**。

通常，不是 Ω 中的每个子集都是可观察的或我们感兴趣的事件。在今后的讨论中，我们仅研究满足下列条件的一个特殊事件体 $\mathscr{B}$：

①$\Omega\in\mathscr{B}$；

②若 $A\in\mathscr{B}$，则 $A'\in\mathscr{B}$，$(A'=\Omega-A)$；

③若 $A_j\in\mathscr{B}$，$j=1,2,\cdots$，则 $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}A_j\in\mathscr{B}$。

从条件①和②我们直接得到[1][2]

$$\Phi = \Omega' \in \mathscr{B}$$

式中 Ω、Φ——分别称为**必然事件**和**不可能事件**。

由 de Morgan 定律 $\left(\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j = \left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j'\right)'\right)$ 和条件②和③可得：

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j'\right)' \in \mathscr{B}$$

因此，$\mathscr{B}$ 是一个事件代数。在概率论中，将满足上述三个条件的事件体 $\mathscr{B}$ 称为 Ω 中的一个 **σ-代数**或**波雷尔（E.Borel）集合体**，亦称 **σ-域**。

现在引进概率函数的概念。在概率论的公理化结构中，概率是针对事件定义的，即对应于一切可观察事件的波雷尔体中的每一事件 A，有一个有限实数 $P(A)$ 与之对应。数 $P(A)$ 是集合 A 的一个函数，如果这个函数具有下列性质：

① $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

② $P[\Omega] = 1$；

③对 $\mathscr{B}$ 中互不相交的可列集 A_1，A_2，…，等式。

$$P\left\{\sum_j A_j\right\} = \sum_j P(A_j) \qquad (1.1\text{-}1)$$

成立，则称 $P(A)$ 为 A 的**概率测度**或简称为**概率**。

性质③称为**可列可加性**或**完全可加性**。

由上述可见，即使基本事件空间 Ω 是相同的，但根据不同问题的需要可以有不同的 Borel 体 $\mathscr{B}$。同时即使有相同的 Ω 和 $\mathscr{B}$，而由于客观条件不同，$\mathscr{B}$ 中的每一事件 A 可以有不同的概率函数 $P(A)$。因此，一个随机试验的描述应该包括基本事件空间 Ω，事件体 $\mathscr{B}$ 和概率 P。这三个要素应该看成一个统一的整体，构成与随机试验有关的所谓**概率空间**（Ω，$\mathscr{B}$，P）。可见概率空间（Ω，$\mathscr{B}$，P）是随机试验的数学描述。

二、条件概率与统计独立

现在研究定义在同一概率空间上事件之间的一种概率关系一条件概率。

设（Ω，$\mathscr{B}$，P）是一概率空间，$B\in\mathscr{B}$，而且$P(B)>0$。$A\in\mathscr{B}$，则在B发生之下，A的条件概率为[2]

$$P(A|B)=P(AB)/P(B)$$

其中$P(AB)$是A、B同时出现的概率。由上式可以得到

$$P(AB)=P(B)P(A|B) \tag{1.1-2}$$

这个式子有时称为概率的**乘法定理**。若$P(A|B)=P(A)$，则有

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

此时称事件A与B**独立**，否则称A与B**相关**。

乘法定理可以推广到任意n个事件的情况：

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1}) \tag{1.1-3}$$

如果对于所有可能的组合$1\leqslant i<j<K\cdots\leqslant n$成立着

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$$

$$P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) \tag{1.1-4}$$

则称A_1，A_2，…，A_n**相互独立**。

例1.1-1　有一延长100km的公路，在此区间，公路的状态及交通量都是同样的，故可设发生事故的可能性在全区间都是同样的，定义：

事件A=在0～30km区段内发生事故

事件B=在20～60km区段内发生事故

根据本题的假设可知

$$P(A)=\frac{30}{100}；\quad P(B)=\frac{40}{100}$$

即设在某一区段内发生事故的概率与该区段的长度成比例。

现在求B已发生时A的概率，由图1.1-1知

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{10/100}{40/100}=1/4$$

实际上这就是在属于B的范围内，求 A 亦同时发生的部分的比率，即

$$P(A|B)=\frac{10}{40}$$

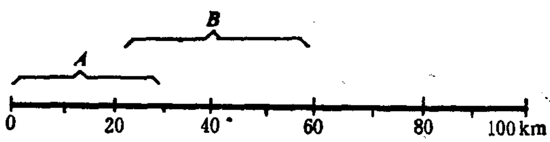

图1.1-1　条件概率实例

例1.1-2　样本空间是实的时间轴$(0,\infty)$，设电子发射的时刻t落在区间(t_1,t_2)的概率是

$$P[t_1\leqslant t\leqslant t_2]=\int_{t_1}^{t_2}\alpha(t)dt$$

其中　$\alpha(t)\geqslant 0,\qquad \int_0^{\infty}\alpha(t)dt=1$

试确定电子在$t=t_0$以前不发射的情况下，在(t_1,t_2)内发射的概率$(t_0\leqslant t_1)$

解：因为$t_0\leqslant t_1$，所以

$$(t_1\leqslant t\leqslant t_2)(t\geqslant t_0)=(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$$

但　$P(t_0\leqslant t)=P(t_0\leqslant t<\infty)=\int_{t_0}^{\infty}\alpha(t)dt$

所以　$P(t_1\leqslant t\leqslant t_2|t_0\leqslant t)=\dfrac{P(t_1\leqslant t\leqslant t_2)}{P(t_0\leqslant t)}$

$$= \frac{\int_{t_1}^{t_2} \alpha(t)dt}{\int_{t_0}^{\infty} \alpha(t)dt}$$

例1.1-3 有四个箱子，装有的部件数目和各含的次品率如下：2000个，5%；500个，40%；1000个，10%；1000个，10%。我们在这些箱中随机地选定一只，并从中随机地抽取一个部件，问这部件是次品的概率是多少？

解：若用Ω_i表示抽到第i只箱的事件，D表示取出的部件是次品的事件。则依题意我们有下面的事件关系式：

$$D = \Omega_1 D + \Omega_2 D + \Omega_3 D + \Omega_4 D = \sum_{i=1}^{4} \Omega_i D$$

依题意有

$$P(\Omega_1) = P(\Omega_2) = P(\Omega_3) = P(\Omega_4) = 1/4$$

$$P(D|\Omega_1) = 5\% = 0.05,\quad P(D|\Omega_2) = 40\% = 0.4$$

$$P(D/\Omega_3) = P(D|\Omega_4) = 0.1$$

所以 $$P(D) = \sum_{i=1}^{4} P(\Omega_i D) = \sum_{i=1}^{4} P(\Omega_i) P(D|\Omega_i)$$

$$= (0.05 + 0.4 + 0.1 + 0.1) \times \frac{1}{4} = 0.1625$$

三、重复试验[2]

上面我们所研究的是单个试验。在应用中往往涉及到多个试验或多次重复试验的情况。为了分析这类问题，我们首先要构造一个能描述这些试验的公共样本空间。

设有n个试验E_i，其样本空间$\Omega_i = (\omega^{(i)})$，$i = 1, 2, \cdots, n$。为了描述这$n$个试验，我们构造组合试验$E$，它表示依次进行试验$E_1$，$E_2$，…，$E_n$。

其样本点为