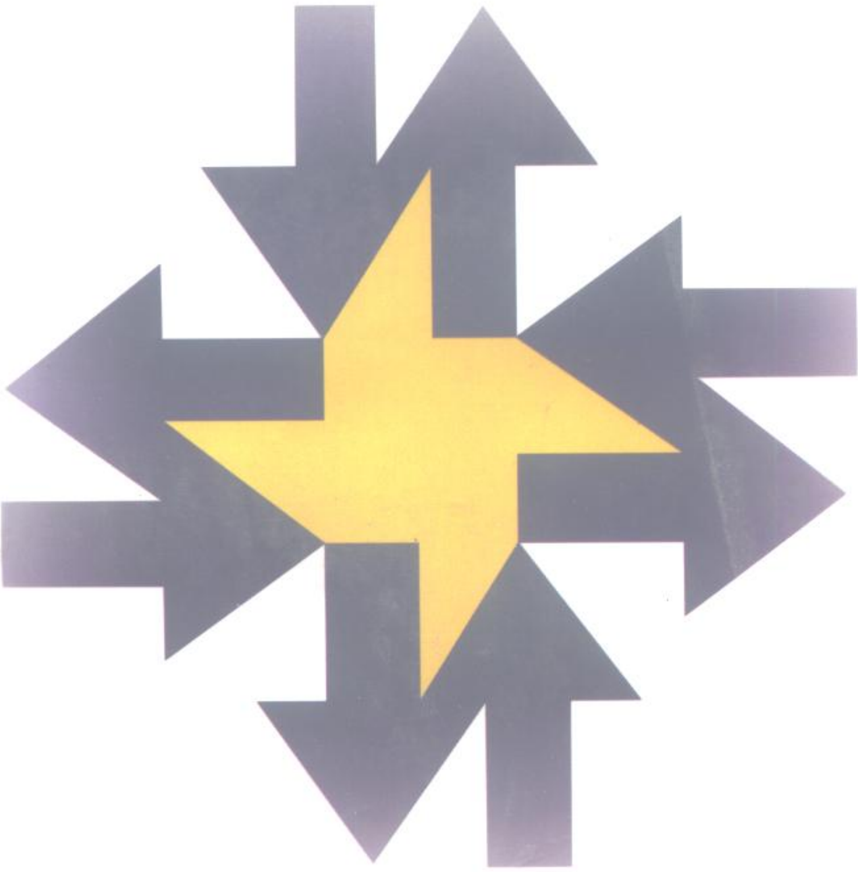
天津市科协专著基金
TJAST Fund For Academic Publications

SUIJIGUOCHENG LILUN
JIQI YINGYONG

天津科学技术出版社

随机过程理论及其应用

俞钟祺 马秀兰 编著



天津市科协自然科学技术专著基金资助出版

随机过程理论及其应用

俞钟祺　马秀兰　编著

天津科学技术出版社

内 容 简 介

本书系统地介绍了随机过程的理论与应用，内容丰富，实例较多，可供高等院校工科及经济管理类有关专业学生、研究生必修或选修课使用，也可作为教师及工程技术人员的参考书。全书共分十一章，包括预备知识、母函数和特征函数、随机过程概论、二阶矩过程和随机分析、平隐随机过程、平稳过程的谱分析、线性系统对随机输入的响应、马尔可夫链、马尔可夫过程、正态过程与泊松过程、维纳过程与伊藤积分等。

本书获得天津市科协自然科学技术专著基金资助出版。

天津市科协自然科学技术专著基金资助出版

随机过程理论及其应用

俞钟祺　马秀兰　编著

责任编辑：张炳祥

*

天津科学技术出版社出版

天津市张自忠路 189 号　邮编 300020

河北省雄县胶印厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 14.75　字数 377 000

1996 年 11 月第 1 版

1996 年 11 月第 1 次印刷

印数：1－2 000

ISBN 7-5308-1985-2

O・85　定价：20.00 元

前　言

随机过程理论在通信、控制、生物、社会科学及工程技术、经济领域等方面应用极为广泛。由于现代科学技术的飞速发展，随机分析的方法已越来越受到人们的重视，高等学校的学生、研究生、工程技术人员更要求学习和掌握随机过程的理论及应用。

本书是按国家教委颁布的随机过程教学大纲的要求，根据我们多年来为研究生及教师讲授这门课程的教学实践和研究成果及积累的资料，并参考国内外有关论著编写而成的。经过多次教学实践，本书已能较好地满足高等学校的教学和广大科技工作者的需要。书中根据由浅入深、循序渐进原则，注重理论联系实际；并充分考虑不同对象、不同水平读者的实际情况，综合运用了经典理论和现代分析方法，以求帮助学习者建立随机过程的思维方法，掌握随机问题的统计特性及数学模型。为此，书中除了超过大纲要求的，或过于繁琐的定理证明外，对大多数定理都给出了严格的数学论证；并尽量采用几何直观方法，不过分追求纯数学推导。本书各章节都配有典型例题，而且例题和习题尽量选择一些与社会、经济、管理等专业相关的实例，以帮助学习者加深对基本概念、基本理论的理解，提高应用随机过程理论来分析问题和解决问题的能力。本书的取材反映了本学科的现代面貌。我们也希望在广度和深度上适应更多读者的需要，因而在预备知识中，对使用的数学工具给予必要的介绍。

全书共分十一章，在保持随机过程理论的完整性、系统性的基础上，重点突出、结构严谨、思路清晰，各章之间具有相对独立性，以便根据教学的具体要求选择全部或部分章节进行讲授和学习。每章后

有适量的习题，并附有习题答案。 EA02 1/2

本书由俞钟祺（第七章～第十一章）、马秀兰（第一章～第六章）编著。在编写过程中哈尔滨工程技术大学李文林副教授提供了有益的资料，还得到了中国科学院系统科学研究所所长成平研究员的帮助和指导；国内同行中的许多专家也给予热情鼓励。本书获得天津市科协自然科学技术专著基金资助出版，在此我们一并致以衷心的感谢。

作 者

目　　录

第一章 预备知识

概率论是数学的一个有特色的分支，它有自己独特的概念和方法，同时与数学其它分支又有紧密的联系，是近代数学的重要组成部分，且为随机过程的基础. 这一章将概括介绍其要点.

§1.1 随机变量与概率分布

一、随机事件

在概率论中讨论的随机试验 E 是满足下述条件：

第一，在相同条件下，试验可以重复进行；

第二，每次试验的结果具有多种可能性，所有可能的结果在试验之前是可以确定的；

第三，每次试验之前不能准确地预言哪个结果出现.

1. 随机事件的概念

我们称试验的每一个可能的结果为随机事件，简称事件，用大写拉丁字母 A,B,C 等表示. 在随机事件中不可再分的事件为基本事件，即为最简单事件. 如在掷一颗骰子的试验中，出现的点数为“1点”、“2点”、…“6点”，这六个事件都是基本事件. 由若干个基本事件组成的事件为可观察事件或称为复合事件. 如掷骰子出现的点数为“奇数”这一事件是由“1点”、“3点”、“5点”这三个基本事件组成的. 一个事件是否为基本事件是相对试验的目的而言的. 例如量人的身高(以米为单位)，则基本事件一般是在区间(0,3)中的任一实数，这时基本事件可有数个，但是如果度量人的身高是为了了解乘车是否

要买全票、半票或免票，这时就只有三个基本事件.

2. 随机事件的关系与运算

(1)随机事件的关系

①在一定条件下必然发生的事件称为必然事件，记作 Ω；在一定条件下必然不会发生的事件称为不可能事件，记作 Φ. 它们是随机事件的两个极特殊情况，对我们讨论问题是很方便的.

②如果两个事件 A 与 B 不可能同时发生，则称事件 A 与 B 互不相容；若 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 中任意两个事件是互不相容的，则称 A_1、A_2，$\cdots A_n$ 两两互不相容(或称互斥).

③如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 含于事件 B，或称事件 B 包含事件 A，记作 $A \subset B$.

④如果事件 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A = B$.

⑤如果事件 A 与 B 同时发生，称为事件 A 与 B 的积(或交)，记作 $A \cap B = AB$. 一般地，如果任意有限个事件 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 同时发生的事件称为事件 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 的积事件，记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$，而 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示可列无穷多个事件同时发生.

⑥如果事件 A 与 B 之中至少有一个发生称为事件 A 与 B 的和事件(或并)，记作 $A \cup B = A + B$，一般地，任意有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 之中至少有一个发生的事件称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和，记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$，同样，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示任意可列无穷多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 之中至少有一个发生的事件.

⑦如果事件 A 与 B 满足 $A \cup B = \Omega$ 且 $AB = \Phi$，则称 B 为 A 的对立事件(或互逆事件)，记作 $A = \overline{B}$.

⑧如果事件 A 发生，而事件 B 不发生，则此事件为事件 A 与 B 的差事件，记作 $A - B$.

(2)随机事件的运算(类似集合的运算).

①交换律　$A \cup B = B \cup A$；　$A \cap B = B \cap A$

②结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$； $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

③分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$； $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

一般地 $A\cap(\bigcup_i A_i)=\bigcup_i(A\cap A_i)$；$A\cup(\bigcap_i A_i)=\bigcap_i(A\cup A_i)$

④对偶律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

一般地 $\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i}$； $\overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}$

二、概率

随机事件在一次试验中是否发生是不能在事前确定的，但在大量重复试验中具有统计规律性，这样就需要对事件发生的可能性大小进行量的描述，即为概率.

1. 概率的统计定义

在 n 次重复试验中，若事件 A 发生了 m_A 次，则$\frac{m_A}{n}$称为事件 A 发生的频率. 同样，若事件 B 发生了 m_B 次，则事件 B 发生的频率为$\frac{m_B}{n}$，…，一般地，事件的频率必在 0 与 1 之间. 如果事件 A 与事件 B 互不相容，则事件 $A+B$ 的频率为$\frac{m_A+m_B}{n}$，这就是频率的可加性. 在相同条件下，不管谁去做试验，只要做大量试验（n 不断增大）事件 A 的频率尽管略有出入，但频率总是具有某种稳定性的. 它的数值逐渐稳定于某个常数 $P(A)$附近. 其中 $P(A)$称为事件 A 的概率. 正因为这种稳定性，概率的概念才有客观意义. 如抛掷一枚质地均匀的硬币 n 次，正面出现的次数为 m_A，则 $f_n(A)=\frac{m_A}{n}$在 0.5 附近摆动. 类似这样的例子很多. 一般地讲，直接计算某事件频率的稳定值有时非常困难，甚至是不可能的. 但是对于某些特殊类型的随机试验，如古典概型和几何概型的随机试验是可以计算的.

定理（贝努利大数定律） 设 m_A 为 n 重贝努利试验中事件 A 出现的次数，且 $P(A)=p$，则对任意给定正数 ε，不论它有多么小，必有

$$\lim_{h\to\infty}P(|\frac{m_A}{n}-p|\geqslant\varepsilon)=0$$

这说明当 $n\to\infty$ 时，事件$\{|\frac{m_A}{n}-p|\geqslant\varepsilon\}$的概率为 0，即当 n 值很大时，$f_n(A)$与概率 $P(A)$有偏差的可能性很小. 也就是 $P(A)$是 $f_n(A)$的稳定值. 定理还给出了通过试验来确定事件概率的方法. 即通过做试验确定某事件发生的频率作为事件概率的估计，这种方法称作参数估计.

2. 古典概率

法国数学家拉普拉斯(Laplace)在 1812 年给出古典概率的定义如下：

定义 1 若试验结果由 n 个基本事件 $\omega_1,\omega_2,\cdots\omega_n$ 组成，并且这些事件出现具有相同的可能性，而事件 A 是由其中某 m 个基本事件组成，$(m=1,2,\cdots,n)$，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\text{有利于 } A \text{ 的基本事件数}}{\text{试验的基本事件总数}}=\frac{m}{n}$$

古典概型有着多方面的应用，如产品抽样及摸球模型等. 这种模型化的方法能使问题更清楚，更容易看出其随机性本质，而不致被个别情况下的具体属性所蒙蔽，这种抽象化的模型具有普遍性.

【例 1】 为了减少比赛场次，把 20 个球队分成两组(每组 10 个队)进行比赛，求最强的两队分在不同组的概率.

解 基本事件总数 $n=C_{20}^{10}$

设 A 表示“最强的两队分在不同组内”这一事件，则 A 出现的基本事件个数 $m=C_2^1C_{18}^9$(由乘法原理)

$$\therefore\quad P(A)=\frac{C_2^1C_{18}^9}{C_{20}^{10}}=\frac{10}{19}=0.526$$

【例 2】 袋中有 a 只黑球，b 只白球，它们除颜色不同外，其它方面没有差别，现在把球随机地一只只摸出来，求第 k 次摸出一只球是黑色的概率$(1\leqslant k\leqslant a+b)$

解法 1 将 $a+b$ 个球编号，如下页表所示

第1位置	第2位置	…	第 $a+b-1$ 位置	第 $a+b$ 位置
$a+b$ 种	$a+b-1$ 种	…	2种	1种

所有可能的排列方法相当于把 $a+b$ 个元素进行全排列，从而基本事件总数为 $(a+b)!$

设 A_k 表示“第 k 次摸到一只黑球”这一事件，需经两步才能完成：

第一步　第 k 次摸到黑球共有 a 种方法；

第二步　余下的 $[(a+b)-1]$ 个位置进行全排列，可能有 $(a+b-1)!$ 种；

由乘法原理，有利于 A_k 的基本事件个数为

$$a\cdot(a+b-1)!$$

故所求的概率为

$$P(A_k)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$$

解法2　根据题意的要求，我们只考虑第 k 次试验，所有可能的基本事件的结果为 $n=C_{a+b}^1$，有利于事件 A_k 的结果 $m=C_a^1$ 种，从而所求的概率为

$$P(A_k)=\frac{C_a^1}{C_{a+b}^1}=\frac{a}{a+b}$$

一般地，常用排列组合及乘法原理或加法原理等来计算试验的总次数 n 和事件 A 出现的次数 m. 这样，对于古典概型问题，根据题意要求，就可求出事件 A 的概率. 对于更复杂的问题，也就能正确求解. 有些题的解法不唯一，甚至有多种解法，通过训练，要尽可能地掌握最简便的方法解题.

3. 性质

(1)非负性　设 A 为任一事件，则　$0\leqslant P(A)\leqslant 1$

(2)规范性　对必然事件 Ω，有　$P(\Omega)=1$

(3)可加性(概率加法定理)　若 A、B 为两个互不相容事件，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

推论1　如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，即 $A_iA_j=$

$\Phi(i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n)$，则有 $P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$，称为有限可加性.

特别地，对任意事件 A，有 $P(A)=1-P(\overline{A})$，其中 $A+\overline{A}=\Omega$，如果可列个事件 $A_1,A_2,\cdots A_n\cdots$ 两两互斥，则有

$P(\sum_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$，称为概率的可列可加性.

推论 2 对任意事件 A 与 B，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

【例 3】 参加国际乒乓球赛的 16 名选手中有 3 名中国人，1 名瑞典人，抽签分为 4 组，每组 4 人进行预赛，试求瑞典人所在组中有中国人的概率.

解法 1 设 A 表示"在第 i 组中有中国人也有瑞典人这一事件，$i=1,2,3,4$. 有如下三种可能：$C_1^1C_3^1C_{12}^2$，$C_1^1C_3^2C_{12}^1$，$C_1^1C_3^3$，共有 4 组，即

$m=C_4^1[C_1^1C_3^1C_{12}^2+C_1^1C_3^2C_{12}^1+C_1^1C_3^3]C_{12}^4C_8^4C_4^4$

设预赛所有可能的分法有 $n=C_{16}^4C_{12}^4C_8^4C_4^4$

故 $P(A)=\dfrac{4[C_1^1C_3^1C_{12}^2+C_1^1C_3^2C_{12}^1+C_1^1C_3^3]C_{12}^4C_8^4C_4^4}{C_{16}^4C_{12}^4C_8^4C_4^4}=0.5165$

解法 2 利用对立事件

$\because$ $P(\overline{A})=\dfrac{C_4^1[C_1^1C_{12}^3C_{12}^4C_8^4C_4^4]}{C_{16}^4C_{12}^4C_8^4C_4^4}$

$\therefore$ $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{C_4^1C_{12}^3}{C_{16}^4}=0.5165$

【例 4】 一批产品共有 50 个，其中 45 个是合格品，5 个是次品，从这批产品中任取 3 个，求其中有次品的概率.

解法 1 设 A_i＝"3 个产品中恰有 i 个次品"，$i=1,2,3$；A＝"3 个产品中有次品"

则 $A=A_1\cup A_2\cup A_3$ 且 A_1,A_2,A_3 两两互斥，由加法定理可得

$$P(A)=P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$
$$=\frac{C_5^1C_{45}^2}{C_{50}^3}+\frac{C_5^2C_{45}^1}{C_{50}^3}+\frac{C_5^3}{C_{50}^3}$$

$$=0.2525+0.0230+0.0005=0.2760$$

解法 2 事件 A 的对立事件为 $\overline{A}$ 表示"3 个产品都是合格品"，显然

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_{45}^{3}}{C_{50}^{3}}=1-0.7240=0.2760$$

三、概率空间

概率空间的三元总体为$(\Omega,\mathscr{F},P)$，其中 Ω 是样本空间，$\mathscr{F}$ 为事件域，P 为概率，它们都认为是预先给定的，并以此作为出发点讨论种种问题. 至于在实际问题中，如何选定 Ω，怎样构造 $\mathscr{F}$，怎样给定 P，则要视具体情况而定.

定义 2 （样本空间）设 E 为随机试验，由随机事件 E 中的所有基本事件对应的全部元素组成的集合称为样本空间. 记作 Ω，样本空间的元素称为样本点，它相当于随机试验的结果.

注意：随机事件 E 中的所有基本事件对应的全部元素指的是：每一个随机试验的每一个基本事件，用一个包含一个元素 ω 的单点集$\{\omega\}$表示，由若干个基本事件组成的复合事件，则用包含若干个元素的集合表示.

任意随机试验的结果必然出现全部基本事件之一，这样，样本空间作为一个事件是必然事件.

【例 5】 在 0，1，2，…，9 十个数中任意取一个，可能有十种不同的结果，"取得一个数是 0"，…"取得一个数是 9"，但是还有其它可能的结果："取得一个数是奇数"、"取得一个数是大于 4 的数"、"取得一个数是 3 的倍数"等等. 试写出样本点及样本空间.

解 样本点是 $\omega_1=0,\omega_2=1,\cdots\omega_{10}=9$；基本事件是 $\{\omega_i\}$ $(i=1,2,\cdots 10)$；样本空间 $\Omega=\{0,1,\cdots,9\}$

【例 6】 计算某电话站总机在$[0,t]$内的呼叫次数，试写出基本事件及样本空间.

解 基本事件为 $A_0=\{\omega_0\},A_1=\{\omega_1\},\cdots,A_n=\{\omega_n\}\cdots$其中 $\omega_k=k(k=0,1,2,\cdots)$为 k 次呼唤

样本空间为　$\Omega=\{\omega_k, k=0,1,2,\cdots\}$

定义 3(事件域)　设 $\mathscr{F}$ 是由样本空间 Ω 的一些子集构成的集合族，如果满足下列条件：

(1)$\Omega\in\mathscr{F}$；

(2)若 $A\in\mathscr{F}$，则 $\overline{A}\in\mathscr{F}$；

(3)若 $A_i\in\mathscr{F}, i=1,2,\cdots,n$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\in\mathscr{F}$.

则称 $\mathscr{F}$ 为事件域，亦称 $\mathscr{F}$ 为 σ-域或 σ-代数.

若 $\mathscr{F}$ 是事件域，由定义中的(1)和(2)可得 $\Phi\in\mathscr{F}$，此外，若 $A_n\in\mathscr{F}$，则有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n}\in\mathscr{F}\quad n=1,2,\cdots$$

$$\bigcup_{n=1}^{k}A_n=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k\cup\Phi\cup\Phi\cdots\in\mathscr{F}$$

$$\bigcap_{n=1}^{k}A_n=A_1\cap A_2\cap\cdots A_k\cap\Omega\cap\Omega\cdots\in\mathscr{F}$$

对任意样本空间 Ω，它的所有子集(包括空集 Φ 和 Ω)所构成的集合族就是一个事件域，因此它总是存在的.

【例 7】　在编号为 $1,2,\cdots,n$ 的电视机中任选一部，试写出样本空间和事件域.

解　(1)若考虑电视机的号数，则其全部基本事件为　$A_k=\{k\}$　$k=1,2,\cdots n$

样本空间为　$\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$.

除了上述基本事件外，还有如下事件：

$$A_{ij}=A_i\cup A_j\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

$$A_{i,j,k}=A_i\cup A_j\cup A_k\quad(i,j,k=1,2,\cdots,n)$$

$$\cdots$$

$$A_{i1,i2,\cdots in}=A_{i1}\cup A_{i2}\cup\cdots\cup A_{in}\quad(i_1,i_2,\cdots,i_n=1,2,\cdots,n)$$

集合族 $\{\Phi,\Omega,A_i,A_{i,j},\cdots A_{i1,i2,\cdots in}\}$ 组成一个 σ-代数.

(2)若考虑电视机是正品还是次品，则此时基本事件可为　$A_1=\{正品\}$，$A_2=\{次品\}$，事件域为 $\{\Phi,A_1,A_2,\Omega\}$ 是一 σ 代数.