数学分析

（二）

复旦大学数学系 編著

上海科学技术出版社

数 学 分 析

（二）

（試用本）

复旦大学数学系　編著

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书系复旦大学数学系数学专业革新教材之一，讲述复变数函数的解析理論和几何理論。内容包括：解析函数，柯西积分公式，用級数表示解析函数，留数定理及其应用，解析延拓，共形映照及其应用，柯西型积分，Γ 函数和椭圆函数等章，可作綜合大学数学专业复变函数論課程的教材，讲授58学时，并可作为高等院校有关专业参考书。

数 学 分 析（二）

（試 用 本）

复旦大学数学系 编著

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

上海大众文化印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 6 8/32 字数 147,000

1960年5月第1版 1960年7月第3次印刷

印数 3,951—11,950

統一书号：13119·357

定 价：（十）0.74元

編輯說明

我們受到全国持續跃进的大好形势的鼓舞和推动，积极响应了党的号召，在两年来教育大革命已經取得偉大成績的基础上，掀起了一个声势浩大的教学改革的群众运动。通过这个运动，我們揭露了現在教学体系、教学內容和教学方法上陈旧落后的状况，抓住訂方案、編大綱、写教材、搞試驗等重要环节，試图建立一套以馬克思列宁主义、毛澤东思想为指导的、反映現代科学发展水平的、理論联系实际的新的教学体系和內容，以及与之相适应的教学方法，使培养人才的工作更好地貫徹党的社会主义建設总路綫的精神。

作为这种新的探索和尝試，我們在教学改革运动中，师生結合，提供了"关于綜合大学数学专业課程革新的建議"，編写了一套可供綜合大学数学专业試用的基础課程教材。全套教材包括数学分析(一)、数学分析(二)、泛函分析、高等代数、綫性規划和計算实习、計算数学、数理邏輯与控制論、常微分方程、数学物理方程、一般力学、連續介質力学、統計数学(包括信息論)等十二种，尚有物理学一种，因力量所限，未能及时編出。

根据"关于綜合大学数学专业課程革新的建議"的精神，我們力图使这套教材具有以下几个特点：

一、在选材上，注意克服資产阶級教育思想的影响，体現为社会主义建設服务和反映現代科学发展的要求。中国数学会提出的"数学发展的方向必須以解决尖端技术和重大工程、現代物理、自动化、国民經济和大量計算任务中的数学問題为綱"，具体地說明了社会主义建設和現代科学发展对数学的要求，我們即以此作为选材的主要标准，同时，也考虑到基础課的某些特殊要求，适当注

意了根据理論与实踐之間的直接联系与間接联系，当前需要与长远需要等关系，来确定材料的取捨和不同材料的主次安排。根据这个精神，我們精簡了原来基础課內容中一部分不必要的古典內容，添加了一部分現代材料，还增加了一些新課程。

二、在材料处理上，注意克服过去課程設置各自为政、互不联系的缺点，体現科学知識的綜合与分类的辯証統一的关系。特别是近年来，边緣学科大量出現，科学发展在原有基础上愈来愈明显地趋向新的更高級的綜合，我們想力求使这套教材适应这个趋势。

具体說来，对那些条件已經成熟的、可以綜合处理的內容，即加以統一处理，例如将泛函分析与实变函数、积分方程以及綫性代数中的部分內容統一处理，在泛函分析中加以綜合；对那些綜合趋势已經比較明显，但独立設課条件尙不成熟的，也分別情况，注意在有关課程間建立密切的有机联系，若干材料还重新另行配置，例如原来理論力学中振动理論的一部分內容，这次就移到常微分方程中去了。

三、在材料的处理与闡述上，以辯証唯物主义观点为武器，破除形而上学和唯心主义对数学教学的影响。数学的研究对象是客观世界的量的側面，所以它具有較多的抽象性，在研究方法上也較多地运用邏輯上的演繹推証。这些特点，本来应該有利于深刻地闡明問題的本質，但唯心主义者却总是加以歪曲，企图在引出抽象概念时，掩盖其实踐来源，在形式論証中，避免闡述問題的本質。在这套教材中，我們力求消除这些唯心主义观点的影响。具体說来，对某些与生产实踐有着更加直接联系的課程（如数学物理方程），旣吸收已經严格建立数学理論的材料，也采用在实踐中有广泛应用而理論上尙未成熟的材料，重新加以組織，恢复这門課程本来的生动活潑的面貌。各門課程中，对重要数学概念与問題的引进，都尽量闡明它們的直接和間接的实踐来源；闡述論証过程中，

插入若干必要的描述性材料；得到的結論，也闡明它在实踐中直接和間接的作用。本学期我系几門主要基础課程，都初步做到了減少学时、提高質量，据了解，主要是在教学过程中初步体現了这个精神。因此，根据我們一些不成熟的經驗，要彻底解决这个問題，除在教材內容上尽量克服这些唯心主义观点的影响以外，还要注意在教学方法中消除这些影响。

彻底实現教学改革，建立一套新的体系，是一个艰巨复杂的任务，也需要一个較为長期的时間来摸索。我們所作的一些尝試，仅仅是个开端，旣受到思想水平和科学水平的限制，又缺乏較充分的实踐經驗，某些課程的教材，还是在师生結合、边学边写的情况下編出来的。因此不論在处理原則上或者在处理方法上都还不够成熟。有不少問題，例如如何在教材中反映我国社会主义建設实际中所提出的数学問題、如何在有关各課程間建立更密切的有机联系等等，在編写过程中，也还把握不定，处理不尽适当。我們恳切地希望同志們批評和指正。

上海科学技术出版社和商务印书館上海印刷厂对这套教材的迅速出版，給了极大的支持，我們在这里表示衷心的感謝。

复旦大学数学系

1960年5月

序

六十年代的第一个春天，我国掀起了一个全民性的技术革命运动。工农业生产和科学技术的飞跃发展，对于多快好省地培养人材提出了更高的要求。在基本理論的教学中，如何貫彻理論联系实际的原則，如何反映近代科学成就，已經成为我們迫切需要解决的問題。但是，在現有的“复变函数論”教本中，适应这一要求的并不多見。有鉴于此，我們在党的領导下，以毛澤东思想为指导，师生結合，奋战两周，写出了这部供数学专业使用的“复变函数論”教本。我們認为这个教本有如下几个特点：

一、我們从流体力学的平面流动中引出解析函数概念，并在整个教材中，始終注意到复变函数在流体力学中的应用，以便使学生在学习必要的理論知識的同时，也了解复变函数理論和实际之間的不可分割的联系。

二、为了适应社会主义建設和科学技术发展的需要，我們在注意到基本理論的同时，还加强了数学物理、力学、工程技术等方面的重要应用内容，如柯西型积分、椭圓函数理論以及共形映照的近似方法。

三、以概括、更新的精神作出基本理論的处理。例如，簡单地回顧在“数学分析(一)”中已經学过的“复数”、“复变函数”、“冪級数”等概念；概括地处理泰勒級数与罗朗級数，而突出其本质的联系；并介紹了在混合型方程中經常用到的謝多夫公式以及拟似共形映照的初步知識等复变函数的近代成就。这样，就有可能尽快地講述必要的理論及其应用，并且初步地接触到数学的近代成就，

有利于多快好省地培养人材。

限于我們的水平，教材内容的取舍与处理方面錯誤、欠妥之处在所难免，希望同志們批評、指正。

复旦大学数学系数学分析(二)編写小組

1960年5月

目　录

第一章 解析函数

§1 复数与复变函数

在数学分析(一)中，我們已經向讀者介紹了有关平面点集和复变函数的一些初步知識。本书将在这个基础上来講述解析函数的理論及其应用。为了今后討論方便起見，本书将复数与复变函数的基本概念作一些必要的补充。

一、复数的几何表示

1．复数的向量表示：任意一个复数 $z=x+iy$ $(z\neq 0)$，可以用在复平面上分量为 x 和 y 的向量来表示(图 1-1)。向量 z 的長度叫做模，記作 $|z|$。实軸的正向与向量之間的角度叫做 z 的幅角，記作 $\operatorname{Arg} z$。同一向量可以有无限多个彼此相差为 2π 整数倍的不同的幅角。但是恰有一个幅角的値介于 $-\pi$ 与 π 之間，叫做幅角的主値，記作 $\arg z$。显然，对于 z 的任意一个幅角有

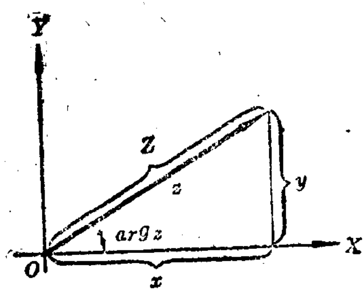

图 1-1

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi,$$

其中 k 表示任意整数。

設 z_1, z_2 为任意两个向量，由向量乘积可得

$$\operatorname{Arg}(z_1\cdot z_2)=\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2, \tag{1-1}$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2. \tag{1-2}$$

注意，对于 $\arg z_1$ 和 $\arg z_2$，上述等式不一定成立，但只能相差 2π 的整数倍。讀者試自行举例說明之。

2. 复数的球面表示：在平面場論的許多問題以及解析函数理論中，复数域已显得不够用了，需要引进无穷远点。

为此，我們考虑一个南极与复平面相切于原点的球（图 1-2）。用直綫将复平面上每一个点 z 和球面的北极相联，在球面上得到一个交点 z'. 这样，便建立起复平面与不包含北极的球面之間的一对一的对应关系。点 z' 視为复数 z 的象。这球面叫做复数球面（或称黎曼球面）。

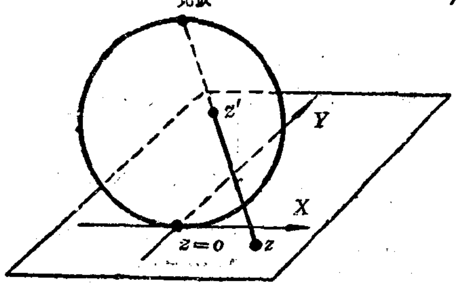

图 1-2

为了把这种对应关系扩大到整个球面上，我們引入一个点，叫做无穷远点（复数 $z=\infty$），使得它与球面的北极对应。数 ∞ 不能象通常的复数一样进行算术运算。但是，对于任意的使 $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=+\infty$ 的点列 $\{z_n\}$，我們視为它收斂于无穷远点：$\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$. 这种看法是适当的，因为 z_n 的象形成一个向球面的北极收斂的点列。

复平面再加上无穷远点，叫做扩充复平面（复数域中加上复数 ∞，叫做扩充复数域）。满足 $|z|>\rho$ 的 z 的全体，它的象是以北极为圆心的圆域，称为无穷远点的 ρ-邻域。

二、复变函数

設 E 是扩充复平面 (z) 上的某个点集。如果每个点 z, $z\in E$,

与一个或多于一个的复数 w 成对应，那末就說在 E 上定义了一个复变量 z 的函数，記作 $w=f(z)$.

如果每一个点 z 只有一个 w 值和它对应，則称函数为单值的；如果对某些点 z 有多于一个 w 的值和它对应，則称函数是多值的。如果函数值 w 也用复平面 (w) 上的点来表示，复变函数

$$w=f(z)$$

就在复平面 (z) 上的点集 E 和复平面 (w) 上的某个点集 F 之間建立了一个对应关系。如果存在一个函数 $z=\varphi(w)$，使得集 F 中的每一个点 w 都与所有那些函数 $w=f(z)$ 映到点 w 上的点 z 成对应，那么这个函数 $z=\varphi(w)$ 就叫做函数 $w=f(z)$ 的反函数，記作 $z=\varphi(w)=f^{-1}(w)$.

在数学分析(一)里已經定义了单值复变函数 $w=f(z)$ 的极限和連續的概念。在那里我們仅考虑了极限值 A 是有限的情形，在研究解析函数所作的映照时，我們将合理地放弃这一限制，而拓广单值复变函数极限与連續的概念。

設 z_0 是属于 E 的极限点(有限的或无限的)，A 是复数(有限的或 ∞)。若对任意的 $\rho>0$ 存在 $\delta(\rho)>0$，使得当 z 属于 z_0 的 ε-邻域 ($z\in E$，且 $z\neq z_0$) 时，函数 $f(z)$ 属于 A 的 ρ-邻域，那末就說，当 z 趋于 z_0 时，$f(z)$ 趋于极限 A，写成:

$$\lim_{z\to z_0,\, z\in E} f(z)=A.$$

这样的定义包含了数学分析(一)中所考虑的情况。当 $f(z_0)=A$ 时，我們称 $f(z)$ 在 z_0 是連續的。

[例] 函数 $f(z)=\dfrac{1}{z}$，在点 $z=\infty$ 函数值变为零，在点 $z=0$ 变为无限大。这函数在整个扩充复平面上是連續的。事实上，在点 $z=0$ 和 $z=\infty$ 有

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=0=f(\infty),\quad \lim_{z\to 0} f(z)=\infty=f(0).$$

三、导数和积分

設 $f(z)$ 是定义在有限复平面中某个集合 E 上的单值有限复变函数。又設 z_0 是属于 E 的一个极限点，比值

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

对于 $z\in E$, $z\neq z_0$ 仍是有限的。若极限

$$\lim_{z\to z_0, z_0\in E}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

存在而且有限，我們説函数 $f(z)$ 关于 E 在 z_0 可导。极限值叫做 $f(z)$ 沿集合 E 在点 z_0 的导数，用記号 $f'_E(z_0)$ 表示，或簡单地記做 $f'(z_0)$。

实变函数中两个可微函数的和、差、积、商以及复合运算的运算法則，对于复变函数講来，仍然有效。

下面，我們引入复变函数沿曲綫积分的概念。

設 c 是复平面上的可求长曲綫，

$$z=\lambda(t)=x(t)+iy(t)\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

是它的参数方程。选定 c 的方向是沿参数 t 增加的方向。带有相反方向的同一曲綫用 c^- 表示。点 $z_0=\lambda(\alpha)$ 叫做 c 的起点，$z_1=\lambda(\beta)$ 叫做 c 的終点。对于 t 的一組值：$t_0=\alpha<t_1<t_2<\cdots<t_n=\beta$ 对应地将曲綫 c 分成弧 $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$，弧 c_k 的起点是点 $z_k=\lambda(t_k)$，終点是 $z_{k+1}=\lambda(t_{k+1})$。在閉区間 $t_k\leqslant t\leqslant t_{k+1}$ 上任意选取一个参数的值 $t=\tau_k$，在每个弧上便得到对应点 $\zeta_k=\lambda(\tau_k)$。設 $f(z)$ 是在曲綫 c 上的单值連續函数。作和式

$$S=\sum_{k=0}^{n-1}f(\zeta_k)(z_{k+1}-z_k),\tag{1-3}$$

类似于实函数一样，可以証明，当

$$\delta=\max_{0<k<n-1}(t_{k+1}-t_k)\to 0$$

时，这个和式有一个确定的极限。这极限叫做 $f(z)$ 沿曲綫 c 的积

分，記作

$$\int_c f(z)dz.$$

由积分定义立即可得下列簡单性質：

1. $$\int_c [f(z)+g(z)]\,dz=\int_c f(z)dz+\int_c g(z)dz. \tag{1-4}$$

2. $$\int_c Af(z)dz=A\int_c f(z)dz, \tag{1-5}$$

其中 A 是常数。

3. 若曲綫 c 分解为 c_1 和 c_2，則

$$\int_c f(z)dz=\int_{c_1} f(z)dz+\int_{c_2} f(z)dz. \tag{1-6}$$

4. $$\int_c f(z)dz=-\int_{c^-} f(z)dz. \tag{1-7}$$

5、若曲綫 c 之长为 L，而且在 c 上有不等式

$$|f(z)|\leqslant M,$$

那么有 ML 不等式

$$\left|\int_c f(z)dz\right|\leqslant ML. \tag{1-8}$$

[例] 求 $f(z)=1$ 的积分。显然有

$$s=(z_1-z_0)+(z_2-z_1)+\cdots+(z_n-z_{n-1})$$
$$=z_n-z_0=z-z_0,$$

所以 $$\int_c 1\cdot dz=z-z_0.$$

所得的結果表明积分的值仅与积分曲綫的起点和終点有关，而与路徑无关。但是，这一性質并不是对于任何复变函数都成立的，例如复函数 $f(z)=x$ 沿着曲綫 c_1 和 c_2 的积分(图 1-3)有

$$\int_{c_1} xdz=\frac{x^2}{2}+iyx,\quad \int_{c_2} xdz=\frac{x^2}{2}.$$

我們把这两个等式的証明留給讀者。

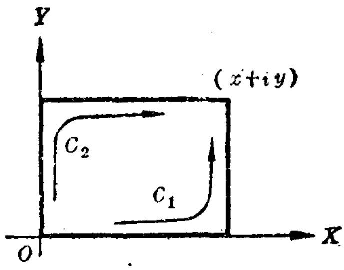

图 1-3

习　　题

1．計算下列各式的值：

$$(1+2i)^2,\quad \frac{2+i}{3-2i},\quad \sqrt{i}.$$

2．記 $z=x+iy$，指出下列各式的实部和虚部：

$$\frac{1}{z},\quad \frac{z-1}{z+1},\quad \frac{1}{z^2}.$$

3．設 $|b|<1$，証明

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{b}a}\right|\begin{cases}>1, & \text{当 } |a|>1 \text{ 时;}\\ =1, & \text{当 } |a|=1 \text{ 时;}\\ <1, & \text{当 } |a|<1 \text{ 时.}\end{cases}$$

4．举例說明：

(1) $\arg a\cdot b\neq \arg a+\arg b$。

(2) $m\operatorname{Arg} z$ 和 $\operatorname{Arg} z^m$ 的差别。

5．設 a, b 是两个复常数，討論整綫性函数 $w=az+b$ 的几何解釋。

6．設 $f(z)=\begin{cases} x(x^2+y^2)(y-xi)/(x^2+y^4), & z\neq 0;\\ 0, & z=0.\end{cases}$

試証：当 z 沿任何向徑趋近于零时，$\dfrac{f(z)-f(0)}{z}$ 趋近于零；但当 z 沿其他方式趋近于零时，它不一定趋近于零。

7．証明 $f(z)=\operatorname{Re} z$ 在复平面上处处不可导。

8．証明积分：

(1) $\int_c z\,dz=\frac{1}{2}(z_1^2-z_0^2)$,

其中 c 是通过点 z_0 和 z_1 的任意約当(Jordan)曲綫。

(2) $\int_c \frac{dz}{z}=2\pi i$,

c 是沿正向的单位圓周。

§2 不可压縮流体的平面运动 达朗倍尔-欧拉方程

解析函数理論的产生和发展是和流体力学的研究分不开的，因此让我們从流体的平面运动的概念来开始討論。

在流体力学中常要討論流体的所謂平面运动，即在运动过程中流体质点在垂直于某一个固定平面 S 的同一直綫上具有平行于 S 平面的相同的运动。因此，在这种情况下，我們只要研究流体在 S 平面上的运动就可知道整个空間运动的状况。所以，以后我們限于研究平面 S 內的流体运动，而說到流体在 S 平面上一个点、一条曲綫或一个区域的运动时，我們便应当記住这是代表流体在通过这些点、曲綫、区域而分别垂直于 S 的直綫、柱面、柱体上的运动。流体从无限长的柱面机翼的远前方、垂直于柱面母綫均匀流向机翼的流动，可归結到平面运动，此时在柱面的每一垂直断面內的流动显然都是一样的。在平面 S 內作一个直角坐标系 $O\text{-}XY$，于是速度場(即在所考察的范圍內每給定一点便确定了一个速度)中每个具有分量(v_x, v_y)的速度便可以用复数来表征：

$$v=v_x+iv_y.$$

往后我們所討論的只是不可压縮流体的定常运动。所謂定常运动就是指流体运动的物理場(速度場、密度場等)不随时間改变，而不可压縮的条件是指把整个流体的密度看作常数。

由运动过程质量守恒的規律，可以导出不可压縮流体运动的