数列和连续函数

[苏] Г.Н.ЯКОВЛЕВ 著

陈鑫林 译

人民教育出版社

512
965

数列和连续函数

[苏]Г. Н. ЯКОВЛЕВ 著
陈 鑫 林 译

人 民 教 育 出 版 社

内 容 提 要

本书详细地介绍了作为无尽十进位小数的实数理论，并在这基础上建立了序列的极限理论，定义了基本初等函数，研究了连续函数的性质，最后简单地介绍了导数概念和可微函数的一些基本性质.

本书可供综合大学、师范院校及工业院校学习数学分析及高等数学的学生以及中学教师阅读和参考.

数列和连续函数

[苏] Г. Н. Яковлев 著

陈鑫林 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 5 字数 120,000

1982 年 8 月第 1 版 1983 年 6 月第 1 次印刷

印数 00,001—19,500

书号 13012·0775 定价 0.65 元

作 者 序

由于实行新的数学教学大纲，目前在中等学校十分重视数列和函数的极限，函数的连续性，导数和积分等重要而又精密的概念. 这些概念自然又首先应用于以下那些所谓的基本初等函数：幂函数，指数函数，对数函数，三角函数和反三角函数. 如果对实数的性质没有深入的研究，那就既不可能对初等函数赋于认真的定义，更无法透彻地研究它的特性：如极限的求得，连续性区间的考察，导数和积分的求得等.

在中学数学教科书中，假定已存在某些称为实数的元素的集合，对这些数可按确定的规则作比较，作加减乘除运算. 这个集合除了有理数之外，还包含其他元素，即所谓无理数. 似乎任何已知的实数，例如有理数 r 或无理数 $\sqrt{2}$ 均能与无尽十进位小数建立对应. 学生习惯于确信任何实数表示为某个无尽十进位小数，并且任何无尽十进位小数表示某个实数. 然而，任何足够令人信服的实数理论在中学的教科书中是不介绍的.

在大学的高等数学教程中，或者根本上忽视任何一种实数理论，或者相当粗略地介绍以下著名的理论之一：狄特金(R. Dedekind)理论，康托尔(G. Cantor)理论或公理系统. 前一种情况不能满足对数学有兴趣的学生的要求；后一种情况会使某些学生产生和正在产生这样的见解：他们从初等(中学)数学教材中学到的，作为无尽十进位小数的实数概念，对于结构严谨的(例如大学的)高等数学教程来说是不适用的.

本书阐述作为无尽十进位小数的实数理论，并且在这基础上

建立序列的极限理论，定义基本初等函数，研究连续函数的性质. 作者认为，这样的叙述是对中学教材的自然补充，并且不过是把学生已经具有的直观概念从逻辑上固定下来.

本书由绪论和四章组成. 在绪论中介绍了集合论的基本概念，给出了对应、函数、反函数、序列的定义，最后举例引进了存在量词 ∃ 和全称量词 ∀ 以及否定运算 ¬.

第一章具有引导的特点. 首先介绍有理数序列的极限理论，然后指出在有理数的集合和循环十进位小数的集合之间，能建立互为单值的对应. 由此可见，所有无尽十进位小数的集合乃是有理数集合，即循环十进位小数集合的自然扩充.

在第二章里，介绍实数理论和数列理论. 它是本书的基本内容. 在这一章里确定了实数的相等和不等的概念，证明了关于有上界的实数集合的上确界存在定理，证明了数列极限的某些性质，特别是证明了任何单调有界序列的极限存在定理. 在这以后，介绍实数的算术运算，即定义两个实数的和、差、积、商，并证明它们的基本性质. 在最后几节中定义幂和对数，并证明它们的基本性质.

第三章定义幂函数、指数函数、对数函数和三角函数. 其次给出函数的极限和连续性的定义，并证明与这些概念有关的基本定理. 末了给出反三角函数的定义并证明其基本性质.

在最后一章里，引进导数概念并证明可微函数的一些基本性质.

在叙述时，广泛地使用集合论的术语以及存在量词 ∃ 和全称量词 ∀ 的记号. 书中引用的所有术语和符号，尽可能与中学教科书中所采用的那些术语和符号一致.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

绪　论

第一章　有理数序列

第二章　实数序列

第三章　连续函数

第四章　导数

绪　　论

§1 集合及其运算

1. 集合和元素

集合——这是一个基本的而又不予定义的数学概念．集合由元素组成．如果给出了或确定了集合的全部元素的特性，那么我们就认为给出了集合．《集合》这个词，也常常使用《联合（соединение）》、《总和（совокупность）》、《聚合（собрание）》这些词来代替它．

设X是某个集合．$x\in X$ 表示x是集合X的元素，并且读做《x 属于X》．如果x 不属于集合X，那么记作 $x\notin X$．

由同样的元素组成的集合X和Y称为相等（同一）的集合．在这种情形下，记作$X=Y$．

2. 子集

如果集合X的每一个元素也是集合Y的元素，那么称X为集合Y的部分或子集．在这种情形下，记作 $X\subset Y$，并说《X包含在Y中》．在相反的情形下，记作$X\not\subset Y$，并说《X不包含在Y中》．

换句话说，如果存在着元素$x\in X$，使$x\notin Y$，那么$X\not\subset Y$．因此，$X\not\subset Y$并不意味着X中的所有元素都不属于Y．

例　设A, B, C是自然数集合$\boldsymbol{N}$的子集，其中

$$A=\{x\in \boldsymbol{N} \mid x \vdots 2\}①,$$

$$B=\{x\in \boldsymbol{N} \mid x \vdots 3\},$$

① 记号$x \vdots 2$表示x能被2整除．下同．——译者注．

$$C=\{x\in \boldsymbol{N} \mid x \vdots 6\}.$$

(请注意记法!)显然，$C\subset A, C\subset B, A\not\subset B, B\not\subset A, A\not\subset C, B\not\subset C$.

为直观起见，在平面上以圆、正方形、矩形或任何别的图形表示集合．例如集合 A, B, C 可以表为如下的形式(参看图1).

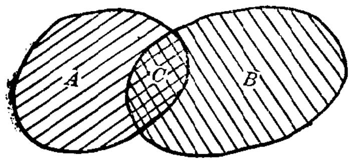

图 1

由子集的定义可知，任何集合X都是自身的子集，即$X\subset X$.

为方便起见，还要研究不包含任何一个元素的集合，这样的集合称为空集，并记为 $\varnothing$.

依据定义，空集是任何集合的子集.

于是，任何非空集合X有两个明显的子集：X和$\varnothing$，它们称为非真子集.

集合X的不同于X和$\varnothing$的任何子集称为集合X的真子集或正常子集.

例 集合C是集合A的，同时也是集合B的真子集．A、B、C三个集合都是自然数集合$\boldsymbol{N}$的真子集.

3. 集合的交

假设给定集合X和Y，所有属于集合X同时也属于集合Y的元素的集合称为集合X和Y的交(或公共部分)，并表示为$X\cap Y$.特别，交也可以是空集.

如果 $X\cap Y=\varnothing$，那么集合 X, Y称为不相交的集合.

例 集合C是集合A和B的交，即$C=A\cap B$.在图1中这个集合画了二重阴影.

4. 集合的差 余集

集合X中所有不属于集合Y的元素组成的集合，称为集合X与Y的差集，并表示为$X\setminus Y$.

例 $A\setminus B$是所有不能被3整除的偶数集合；$N\setminus A$是所有奇数的集合；$A\setminus N=\varnothing$.

如果$Y\subset X$，那么差$X\setminus Y$称为集合Y对于集合X的余集.

例如，所有奇数的集合是偶数集合对于集合$\boldsymbol{N}$的余集.

5. 集合的并

假设给定集合X和Y. 由X和由$Y\setminus X$的所有元素组成的集合称为集合X、Y的并，并表示为$X\cup Y$.

例 $A\cup B$是能被2或被3整除的所有自然数的集合（其中也包括能同时被2和3整除的自然数）. 在图1中这个集合由全部有阴影的区域表示.

6. 直积

假设给定集合X和Y. 我们考察一切可能的形如$(x;y)$的元素对，其中x是X中的元素，y是Y中的元素. 这样的元素对称为有序(元素)对，因为第一个元素总是取自X，而第二个元素总是取自Y.

所有的有序对$(x;y)$的集合，其中$x\in X$，$y\in Y$，称为集合X和Y的直积(或笛卡尔积)，并表示为$X\times Y$.

于是，按定义

$$X\times Y=\{(x;y)\mid x\in X, y\in Y\}.$$

例 假设X表示所有参加听讲的大学生的集合，而Y是一年中的所有月份的集合. 那么$X\times Y$是一切形如(大学生；月份)的对的集合. 特别地，所有形如(大学生；该大学生诞生的月份)的对的集合是以上集合的子集. 这里，每一个大学生在对中仅仅对应一个他诞生的月份.

为了描述直积，有时应用几何语言. 那么，集合 $X\times Y$ 的元素称为点，而 $x\in X$ 和 $y\in Y$ 是点 $(x;y)$ 的坐标.

练　　习

1. 证明集合交的运算满足交换律和结合律:

$$X\cap Y=Y\cap X.$$

$$X\cap(Y\cap Z)=(X\cap Y)\cap Z.$$

2. 证明 $$X\cap Y=X\setminus(X\setminus Y).$$

3. 证明 $$X\cup Y=Y\cup X,$$

$$X\cup(Y\cup Z)=(X\cup Y)\cup Z.$$

§2　对应　映射　函数　序列

1. 对应

假设给定集合 X、Y 和直积 $X\times Y$ 的子集 Z. 如果 $(x;y)\in Z$，那么说元素 $y\in Y$ 对应于元素 $x\in X$. 于是 Z 给出了集合 X 和 Y 的元素之间的对应.

用 Z^{-1} 表示所有形为 $(y;x)\in Y\times X$ 的对的集合，其中 $(x;y)\in Z$. 这个集合给出集合 Y 和 X 的元素之间的对应，称为给定对应的逆对应.

例　设 X 是大学生的集合，而 Y 是月份的集合. 那么，例如所有形为(大学生；他诞生的月份)的对的集合 Z 给出了集合 X、Y 之间的对应，它规定了每一个大学生对应他诞生的月份. 所有形如(月份；诞生在这个月份的大学生)的对的集合 Z^{-1} 给出了集合 Y 和 X 元素之间的逆对应.

如果每个元素 $x\in X$ 有且仅有一个元素 $y\in Y$ 与它对应，那么集合 X 和 Y 的元素之间的对应称为单值的.

集合 X 和 Y 的元素之间的对应，如果无论它本身或是它的逆都是单值对应，那么就称为双方单值的对应.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

例 对应(大学生；他的诞生月份)是单值的，而它的逆对应(月份；诞生在这个月的大学生)在一般情况下不是单值的，因为，首先可以有这样的月份，即在所考察的大学生中没有一人在这个月诞生；其次，在某一个月中诞生了几个大学生.

如果集合 X 和 Y 的元素之间能建立双方单值的对应，那么称X和 Y 是等价的.

和自然数集合等价的集合称为可数集.

如果集合等价于自己的某个真子集，那么称它为无穷集.

2. 映射

集合 X 和 Y 的元素之间的单值对应称为集合 X 到集合 Y 内的映射.

通常把给定的 X 到 Y 内的映射用一个字母表示，例如 f，并记为 f：$X \to Y$. 此时对应于元素 $x \in X$ 的元素 $y \in Y$ 称为元素 x 的像，并表示为 $f(x)$，而元素 x 称为元素 $f(x)$ 的原像.

映射 f：$X \to Y$ 的所有像的集合称为映射 f 的值集，并表示为 $f(X)$.

于是，按照定义

$$f(X) = \{y \in Y \mid y = f(x),\ x \in X\}.$$

如果 $f(X) = Y$，那么映射 f：$X \to Y$ 称为集合 X 到集合 Y上的映射.

如果对应 f：$X \to Y$ 双方单值，那么映射 f 称为可逆的；逆对应称为逆映射，并表示为 f^{-1}：$Y \to X$；或简单地表示为 f^{-1}.

从这些定义得到，如果映射 f：$X \to Y$ 是可逆的，那么对于任何的 $x \in X$，

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

和对任何的 $y \in Y$，

$$f(f^{-1}(y)) = y.$$

3. 函数

映射 f: $X \to Y$，其中 Y 是数集，那么该映射称为定义在集合 X 上取值于集合 Y 的函数. 集合 X 称为函数 f 的定义域，而 $f(X)$ 是函数 f 的值集.

如果集合 X 和 Y 都是数集，那么函数 f: $X \to Y$ 称为数值函数.

如果对应 $X \to Y$ 是双方单值的，那么数值函数 f: $X \to Y$ 称为可逆的；逆对应称为反函数，并表示为 f^{-1}: $Y \to X$.

定义在集合 X 上的数值函数可方便地表示为 $f(x)$, $x \in X$. 这里显然没有指出函数 f 的值所属的集合，因为它是数的集合.

作几点附注：

附注 1 我们考察函数

$$f(x) = x^2, x \in \boldsymbol{Q},$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 是所有有理数的集合；

$$f(x) = x^2, x \in \boldsymbol{N},$$

其中 $\boldsymbol{N}$ 是所有自然数的集合；

$$f(x) = x^2, x \in X,$$

其中 $X = \{1; 2; 3\}$. 这些函数是不同的，因为它们定义在不同的集合上.

附注 2 有时说，给定函数，例如

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{x - 16}, \tag{1}$$

而没有指出函数的定义域. 在这种情形下，函数的定义域理解为使给定公式有意义的所有数 x 的集合. 这个集合称为由公式给定的函数的自然定义域. 这样，函数(1)的自然定义域就是除 $x = 16$ 外的全体实数的集合，即集合 $X = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \neq 16\}$，其中 $\boldsymbol{R}$ 是全体实数的集合.

4. 序列

定义在全体自然数集合 N 上的函数称为序列. 简单地说,任何形如

$$f(n), n\in N$$

的函数均称为序列.

对于序列常常还应用其他的表示法. 例如, 把 $f(n)$ 表为 a_n, 并写做 $a_n, n\in N$, 或者更简单地表为 (a_n). 有时为了强调序列的特征,可把它写得更详细些:

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots.$$

每个 a_n 连同自己的号码 n, 即对$(n; a_n)$ 称为序列 (a_n)的元素.

依照这样的定义,任何序列的元素集合都是无穷集(更确切地说,是可数集).

称数 a_n 本身为序列 (a_n) 的第 n 个元素的值. 序列的值的集合也可以是有限集. 例如,序列 $a_n=(-1)^n, n\in N$ 的值的集合由 1 和 -1 两个数组成.

练　　习

1. 证明所有的有理数的集合是可数集.
2. 证明全部形如 $0.\alpha_1\alpha_2\cdots$的无尽十进位小数的集合不是可数集.
3. 证明所有自然数的集合 N 是无穷集.

§3　量词　否定

在数学定义和定理中,常常使用«对于每个(任何,一切)…»和«存在…使…»这种表达方式. 例如在以下定义中:

如果对于任何 $x\in X$, 满足条件 $x\in Y$, 则 $X\subset Y$.

如果存在 $x\in X$, 使 $x\notin Y$, 则 $X\not\subset Y$.

这些表达方式可分别地用 $\forall$ 和 $\exists$ 表示，并称为量词：$\forall$ 是全称量词，$\exists$ 是存在量词.

利用量词记号，可化上面的定义为以下形式：

如果 $\forall x\in X: x\in Y$，则 $X\subset Y$；

如果 $\exists x\in X: x\notin Y$，则 $X\not\subset Y$.

这里双点表示在它后面的命题对于从集合 X 中指出的元素(在第一种情形下指全体元素，在第二种情形下是指至少对于一个)来说是正确的.

如果有某一个命题 p，那么称对立的命题为命题 p 的否定，并表示为 $\neg p$(读做«非 p»).

例如，命题 $x\notin Y$ 是命题 $x\in Y$ 的否定，反之亦是. 因此

$$\neg(x\in Y)=x\notin Y;$$

$$\neg(x\notin Y)=x\in Y.$$

我们考察命题：«对于任何 $x\in X$，命题 p 是正确的». 它可简单地记作 $\forall x\in X: p$.

我们建立这个命题的否定运算：

$$\neg(\forall x\in X: p)=\exists x\in X: \neg p.$$

类似地

$$\neg(\exists x\in X: p)=\forall x\in X: \neg p.$$

第一章　有理数序列

我们认为,有理数的有关加、减、乘、除的基本性质是已知的.

在第一章，所指的数只理解为有理数，不然的话，将特别说明.

下面,基本上考察数集,即以数作为元素的集合. 我们对最重要的数集给出定义并引进记号.

假定给出两个数 a 和 b ,不妨设 $a<b$.

那么满足 $a<x<b$ 的所有数的集合称为具有端点 a 和 b 的开区间,并记为$]a;b[$. 这个定义简单地记作

$$]a;b[=\{x\mid a<x<b\}.$$

类似地,闭区间$[a;b]$定义为

$$[a;b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

应当强调地指出，闭区间包含了它的端点 a 和 b ，而开区间$]a;b[$既不包含 a 也不包含 b .

集合

$$]a;b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$

$$[a;b[=\{x\mid a\leqslant x<b\}$$

称为半开区间. 它们是开区间$]a;b[$添加一个端点而得到的.

所有上面定义的数集$]a;b[$, $[a;b]$, $]a;b]$, $[a;b[$都称为区间,或更确切地说是有穷区间. 集合

$$]a;+\infty[=\{x\mid a<x\}$$

$$[a;+\infty[=\{x\mid a\leqslant x\},$$

$$]-\infty;\ b[=\{x\mid x<b\},$$

$$]-\infty;\ b]=\{x\mid x\leqslant b\}$$

称为无穷区间，而用$]-\infty;\ +\infty[$表示的所有数的集合也是无穷区间．称其中的$]a;\ +\infty[$，$]-\infty;\ b[$，$]-\infty;\ +\infty[$为无穷开区间．

应予指出，这里记号$-\infty$，$+\infty$并没有独立的数值，它们仅仅用来作为相应集合的记号．

为直观起见，可以用水平直线上的点来表示数．在这条直线上，某一个点O取为读数的起点，并对应数 0，每一个数 $r>0$[1]对应的点位于O点的右边，且该点是以O点为始点的长为r的线段的终点；而每一个数 $r<0$ 所对应的点位于点O的左边，且该点是以O点为终点的长为$|r|$的线段的起点．所以称全部数(这里以及本章的每一处仅指有理数)的集合为数直线，而每一个数是这数直线上的点．

如果给定某个数r，那么包含数r的任何开区间(有穷的或无穷的)称为数r的邻域或点r的邻域．例如，对于任何自然数n，开区间$]r-\frac{1}{n};\ r+\frac{1}{n}[$是点$r$的邻域．同样，任何形为$]r-\frac{1}{n};\ r+\frac{2}{n}[$的开区间，其中$n\in N$，都是数$r$的邻域(参看图 2)．

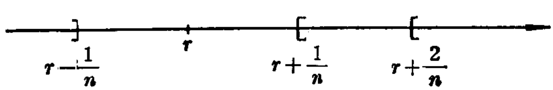

图 2

于是，如果$r\in]a;b[$，则称开区间$]a;b[$为数(或点)r的邻域．特别是，任何形如$]r-\varepsilon;\ r+\varepsilon[$的开区间，其中$\varepsilon>0$，都是数$r$的邻域．这个邻域称为数$r$的$\varepsilon$-邻域并记为$O_\varepsilon(r)$．

当我们对数r的某个邻域的大小和形式并不关心时，这个邻

(1) 原书为 $r\geqslant 0$. ——译者注

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com