现代数学基础丛书

解析数论基础

●潘承洞 潘承彪 著

科学出版社

现代数学基础丛书

解析数论基础

潘承洞 潘承彪 著

科学出版社
1999

DV72/11

内 容 简 介

哥德巴赫猜想、孪生素数、素数分布、华林问题、除数问题、圆内整点问题、整数分拆及黎曼猜想等著名数论问题吸引了古今无数的数学爱好者．本书全面详细地讨论了迄今为止研究这些问题的重要的分析方法、理论和结果，介绍了它们的历史及最新进展，是研究这些问题必不可少的入门书．

读者对象是大学高年级学生、研究生、数论工作者以及具有一定数论知识及分析知识的数学爱好者．

现代数学基础丛书

解 析 数 论 基 础

潘承洞 潘承彪 著

责任编辑 梅 霖 刘嘉善

科 学 出 版 社 出版

邮政编码 100717

北京东黄城根北街16号

中国科学院印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1991年2月第 一 版　开本：850×1168 1/32

1999年5月第三次印刷　印张：29 1/8

印数：3 301—5 300　字数：768 000

ISBN 7-03-000929-0/O·227

定 价：45.00 元

序

我们的老师闵嗣鹤教授50年代曾在北京大学数学力学系为数届大学生、研究生讲授解析数论，并把讲课内容整理补充，写成了《数论的方法，上、下册》(科学出版社，1958, 1981) 一书。这是国内第一本解析数论基础教材，为在我国开展解析数论的研究和培养人才方面起了很大作用. 近三十年来，解析数论得到了很大的发展，形成了一些新的分支(如 Diophantus 逼近，超越数论，模形式等)，国际上也出版了一些内容和侧重面不同的解析数论基础书与专著。近年来国内热心于学习研究解析数论的人也愈来愈多. 因此，为了适应这种进展和读者的需要，出版一些解析数论各分支的基础教材就是十分必要的了. 1983 年在王元同志和科学出版社的建议下，我们就着手写一本能够比较全面地介绍解析数论的基本方法、基本问题和基本理论，并反映它的近代发展的基础教材.

从 1978 年至今，我们在山东大学和北京大学数学系为大学生、研究生开设了多届解析数论课和讨论班，编写了讲义，逐步积累了各方面的内容，这本书就是在这样的基础上整理、补充而成的. 本书内容是这样安排的：

(一) 第一至六章是必要的分析与函数论方面的预备知识，这些内容在大学课程中一般是不讲的；

(二) 以后各章介绍基本的研究方法，主要包括以下几部分：(1) Riemann ζ 函数与 Dirichlet L 函数的基本理论(第七至十七章，第二十三至二十五章)，Dedekind η 函数的基本理论(第三十五章)；(2) 复变积分法(第六章 §5)；(3) 指数和方法(第十九，二十一，二十二章及第二十六章 §3)；(4) 圆法(第二十，二十六，三十六章)；(5) 大筛法，ζ 函数与 L 函数的零点分布(第二十八，二十九，三十，三十三章)；(6) 筛法(第三十二章)；

(三) 讨论了一些主要问题：(1) 素数分布(第十一，十八，三十一，三十四章，第二十八章 §6，及第三十二章 §6 定理

8)；(2) Goldbach 猜想与孪生素数猜想(第二十，三十二章)；(3) Waring 问题(第二十六章)；(4) Dirichlet 除数问题(第二十七章)；(5) 无限制整数分拆问题(第三十六章).

本书不包括 Kloostermann 指数和及最近由此得到的解析数论的一些新结果. 因为这些内容要涉及与传统的解析数论方法截然不同的一个十分重要的领域，但这是一个值得注意的进展. 通过这八年的教学实践，我们认为本书所包含的内容可以为研究生在传统解析数论方面打下一个相当坚实的基础，并能比较容易地阅读文献和独立地进行研究工作. 当然，对于只要求知道一点解析数论最基本知识的读者，选读第一至二十及三十二章的部分内容就足够了.

同通常编写基础书所遵循的原则一样，我们重点是讨论各种基本方法，以及应用于著名经典问题所得到的基本结果. 当同一个内容有不同的重要处理方法时，我们将把这些方法及所得结果都加以介绍(例如，在第十九章中介绍了估计线性素变数指数和的五种方法；在第二十一，二十二章中分别介绍了估计 Weyl 指数和的两种方法；在第三十一章中介绍了证明算术级数中素数分布的均值定理的三种方法；以及第三十二章中介绍了各种筛法). 为了能说清楚各种方法是如何运用于这些著名问题，我们所证明的结果往往不是最好的(例如，第二十四章的 ζ 函数与 L 函数的阶估计；第二十六章的 Waring 问题；第二十七章的除数问题；以及第三十二章 §6 定理 10 关于 $Z(x,h)$ 的上界估计等). 因为一般说来在解析数论中为了得到最好的结果，证明总是十分繁琐的，需要高度复杂的技巧和计算，于是冲淡了主要的环节，而这对初学者是没有好处的. 此外，对基本方法的适用对象、适用范围，以及对方法本身的深刻领会和恰到好处的熟练应用，是进行科学研究的一种重要能力，因而也是进行科学训练所应遵循的原则和重要的目的之一.

本书绝大多数章节后都配有习题，对较难的习题给出了提示. 有的章节习题数量相当多，可选做一部分. 这些习题有的是给出了正

文中定理的新证明，有的是正文内容的进一步讨论和延伸，而有的则是介绍了另一些重要方法和著名问题. 所以，即使只是把这些习题看一遍也是会有益的.

阅读本书需要具备大学数学系的分析、复变函数论和部分泛函分析(仅在第二十八章§3, §4 需要)的知识. 当然也要求学过初等数论，内容相当于华罗庚的《数论导引》的前六章，或闵嗣鹤与严士健的《初等数论》.

本书中的公式、定理、引理与推论都按每节编号，习题按每章编号. 每章前言中的公式按大写字母 A, B, C, … 排列. 在引用时，式(3)指同一节的公式(3)；式(2.3)是指同一章的§2 的公式(3)；式(3.2.3)是指第三章§2 的公式(3)；习题 3 是指同一章的习题 3; 习题 8.3 是指第八章的习题 3. 依此类推.

本书所列出的参考书目仅是在写本书时所参考的著作，但并不齐全，有关的历史资料和文献大多可在所列书目中找到. 写作本书时参考的其它资料将在有关地方指出. 本书中没有介绍的重要的新结果，将在正文中给出有关的文献.

本书各章书稿都经我们的研究生仔细阅读过，他们指出了其中不少疏忽和笔误之处，在此向他们表示衷心的感谢.

本书的写作与出版得到了国家教育委员会高等学校科学技术基金的资助；王元、裴定一同志仔细审阅了本书原稿，提出了宝贵意见; 梅霖同志为本书的编辑出版做了大量有益的工作. 在此，谨向他们致以衷心的谢忱.

由于我们水平有限，书中错误不当之处还一定不少，欢迎批评指正.

饮水思源，我们的老师闵嗣鹤教授为发展我国解析数论、培养年青的解析数论工作者作出了杰出的贡献，但不幸于1973 年10 月 10 日过早地离开了我们. 谨以此书表达我们对他的深切怀念，感谢他对我们的亲切教诲、关心和爱护.

潘承洞　潘承彪

一九八七年七月于青岛大学

符 号 说 明

以下是全书通用符号的说明，如果在个别地方有不同的含意，则将明确申明.

$p, p', p_1, p_2, \cdots$	素数
$a \mid b$	a 整除 b
$a \nmid b$	a 不能整除 b
$p^k \\| b$	$p^k \mid b$ 但 $p^{k+1} \nmid b$
(a, b)	a 和 b 的最大公约数；或表示开区间 $a<x<b$（a, b 是实数）
$(a, b, \cdots, c)$	$a, b, \cdots, c$ 的最大公约数
$[a, b]$	a 和 b 的最小公倍数；或表示闭区间 $a \leqslant x \leqslant b$（$a, b$ 是实数）
$[a, b, \cdots, c]$	$a, b, \cdots, c$ 的最小公倍数
$a \equiv b \pmod q$	$q>0, q \mid a-b$
$a \equiv b(q)$	即 $a \equiv b \pmod q$
$[x]$	不超过 x 的最大整数
$\{x\}$	$x-[x]$
$\\|x\\|$	$\{x\}$ 和 $1-\{x\}$ 中较小的一个；或赋范空间元素的范数
$\sum\limits_{n \leqslant x}, \sum\limits_{n<x}; \sum\limits_{p \leqslant x}, \sum\limits_{p<x}$	对正整数 $n \leqslant x, n<x$，素数 $p \leqslant x$，$p<x$ 求和
$b_1(u)$, $((u))$	均表 $u-[u]-1/2$
$e(z)$	$e^{2\pi i z}$，z 复数
$\int\limits_{(a)}$	$\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}$，$a$ 实数

$\sum_{n=1}^{q}{}'$	对如下整数 n 求和：$1 \leqslant n \leqslant q, (n, q)=1$
$\sum_{n \bmod q}$	对模 q 的一个完全剩余系求和
$\sum_{n \bmod q}{}'$	对模 q 的一个简化(缩)剩余系求和
γ	Euler 常数，等于 $\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\log N\right\}=0.577215\cdots$；或表示 $\zeta(s)$，$L(s,\chi)$ 的非显然零点 ρ 的虚部：$\rho=\beta+ir$
$d(n)$，$d_2(n)$	n 的正除数的个数，称为除数函数
$d_k(n)$	n 表为 k 个正整数的乘积的不同表法(次序不同算作不同的表法)的个数
$\sum_{d\mid n}$，$\prod_{d\mid n}$	对 n 的正除数求和，求积
$\sum_{p\mid n}$，$\prod_{p\mid n}$	对 n 的素除数求和，求积
$\sigma_s(n)$	$\sum_{d\mid n} d^s$，s 复数
$\omega(n)$	n 的不同的素因子的个数，$\omega(1)=0$
$\Omega(n)$	n 的所有素因子的个数(按重数计算)，$\Omega(1)=0$
$\mu(n)$	Möbius 函数：$\mu(1)=1$；n 是无平方因子数时 $\mu(n)=(-1)^{\omega(n)}$；其它情形 $\mu(n)=0$
$\Lambda(n)$	Mangoldt 函数：当 $n=p^k(k\geqslant 1)$ 时 $\Lambda(n)=\log p$，其它情形 $\Lambda(n)=0$
$\varphi(n)$	Euler 函数，等于这样的整数 l 的个数：$1\leqslant l\leqslant n,(l,n)=1$
$\frac{F'}{F}(s)$	$\frac{F'(s)}{F(s)}$
$\Gamma(s)$	Euler Γ 函数，见式(3.2.1)
χ，$\chi(n)$	Dirichlet 特征，见定义 13.1.1
$\chi \bmod q$，$\chi(n;q)$	模 q 的Dirichlet 特征，见定义13.1.1

$\chi \bmod q \Leftrightarrow \chi^* \bmod q^*$	定义见§13.2末
$G(l,\chi)$	Gauss 和，等于 $\sum_{n=1}^{q}\chi(n)e(ln/q)$（见式(13.3.3)）
$C_q(l)$	Ramanujan 和，等于 $\sum_{n=1}^{q}{}' e(ln/q)$（见式(13.3.10)）
$\tau(\chi)$	$G(1,\chi)$
$\pi(x)$	不超过 x 的素数个数
$\theta(x)$	$\sum_{p\leqslant x}\log p$
$\psi(x)$	$\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)$
$\pi(x,q,l)$	素数 $p\leqslant x, p\equiv l \pmod q$ 的个数
$\theta(x,q,l)$	$\sum_{x\geqslant p\equiv l\,(q)}\log p$
$\psi(x,q,l)$	$\sum_{x\geqslant n\equiv l\,(q)}\Lambda(n)$
$\psi(x,\chi)$	$\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\chi(n)$
$\mathrm{Li}\, x$	对数积分，等于 $\lim_{\delta\to 0}\left(\int_0^{1-\delta}+\int_{1+\delta}^{x}\right)\frac{du}{\log u}$
$\mathrm{li}\, x$	对数积分，等于 $\int_2^x \frac{du}{\log u}$，$x\geqslant 2$
$\sum_{\chi \bmod q}{}^*$	对模 q 的全体原特征(见定义13.2.1)求和
$\left(\frac{a}{p}\right)$	Legendre 符号
$\left(\frac{m}{n}\right)$	Jacobi 符号
RH	Riemann 猜想（假设）（见§12.2）

GRH	广义 Riemann 猜想(假设)(见§14.2末)
$f(x)=O(g(x))$	存在正数 A(和 x 无关)，在指定的某一 x 取值范围内有 $\lvert f(x)\rvert \leqslant Ag(x)$，$A$ 称为“O 常数”. 如果正数 A 和某些参数有关，有时为了明确起见把这些参数记在符号 O 的右下角. 例如 $f(x)=O_\lambda(g(x))$ 表示 A 和所讨论问题中的参数 λ 有关
$f(x) \ll g(x)$	即 $f(x)=O(g(x))$，A 称为“$\ll$ 常数”，A 和某些参数有关时，可记在符号 $\ll$ 的右下角
$\zeta(s)$	Riemann ζ 函数，见式(6.1.11)，及§7.1
$\zeta(s,a)$	Hurwitz ζ 函数，见式(6.1.12)，及§7.1
$F(s,\theta)$	周期 ζ 函数，见式(6.1.13)，及§7.1
$L(s,\chi)$	Dirichlet L 函数，见式(6.1.14)，及§14.1
$s(h,k)$	Dedekind 和，见式(35.2.3)

目　　录