

现代数学基础丛书

解析数论基础

●潘承洞 潘承彪 著



科学出版社

0156.4
P08-2

427021

现代数学基础丛书

解析数论基础

潘承洞 潘承彪 著



00427021



科学出版社

1999

DV 72 / 11
内 容 简 介

哥德巴赫猜想、孪生素数、素数分布、华林问题、除数问题、圆内整点问题、整数分拆及黎曼猜想等著名数论问题吸引了古今无数的数学爱好者。本书全面详细地讨论了迄今为止研究这些问题的重要的分析方法、理论和结果，介绍了它们的历史及最新进展，是研究这些问题必不可少的人门书。

读者对象是大学高年级学生、研究生、数论工作者以及具有一定数论知识及分析知识的数学爱好者。

现代数学基础丛书
解 析 数 论 基 础
潘承洞、潘承彪 著
责任编辑 梅霖 刘嘉善
科学出版社出版
邮政编码 100717
北京东黄城根北街16号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1991年2月第一版 开本：850×1168 1/32
1999年5月第三次印刷 印张：29 1/8
印数：3 301—5 300 字数：768 000

ISBN 7-03-000929-0/O·227

定 价：45.00 元

序

我们的老师闵嗣鹤教授50年代曾在北京大学数学力学系为历届大学生、研究生讲授解析数论，并把讲课内容整理补充，写成了《数论的方法，上、下册》（科学出版社，1958，1981）一书。这是国内第一本解析数论基础教材，为在我国开展解析数论的研究和培养人才方面起了很大作用。近三十年来，解析数论得到了很大的发展，形成了一些新的分支（如 Diophantus 逼近，超越数论，模形式等），国际上也出版了一些内容和侧重面不同的解析数论基础书与专著。近年来国内热心于学习研究解析数论的人也愈来愈多。因此，为了适应这种进展和读者的需要，出版一些解析数论各分支的基础教材就是十分必要的了。1983年在王元同志和科学出版社的建议下，我们就着手写一本能够比较全面地介绍解析数论的基本方法、基本问题和基本理论，并反映它的近代发展的基础教材。

从1978年至今，我们在山东大学和北京大学数学系为大学生、研究生开设了多届解析数论课和讨论班，编写了讲义，逐步积累了各方面的内容，这本书就是在这样的基础上整理、补充而成的。本书内容是这样安排的：

（一）第一至第六章是必要的分析与函数论方面的预备知识，这些内容在大学课程中一般是不讲的；

（二）以后各章介绍基本的研究方法，主要包括以下几部分：
(1) Riemann ζ 函数与 Dirichlet L 函数的基本理论(第七至十七章，第二十三至二十五章)，Dedekind η 函数的基本理论(第三十五章)；(2) 复变积分法(第六章 §5)；(3) 指数和方法(第十九，二十一，二十二章及第二十六章 §3)；(4) 圆法(第二十，二十六，三十六章)；(5) 大筛法， ζ 函数与 L 函数的零点分布(第二十八，二十九，三十，三十三章)；(6) 筛法(第三十二章)；

（三）讨论了一些主要问题：(1) 素数分布(第十一，十八，三十一，三十四章，第二十八章 §6，及第三十二章 §6 定理

8); (2) Goldbach 猜想与孪生素数猜想(第二十, 三十二章); (3) Waring 问题(第二十六章); (4) Dirichlet 除数问题(第二十七章); (5) 无限制整数分拆问题(第三十六章).

本书不包括 Kloostermann 指数和及最近由此得到的解析数论的一些新结果. 因为这些内容要涉及与传统的解析数论方法截然不同的一个十分重要的领域, 但这是一个值得注意的进展. 通过这八年的教学实践, 我们认为本书所包含的内容可以为研究生在传统解析数论方面打下一个相当坚实的基础, 并能比较容易地阅读文献和独立地进行研究工作. 当然, 对于只要求知道一点解析数论最基本知识的读者, 选读第一至二十及三十二章的部分内容就足够了.

同通常编写基础书所遵循的原则一样, 我们重点是讨论各种基本方法, 以及应用于著名经典问题所得到的基本结果. 当同一个内容有不同的重要处理方法时, 我们将把这些方法及所得结果都加以介绍(例如, 在第十九章中介绍了估计线性素变数指数和的五种方法; 在第二十一, 二十二章中分别介绍了估计 Weyl 指数和的两种方法; 在第三十一章中介绍了证明算术级数中素数分布的均值定理的三种方法; 以及第三十二章中介绍了各种筛法). 为了能说清楚各种方法是如何运用于这些著名问题, 我们所证明的结果往往不是最好的(例如, 第二十四章的 ζ 函数与 L 函数的阶估计; 第二十六章的 Waring 问题; 第二十七章的除数问题; 以及第三十二章 §6 定理 10 关于 $Z(x, h)$ 的上界估计等). 因为一般说来在解析数论中为了得到最好的结果, 证明总是十分繁琐的, 需要高度复杂的技巧和计算, 于是冲淡了主要的环节, 而这对初学者是没有好处的. 此外, 对基本方法的适用对象、适用范围, 以及对方法本身的深刻领会和恰到好处的熟练应用, 是进行科学研究的一种重要能力, 因而也是进行科学训练所应遵循的原则和重要的目的之一.

本书绝大多数章节后都配有习题, 对较难的习题给出了提示. 有的章节习题数量相当多, 可选做一部分. 这些习题有的是给出了正

文中定理的新证明,有的是正文内容的进一步讨论和延伸,而有的则是介绍了另一些重要方法和著名问题.所以,即使只是把这些习题看一遍也是会有益的.

阅读本书需要具备大学数学系的分析、复变函数论和部分泛函分析(仅在第二十八章§3, §4需要)的知识.当然也要求学过初等数论,内容相当于华罗庚的《数论导引》的前六章,或闵嗣鹤与严士健的《初等数论》.

本书中的公式、定理、引理与推论都按每节编号,习题按每章编号.每章前言中的公式按大写字母A, B, C, ... 排列.在引用时,式(3)指同一节的公式(3);式(2.3)是指同一章的§2的公式(3);式(3.2.3)是指第三章§2的公式(3);习题3是指同一章的习题3;习题8.3是指第八章的习题3.依此类推.

本书所列出的参考书目仅是在写本书时所参考的著作,但并不齐全,有关的历史资料和文献大多可在所列书目中找到.写作本书时参考的其它资料将在有关地方指出.本书中没有介绍的重要的新结果,将在正文中给出有关的文献.

本书各章书稿都经我们的研究生仔细阅读过,他们指出了其中不少疏忽和笔误之处,在此向他们表示衷心的感谢.

本书的写作与出版得到了国家教育委员会高等学校科学技术基金的资助;王元、裴定一同志仔细审阅了本书原稿,提出了宝贵意见;梅霖同志为本书的编辑出版做了大量有益的工作.在此,谨向他们致以衷心的感谢.

由于我们水平有限,书中错误不当之处还一定不少,欢迎批评指正.

饮水思源,我们的老师闵嗣鹤教授为发展我国解析数论、培养年青的解析数论工作者作出了杰出的贡献,但不幸于1973年10月10日过早地离开了我们.谨以此书表达我们对他的深切怀念,感谢他对我们的亲切教诲、关心和爱护.

潘承洞 潘承彪

一九八七年七月于青岛大学

符 号 说 明

以下是全书通用符号的说明,如果在个别地方有不同的含意,则将明确申明.

p, p', p_1, p_2, \dots	素数
$a b$	a 整除 b
$a \nmid b$	a 不能整除 b
$p^k \parallel b$	$p^k b$ 但 $p^{k+1} \nmid b$
(a, b)	a 和 b 的最大公约数; 或表示开区间 $a < x < b$ (a, b 是实数)
(a, b, \dots, c)	a, b, \dots, c 的最大公约数
$[a, b]$	a 和 b 的最小公倍数; 或表示闭区间 $a \leq x \leq b$ (a, b 是实数)
$[a, b, \dots, c]$	a, b, \dots, c 的最小公倍数
$a \equiv b \pmod{q}$	$q > 0, q a - b$
$a \equiv b (q)$	即 $a \equiv b \pmod{q}$
$[x]$	不超过 x 的最大整数
$\{x\}$	$x - [x]$
$\ x\ $	$\{x\}$ 和 $1 - \{x\}$ 中较小的一个; 或赋范 空间元素的范数
$\sum_{n \leq x}, \sum_{n < x}; \sum_{p \leq x}, \sum_{p < x}$	对正整数 $n \leq x, n < x$, 素数 $p \leq x, p < x$ 求和
$b_1(u), ((u))$	均表 $u - [u] - 1/2$
$e(z)$	$e^{2\pi iz}$, z 复数
\int	$a + i\infty$
\int	\int , a 实数
(a)	$a - i\infty$

$$\sum_{n=1}^q \prime$$

$$\sum_{n \bmod q}$$

对如下整数 n 求和: $1 \leq n \leq q, (n, q) = 1$

对模 q 的一个完全剩余系求和

$$\sum_{n \bmod q} \prime$$

$$\gamma$$

对模 q 的一个简化(缩)剩余系求和

Euler 常数, 等于 $\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N \right\} =$

$0.577215 \dots$; 或表示 $\zeta(s), L(s, \chi)$ 的非显然零点 ρ 的虚部: $\rho = \beta + i\gamma$

$d(n), d_2(n)$

n 的正除数的个数, 称为除数函数

$d_k(n)$

n 表为 k 个正整数的乘积的不同表法(次序不同算作不同的表法)的个数

$$\sum_{d|n} \prod_{d|n}$$

对 n 的正除数求和, 求积

$$\sum_{p|n} \prod_{p|n}$$

对 n 的素除数求和, 求积

$\sigma_s(n)$

$\sum_{d|n} d^s, s$ 复数

$\omega(n)$

n 的不同的素因子的个数, $\omega(1) = 0$

$\Omega(n)$

n 的所有素因子的个数(按重数计算),

$\Omega(1) = 0$

$\mu(n)$

Möbius 函数: $\mu(1) = 1; n$ 是无平方因子数时 $\mu(n) = (-1)^{\omega(n)}$; 其它情形 $\mu(n) = 0$

$\Lambda(n)$

Mangoldt 函数: 当 $n = p^k (k \geq 1)$ 时 $\Lambda(n) = \log p$, 其它情形 $\Lambda(n) = 0$

$\varphi(n)$

Euler 函数, 等于这样的整数 l 的个数: $1 \leq l \leq n, (l, n) = 1$

$$\frac{F'(s)}{F(s)}$$

$$\frac{F'(s)}{F(s)}$$

$\Gamma(s)$

Euler Γ 函数, 见式(3.2.1)

$\chi, \chi(n)$

Dirichlet 特征, 见定义 13.1.1

$\chi \bmod q, \chi(n; q)$

模 q 的 Dirichlet 特征, 见定义 13.1.1

$\chi \bmod q \Leftrightarrow \chi^* \bmod q^*$	定义见 §13.2 末
$G(l, \chi)$	Gauss 和, 等于 $\sum_{n=1}^q \chi(n) e(\ln n/q)$ (见式 (13.3.3))
$C_q(l)$	Ramanujan 和, 等于 $\sum_{n=1}^q 'e(\ln n/q)$ (见式 (13.3.10)) •
$\tau(\chi)$	$G(1, \chi)$
$\pi(x)$	不超过 x 的素数个数
$\theta(x)$	$\sum_{p \leq x} \log p$
$\psi(x)$	$\sum_{n \leq x} \Lambda(n)$
$\pi(x, q, l)$	素数 $p \leq x, p \equiv l \pmod{q}$ 的个数
$\theta(x, q, l)$	$\sum_{x \geq p \equiv l \pmod{q}} \log p$
$\psi(x, q, l)$	$\sum_{x \geq n \equiv l \pmod{q}} \Lambda(n)$
$\psi(x, \chi)$	$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \chi(n)$
$\text{Li } x$	对数积分, 等于 $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_0^{1-\delta} + \int_{1+\delta}^x \right) \frac{du}{\log u}$
$\text{li } x$	对数积分, 等于 $\int_2^x \frac{du}{\log u}, x \geq 2$
$\sum_{\chi \bmod q}^*$	对模 q 的全体原特征 (见定义 13.2.1) 求和
$\left(\frac{a}{p} \right)$	Legendre 符号
$\left(\frac{m}{n} \right)$	Jacobi 符号
RH	Riemann 猜想 (假设) (见 §12.2)

GRH	广义 Riemann 猜想 (假设) (见 §14.2 末)
$f(x) = O(g(x))$	存在正数 A (和 x 无关), 在指定的某一 x 取值范围内有 $ f(x) \leq Ag(x)$, A 称为“ O 常数”. 如果正数 A 和某些参数有关, 有时为了明确起见把这些参数记在符号 O 的右下角. 例如 $f(x) = O_\lambda(g(x))$ 表示 A 和所讨论问题中的参数 λ 有关
$f(x) \ll g(x)$	即 $f(x) = O(g(x))$, A 称为“ \ll 常数”, A 和某些参数有关时, 可记在符号 \ll 的右下角
$\zeta(s)$	Riemann ζ 函数, 见式 (6.1.11), 及 §7.1
$\zeta(s, a)$	Hurwitz ζ 函数, 见式 (6.1.12), 及 §7.1
$F(s, \theta)$	周期 ζ 函数, 见式 (6.1.13), 及 §7.1
$L(s, \chi)$	Dirichlet L 函数, 见式 (6.1.14), 及 §14.1
$s(h, k)$	Dedekind 和, 见式 (35.2.3)

目 录

序	i
符号说明	iv
绪论	1
第一章 Fourier 变换	17
§1. Fourier 积分与 Fourier 变换	17
§2. Mellin 变换的反转公式	19
§3. Laplace 变换的反转公式	20
第二章 求和公式	22
§1. Abel 分部求和法	22
§2. Euler - MacLaurin 求和法	24
§3. Poisson 求和法	29
习 题	35
第三章 Γ 函数	39
§1. 无穷乘积	39
§2. Γ 函数的基本性质	43
§3. Stirling 公式	49
习 题	55
第四章 几个函数论定理	57
§1. Jensen 定理	57
§2. Borel - Carathéodory 定理	60
§3. Hadamard 三圆定理	62
§4. Phragmén - Lindelöf 定理	63
第五章 有穷阶整函数	67
§1. 有穷阶整函数	67
§2. 收敛指数与典型乘积	69
§3. Hadamard 因式分解定理	74
第六章 Dirichlet 级数	79
§1. 定义与收敛性	79
§2. 唯一性定理	85

§3. 常义 Dirichlet 级数的运算	86
§4. 常义 Dirichlet 级数的 Euler 乘积表示	92
§5. 常义 Dirichlet 级数的 Perron 公式	96
§6. 在垂直线上的阶	106
§7. 积分均值公式	109
习 题	110
第七章 $\zeta(s)$ 的函数方程与基本性质	123
§1. 函数方程(一)(Euler-MacLaurin 求和法)	123
§2. 函数方程(二)(复变积分方法)	130
§3. 函数方程(三)(Poisson 求和法)	134
§4. 在 $s=1$ 附近的性质	137
§5. 最简单的阶估计	139
习 题	143
第八章 $\xi'(s)/\xi(s)$ 的零点展开式	156
§1. $\xi(s)$ 和 $\zeta(s)$ 的无穷乘积	156
§2. $\xi'(s)/\xi(s)$ 和 $\zeta'(s)/\zeta(s)$ 的零点展开式	157
§3. 非显然零点的简单性质	160
§4. 零点展开式的简化	162
§5. $\log \zeta(s)$	164
习 题	166
第九章 $\zeta(s)$ 的非显然零点的个数	168
§1. 基本关系式	168
§2. 渐近公式(一)	169
§3. 渐近公式(二)	171
§4. $S(T)$ 的性质	175
习 题	179
第十章 $\zeta(s)$ 的非零区域	182
§1. $\zeta(1+it) \neq 0$	182
§2. 非零区域(一)(整体方法)	184
§3. 非零区域(二)(局部方法)	186
习 题	193

第十一章 素数定理	196
§1. 问题的提出和进展	196
§2. $\psi(x)$ 的表示式	199
§3. 素数定理	202
§4. Ω 定理	205
习 题	209
第十二章 Riemann 的贡献	216
§1. 划时代的论文	216
§2. Riemann 猜想	219
§3. Riemann 猜想的推论及等价命题	222
习 题	226
第十三章 Dirichlet 特征	229
§1. 定义与基本性质	229
§2. 原特征	236
§3. Gauss 和	243
§4. 简单的特征和估计	247
习 题	251
第十四章 $L(s, \chi)$ 的函数方程与基本性质	258
§1. 定义与最简单的性质	258
§2. 函数方程	260
§3. 最简单的阶估计	267
习 题	270
第十五章 $L'(s, \chi)/L(s, \chi)$ 的零点展开式	272
§1. $\xi(s, \chi)$ 和 $L(s, \chi)$ 的无穷乘积	272
§2. $L'(s, \chi)/L(s, \chi)$ 的零点展开式	273
§3. 非显然零点的简单性质	275
§4. $\log L(s, \chi)$	276
习 题	277
第十六章 $L(s, \chi)$ 的非显然零点的个数	278
§1. 基本关系式	278
§2. 渐近公式	279

§3. 一点说明	280
习 题	280
第十七章 $L(s, \chi)$ 的非零区域	281
§1. 非零区域 (一)	281
§2. Page 定理	295
§3. Siegel 定理	299
§4. 非零区域 (二)	303
习 题	304
第十八章 算术数列中的素数定理	307
§1. $\psi(x, \chi)$ 的表示式	307
§2. 算术数列中的素数定理	313
习 题	317
第十九章 线性素变数三角和估计	319
§1. Виноградов 方法	320
§2. Vaughan 方法	327
§3. 零点密度方法	332
§4. 复变积分法	337
§5. 小 q 情形的估计	344
习 题	347
第二十章 Goldbach 猜想	353
§1. Goldbach 问题中的圆法	354
§2. 三素数定理 (非实效方法)	358
§3. 三素数定理 (实效方法)	364
§4. Goldbach 数	368
习 题	376
第二十一章 Weyl 指数和估计 (—) (van der Corput 方法)	379
§1. 基本关系式	380
§2. 基本估计式	387
§3. 基本不等式	390
§4. Weyl 和估计	393
§5. 反转公式	395

§6. 指数对理论	403
习 题	410
第二十二章 Weyl 指数和估计 (二) (Виноградов 方法)	412
§1. 指数和的均值估计	412
§2. Weyl 和估计 (a)	424
§3. Weyl 和估计 (b)	428
习 题	435
第二十三章 $\zeta(s)$ 与 $L(s, \chi)$ 的渐近公式	442
§1. $\zeta(s, a)$ 的渐近公式 (一)	442
§2. $L(s, \chi)$ 的渐近公式	447
§3. $\zeta(s, a)$ 的渐近公式 (二)	452
§4. $\zeta(s, a)$ 的渐近公式 (三)	461
§5. 另一种类型的渐近公式	472
习 题	475
第二十四章 $\zeta(s)$ 与 $L(s, \chi)$ 的阶估计	477
§1. $\zeta(s, a)$ 的阶估计	477
§2. $L(s, \chi)$ 的阶估计	485
习 题	491
第二十五章 $\zeta(s)$ 与 $L(s, \chi)$ 的积分均值定理	492
§1. $\zeta(s, a)$ 的二次积分均值定理 (一)	493
§2. $\zeta(s, a)$ 的二次积分均值定理 (二)	502
§3. $L(s, \chi)$ 的二次积分均值定理	509
§4. $\zeta(s)$ 的四次积分均值定理	512
习 题	520
第二十六章 Waring 问题	522
§1. Waring 问题中的圆法	525
§2. 基本区间上的积分的渐近公式	526
§3. 完整三角和估计	531
§4. 奇异级数	536
§5. 奇异积分	541
§6. 余区间上的积分的估计	542

§ 7. 解数的渐近公式	543
§ 8. $G(k)$ 的上界估计的改进	544
习 题	548
第二十七章 Dirichlet 除数问题	558
§ 1. 问题与研究方法	558
§ 2. 第一种方法	561
§ 3. 第二种方法	568
习 题	573
第二十八章 大筛法	577
§ 1. 大筛法的分析形式	578
§ 2. Gallagher 方法	579
§ 3. 对偶原理的应用 (一)	582
§ 4. 对偶原理的应用 (二)	590
§ 5. 大筛法的算术形式	600
§ 6. Brun - Titchmarsh 定理的改进	607
习 题	615
第二十九章 Dirichlet 多项式的均值估计	621
§ 1. 大筛法型的特征和估计	621
§ 2. Dirichlet 多项式的混合型均值估计	629
§ 3. $\zeta(s)$ 与 $L(s, \chi)$ 的四次均值估计	636
§ 4. Halász 方法	643
习 题	650
第三十章 零点分布 (一)	652
§ 1. 方法概述	653
§ 2. 零点密度定理	660
§ 3. 零点密度定理的改进	665
§ 4. ζ 函数的零点密度定理的进一步改进	668
§ 5. 小区间中的素数分布	673
习 题	677
第三十一章 算术数列中素数的平均分布	678
§ 1. 问题的转化	679
§ 2. 第一个证明 (零点密度方法)	683

§3. 第二个证明(复变积分法)	685
§4. 第三个证明(Vaughan方法)	690
习 题	696
第三十二章 筛法	698
§1. 基本知识	698
§2. 组合筛法的基本原理	710
§3. 最简单的 Brun 筛法	716
§4. Brun 筛法	722
§5. Rosser 筛法	732
§6. Selberg 上界筛法	765
习 题	787
第三十三章 零点分布(二)	801
§1. 一个渐近公式	802
§2. Линник 零点密度定理	819
§3. Deuring-Heilbronn 现象	842
第三十四章 算术数列中的最小素数	856
§1. 问题的转化	857
§2. 定理的证明	860
第三十五章 Dedekind η 函数	867
§1. 函数方程(一)	867
§2. Dedekind 和	874
§3. 函数 $G(z, s)$	879
§4. 函数方程(二)	887
习 题	890
第三十六章 无限制分拆函数	892
§1. 无限制分拆函数 $p(n)$	892
§2. $p(n)$ 的上界及下界估计	896
§3. $p(n)$ 的渐近公式	900
§4. $p(n)$ 的级数展开式	907
参考书目	913