

有限元的预处理 和后处理理论

林 群 朱起定 著

上海科学技术出版社

0.12.21
L38

有限元的预处理和 后处理理论

林 群 朱起定 著



上海科学技术出版社

有限元的预处理和后处理理论

林 群 朱起定 著

上海科学技术出版社出版、发行

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所经销 商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 15.25 插页 4 字数 196,000

1994 年 6 月第 1 版 1994 年 6 月第 1 次印刷

印数 1—1,200

ISBN 7-5323-3210-1/O·170

定价: 22.20 元

(沪)新登字 108 号

内 容 提 要

本书总结了十几年来有限元高精度算法(即超收敛)的主要成果,其中包括作者及其同事们许多已发表或尚未发表的成果。本书所反映的研究工作曾得到国家自然科学基金资助。

全书共有七章。第一章为准备知识。第二章与第三章介绍了有限元的插值后处理及解的展开式,这是有限元高精度算法的理论基础。第四章讨论有限元解的后验估计。第五章与第六章分别讨论了奇性问题及本征值问题的后处理。第七章介绍了有限元的概率算法。

本书可供计算数学工作者、高等院校有关专业的师生和工程技术人员参考。

The Preprocessing and Postprocessing for the Finite Element Method

Lin Qun Zhu Qiding

Shanghai Scientific & Technical Publishers

The Preprocessing and Postprocessing for the Finite Element Method

Lin Qun Zhu Qiding

Abstract

This book contains the main results of high accuracy methods in the finite elements context, and also contains a lot of results of authors and their colleagues, which have not been published.

There are seven chapters in this book. Chapter 1 is preliminaries. In Chapters 2 and 3, the interpolation post process and the resolution of finite element error are introduced, which are the theoretical basis of high accuracy method. A posteriori error estimates are discussed in Chapter 4. In Chapters 5 and 6, the corner singular problems and the eigenvalue problems are discussed respectively. The Monte Carlo finite element method is introduced in Chapter 7.

This book is contributed to the mathematicians, engineers, teachers and students interested in the numerical partial differential equations.

引言

一、如果说近代偏微分方程是建立在无限维空间 H 的弱形式之上: 求 $u \in H$ 满足

$$a(u, \varphi) = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in H,$$

那么有限元方法(或 Galerkin 方法)就是同一个弱形式限制在有限维空间 S_h (h -有限维参数)之上: 求 $u_h \in S_h$ 满足

$$a(u_h, \varphi) = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in S_h.$$

所以, 按弱形式, 有限元方法就是限在有限维空间上的偏微分方程。不过, 这个有限维空间被取成区域剖分成单元后的分片多项式。冯康在 1965 年对此已有全面论述。由于剖分的灵活性、多项式的局部性以及原理上从属于偏微分方程, 在工程界和计算数学界得到了广泛使用, 相继出现了意想不到的新方法, 例如非协调元方法、混合元方法、杂交元方法以及它们之间的相互作用(见石钟慈在 ICODD, 1992 的报告)。

由于剖分的灵活性是有限元方法的特点, 故人们尽可能将有限元理论建立在剖分的任意性上。与此不同, 本书则建立在最特殊的剖分上: 从矩形单元开始, 写出误差的积分分辨公式, 从此发现了特殊性可带来更深刻的结果: 特殊剖分会使有限元方法更逼近真实的偏微分方程, 其逼近的阶可以比任意剖分高出两个数量级; 然后, 由特殊到一般: 研究了一般区域的“特殊剖分”, 使特殊性又有一定的灵活性——可适应不同形状的区域甚至包含自适应加密网格。这种“特殊剖分”可以认为是一种“最优剖分”, 因为它会提高有限元方法的逼近阶。反之, 任意剖分就是“最坏剖分”了。(虽然

矩形剖分使有限元方法又恢复了差分方法的状态,但是,只有基于连续形式的有限元方法才可能写出误差的积分分辨公式,并进而推广到非完全矩形的情形.)

简言之,一般的有限元理论建立在任意剖分之上,本书则建立在“最优剖分”之上.书名中的预处理,就是指算题前如何建立“最优剖分”,使有限元方法更好地逼近真实的偏微分方程.

二、下面来解释为什么剖分的特殊形状会提高有限元方法的逼近阶.

让我们来看一个比有限元逼近更简单的问题: u 用插值 $i_h u \in S_h$ 来逼近.考察插值误差的积分:如

$$\int a(i_h u - u) \varphi_a, \int a(i_h u - u) \varphi, \int a(i_h u - u) \varphi_y$$

等,这里 a 可为不同的变系数.要精确估计这些积分,最好写出它们的显式表达式.

可是,对于任意形状的剖分,只有积分不等式:例如,对于一次元空间 S_h ,

$$\int a(i_h u - u) \varphi_a \leq c \|i_h u - u\|_1 \|\varphi\|_1 \leq ch \|\varphi\|_1 \leq c \|\varphi\|_0.$$

那末,什么样的剖分才有积分分辨公式?

1. 先看最简单的情形:区域剖分成矩形单元

这时可建立积分分辨公式.特别,当 φ 满足边界条件,可得出比任意剖分高两阶的估计:例如

$$\int a(i_h u - u) \varphi_a = O(h^2) \|\varphi\|_0.$$

证明概述如下.取出任一单元:

$$\tau = [x_\tau - h_\tau, x_\tau + h_\tau] \times [y_\tau - k_\tau, y_\tau + k_\tau],$$

即 (x_τ, y_τ) 是 τ 的中心坐标, $2h_\tau$ 和 $2k_\tau$ 是 τ 的横向和纵向尺寸.定义插值的误差函数

$$E(x) = \frac{1}{2}((x - x_\tau)^2 - h_\tau^2), \quad F(y) = \frac{1}{2}((y - y_\tau)^2 - k_\tau^2)$$

(它们反映了插值的误差).下面就双一次元空间及常系数 $a=1$

写出积分的显式表达式(详细证明在后面):

$$(i) \int_{\tau} (u - i_h u)_x \varphi_x = \int_{\tau} \left(F \varphi_x - \frac{1}{3} (F^2)_y \varphi_{xy} \right) u_{xyy};$$

$$(ii) \int_{\tau} (u - i_h u)_x \varphi = \int_{\tau} \left\{ \left[F(\varphi - E_x \varphi_x) - \frac{1}{3} (F^2)_y \right. \right. \\ \left. \left. \times (\varphi_y - E_x \varphi_{xy}) \right] u_{xyy} - E \varphi_x u_{xx} \right\};$$

$$(iii) \int_{\tau} (u - i_h u)_x \varphi_y = \int_{\tau} [F(\varphi_y - E_x \varphi_{xy}) u_{xyy} - E \varphi_{xy} u_{xx}],$$

即将插值 $i_h u$ 用二次函数 E 和 F 来代替, 后者的阶一目了然:

$$(i) = O(h^2) \|\varphi\|_{1,\tau} \|u\|_{3,\tau};$$

$$(ii) = O(h^2) (\|\varphi\|_{0,\tau} \|u\|_{3,\tau} + \|\varphi\|_{1,\tau} \|u\|_{2,\tau});$$

$$(iii) = O(h^2) (\|\varphi\|_{1,\tau} \|u\|_{3,\tau} + \|\varphi\|_{2,\tau} \|u\|_{2,\tau}),$$

更有力的是从这些表达式可以分辨出低阶和高阶误差, 从而将 $\|\varphi\|_1$ 降到 $\|\varphi\|_0$. 为此只需要继续分部积分:

对(i)分部积分再对 τ 求和, 结果要出现区域边界 L_i 上的积分:

$$(i)' \int_{\Omega} (u - i_h u)_x \varphi_x = \left(\int_{L_1} - \int_{L_1} \right) \left(F \varphi - \frac{1}{3} (F^2)_y \varphi_y \right) u_{xyy} dy \\ - \int_{\Omega} \left(F \varphi - \frac{1}{3} (F^2)_y \varphi_y \right) u_{xyy}.$$

对(ii)分部积分再对 τ 求和, 结果还要出现单元内边(τ 和相邻单元 τ' 的公共内边 l)的边积分¹⁾:

$$(ii)' \int_{\Omega} (u - i_h u)_x \varphi = \left(\int_{L_1} - \int_{L_1} \right) \frac{1}{3} h_{\tau}^2 \varphi u_{xx} dy \\ + \sum_l \int_l \frac{1}{3} (h_{\tau}^2 - h_{\tau'}^2) \varphi u_{xx} dy \\ + \int_{\Omega} \left[\left(\frac{1}{6} (E^2)_x \varphi_x - \frac{1}{3} h_{\tau}^2 \varphi \right) u_{xxx} \right. \\ \left. + \left[F(\varphi - E_x \varphi_x) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{3} (F^2)_y (\varphi_y - E_x \varphi_{xy}) \right] u_{xyy} \right],$$

这个表达式已不如上一个那么干净.

对(iii)的处理导致类似但更长的表达式, 包括了边界点的值(没有耐心的读者可以不看)¹⁾:

$$\begin{aligned}
 \text{(iii)'} \quad & \int_{\Omega} (u - i_h u)_x \varphi_y = - \left(\int_{L_1} - \int_{L_2} \right) E \varphi_x u_{xx} dx \\
 & + \int_{\Omega} (E \varphi_x u_{xxy} + F(\varphi_y - E \varphi_{xy}) u_{xyy}) \\
 & = - \left(\int_{L_1} - \int_{L_2} \right) E \varphi_x u_{xx} dx \\
 & - \left(\int_{L_1} - \int_{L_2} \right) \frac{1}{3} h_{\tau}^2 \varphi u_{xxy} dy - \left(\int_{L_1} - \int_{L_2} \right) \frac{1}{3} k_{\tau}^2 \varphi u_{xyy} dx \\
 & - \sum_l \int_l \frac{1}{3} (h_{\tau}^2 - h_{\tau'}^2) \varphi u_{xxy} dy - \sum_l \int_l \frac{1}{3} (k_{\tau}^2 - k_{\tau'}^2) \varphi u_{xyy} dx \\
 & - \int_{\Omega} \left[\left(\frac{1}{6} (E^2)_x \varphi_x - \frac{1}{3} h_{\tau}^2 \varphi \right) u_{xxy} \right. \\
 & \left. + \left(\frac{1}{6} (F^2)_y \varphi_y - \frac{1}{3} k_{\tau}^2 \varphi \right) u_{xyy} - F E \varphi_{xy} u_{xxy} \right],
 \end{aligned}$$

对等式右端的第一项边积分还要继续分部积分, 结果还会出现边界点 P 上函数值的 Abel 求和, 例如 $\sum_P (h_{\tau}^2 - h_{\tau'}^2) \varphi(P) u_{xx}(P)$.

(i)', (ii)', (iii)' 带有区域边界上的积分(及边界点的值), 它们可用边界条件消去. 可是对于相邻单元公共内边的边积分的 Abel 求和, 则必须假设剖分为几乎均匀, 即

$$|h_{\tau} - h_{\tau'}| + |k_{\tau} - k_{\tau'}| = O(h^2),$$

才能达到满阶²⁾:

$$(i)' = O(h^2) \|\varphi\|_0 \|u\|_4, \text{ 若 } \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ (或 } \varphi = 0) \text{ 在 } \partial\Omega;$$

$$(ii)' = O(h^2) \|\varphi\|_0 \|u\|_3, \text{ 若剖分几乎均匀及 } \varphi = 0 \text{ 在 } \partial\Omega;$$

$$(iii)' = O(h^2) \|\varphi\|_1 \|u\|_3, \text{ 若 } \varphi = 0 \text{ 在 } \partial\Omega,$$

1) 这里利用了 $E = \frac{1}{6} (E^2)_{xx} - \frac{1}{3} h_{\tau}^2$, $F = \frac{1}{6} (F^2)_{yy} - \frac{1}{3} k_{\tau}^2$.

2) 这里, 我们将单元的边积分直接用面积分来估计, 结果降了半阶:

$$|\varphi|_1 \leq ch^{-1/2} |\varphi|_{\tau} \quad \forall \varphi \in S_h, \quad |u|_1 \leq ch^{-1/2} |u|_{1,\tau}.$$

或 (iii)' $= O(h^2) \|\varphi\|_0 \|u\|_4$, 若剖分几乎均匀及 $\varphi=0$ 在 $\partial\Omega$.
即使无边界条件, 边界上的积分由于边长和 h 无关, 也有比较高的阶¹⁾:

$$(i)' = O(h^{1.5}) \|\varphi\|_0 \|u\|_4;$$

$$(ii)' = O(h^{1.5}) \|\varphi\|_0 \|u\|_8, \text{ 若剖分几乎均匀};$$

$$(iii)' = O(h^{1.5}) \|\varphi\|_1 \|u\|_8,$$

或²⁾ (iii)' $= O(h^{1.5}) \|\varphi\|_0 \|u\|_4$, 若剖分几乎均匀及 $\varphi=0$ 在角点.

可见, 积分恒等式已包含了误差的全部信息. 它们刻划了在什么条件下, 误差达到什么样的阶: 有混合微商时阶最低.

以上基于矩形剖分的各种估计可用到各类偏微分方程的有限元误差分析上, 结果要比采用任意剖分所得的误差有数量级上的改进. 例如对于重调和方程(Miyoshi 格式), 采用(几乎均匀)矩形剖分比任意剖分所得的误差要高出两阶. 对于一阶双曲方程, 以及对于 Stokes 方程(如 $Q_{1,2}-Q_0$ 格式), 采用几乎均匀的矩形剖分比任意剖分所得的误差要高出一阶. 部分结果见下表:

方 程	有限元 L_2 - 误差	任意剖分	几乎均匀矩形
重调和	$v_h - \nabla^2 u$		$O(h^2)$
一阶双曲型	$u_h - u$	$O(h)$	$O(h^2)$
Stokes	$P_h - P$	$O(h)$	$O(h^2)$

结论: 矩形剖分是“最优剖分”.

可是, 矩形剖分不能完全适应一般的区域. 因此, 还要考察较一般区域的“最优剖分”.

2. 凸四边形区域的“规则”剖分

设有凸四边形区域 $\mathcal{D}$, 我们可通过双线性变换, 将其变成矩形区域 Ω . 考虑 $\mathcal{D}$ 上的“规则”四边形剖分: 按对边等比例点连成的四边形剖分, 则 $\mathcal{D}$ 上的每一个四边形单元 e 变成了 Ω 上的矩形单元 τ , e 上的积分则变换成 τ 上的积分, 但这时要出现由 Jacobi 和微商产生的变系数 $\gamma_e(x, y)$:

1) 见上页注 2).

2) 这里我们将点值用单元的 L_2 -模来估计, 结果降了一阶.

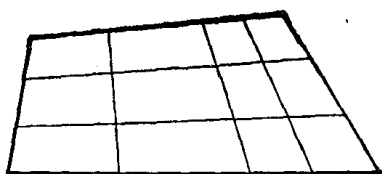


图 2

$$\begin{aligned}
 & \int_{\sigma} (U - i_h U)_\epsilon \Phi_\epsilon \\
 &= \int_{\tau} \gamma_\epsilon(x, y) (u - i_h u)_\epsilon \varphi_y + \dots \\
 &= \int_{\tau} \gamma_\epsilon^* (u - i_h u)_\epsilon \varphi_y + \dots \\
 &+ O(h^2) \|\varphi\|_{1, \tau} \|u\|_{2, \tau},
 \end{aligned}$$

其中常数 γ_ϵ^* 可由 σ 的两条中线的斜率 (a_σ , b_σ) 来刻画. 由表达式 (iii)' 可得

$$\begin{aligned}
 \int_{\tau} \gamma_\epsilon^* (u - i_h u)_\epsilon \varphi_y &= - \left(\int_{l_1} - \int_{l_2} \right) \gamma_\epsilon^* E \varphi_\epsilon u_{xx} dx \\
 &+ O(h^2) \|\varphi\|_{1, \tau} \|u\|_{3, \tau}.
 \end{aligned}$$

再对 τ 求和, 则将出现相邻单元公共内边的边积分的 Abel 求和:

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_l \int_l (\gamma_\epsilon^* - \gamma_{\epsilon'}^*) E \varphi_\epsilon u_{xx} dx \right| &\leq O \max_{\sigma} (|a_\sigma - a_{\sigma'}| \\
 &+ |b_\sigma - b_{\sigma'}|) h \|\varphi\|_1 \|u\|_3 = O(h^2) \|\varphi\|_1 \|u\|_3. \quad (1)
 \end{aligned}$$

可是, 对于上述特定的剖分, γ_σ 是统一的, 可以直接用变系数的精确估计式(4) (见 p.14). 总之有

$$\int_{\sigma} (U - i_h U)_\epsilon \Phi_\epsilon = \begin{cases} O(h^2) \|\Phi\|_1 \|U\|_3, & \text{若 } \Phi = 0 \text{ 在 } \partial\Omega; \\ O(h^{1.5}) \|\Phi\|_0 \|U\|_4, & \text{若剖分几乎均匀} \\ & \text{及 } \Phi = 0 \text{ 在角点.} \end{cases} \quad (2)$$

同理

$$\int_{\sigma} (U - i_h U)_\epsilon \Phi = \begin{cases} O(h^2) \|\Phi\|_0 \|U\|_3, & \text{若剖分几乎均匀及 } \Phi = 0 \\ & \text{在 } \partial\Omega; \\ O(h^{1.5}) \|\Phi\|_0 \|U\|_3, & \text{若剖分几乎均匀.} \end{cases} \quad (3)$$

由(2)、(3)可以得到: 对于重调和方程(Miyoshi 格式)以及一阶双曲方程, 几乎均匀的“规则”四边形剖分比任意剖分所得的误差要高出一阶.

由(1)还可看到: 为使误差达到满阶, 相邻的四边形单元的中

方 程	有限元 L_2 -误差	任意剖分	几乎均匀规则剖分
重调和	$u_h - \nabla^2 u$		$O(h)$
一阶双曲型	$u_h - u$	$O(h)$	$O(h^2)$

线必须差不多平行,即差不多是平行四边形了。

结论:“规则”四边形剖分是“最优剖分”。而且,为使误差达到满阶,也只能采用这种规则剖分。

3. 一般区域的“分片规则”剖分

首先考虑多边形区域 $\mathcal{D}$ 。我们先将 $\mathcal{D}$ 分成若干个凸四边形子区域 D_i ,再按上一段在 D_i 上作等比例的“规则”剖分(见图3,吕涛等: Bonn. Math. Schrift., 1984 及许进超等: JOM, 1985)。注意到各子区域的内边界 $\bar{D}_i \cap \bar{D}_j (i \neq j)$ 上无边界条件,于是由上一段的(2)和(3),我们可以得到:对于重调和方程(Miyoshi 格式)及一阶双曲方程,几乎均匀的“分片规则”剖分比任意剖分所得的误差要高一阶。

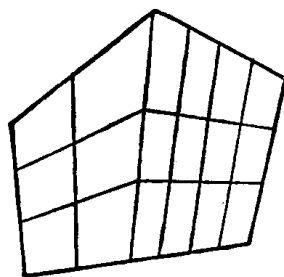


图 3

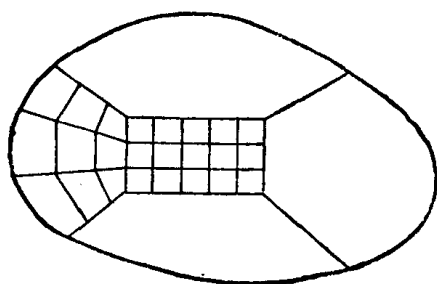


图 4

对于光滑凸区域 $\mathcal{D}$,我们可先从 $\mathcal{D}$ 中挖出一个矩形子区域 D_0 ,再将 $\mathcal{D} \setminus D_0$ 分成四个子区域 $D_i, i=1, 2, 3, 4$.在 D_0 上做几乎均匀的矩形剖分。

对于 $D_i, i=1, 2, 3, 4$,我们将与 D_0 不相邻的 D_i 的两条边界直线延长交于一点,从此点出发,过 $\bar{D}_i \cap \bar{D}_0$ 上的各节点做射线交于 $\bar{D}_i \cap \partial\Omega$,再连接各条射线的等比例点,则可得到光滑凸区域 $\mathcal{D}$ 上的“分片规则”剖分(见图4,谢锐锋等: JOM, 1988),与多边形区域一样,我们可以得到:对于重调和方程(Miyoshi 格式)及一阶双曲方程,几乎均匀的“分片规则”剖分比任意剖分所得的误差要高出半阶(甚或一阶)。

方 程	有限元 L_2 - 误差	任意剖分	分片几乎均匀规则剖分
重调和	$v_h - \nabla^2 u$		$O(h)$
一阶双曲型	$u_h - u$	$O(h)$	$O(h^{1.5})$

结论: “分片规则”四边形剖分是“最优剖分”。

可是, 对于区域具有复杂的边界(如齿轮), 而难以实现“分片规则”剖分时, 我们只好采用下面这种剖分。

4. “大部分矩形”剖分

对于难以实现上一段中“分片规则”剖分的复杂区域 $\mathcal{D}$, 我们

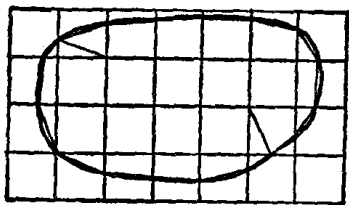


图 5

可作矩形域 $\Omega \supset \mathcal{D}$, 在 Ω 上做矩形网格覆盖 $\mathcal{D}$, 再对 $\mathcal{D}$ 边界附近的网格做适当修正, 可得到 $\mathcal{D}$ 上的“大部分矩形”剖分(见图 5)。上述剖分在 $\mathcal{D}$ 上有尽可能多的‘矩形单元, 这些单元的并 $D_0 \subset \mathcal{D}$ 覆

盖了 $\mathcal{D}$ 的大部分区域, 非规则单元的并 $\mathcal{D} \setminus D_0$ 的面积只占 $O(h)$ 。于是还有半阶的整体超收敛:

$$\begin{aligned} \text{(i)''} \quad \int_{\mathcal{D}} (u - i_h u)_x \varphi_x &= \int_{D_0} (u - i_h u)_x \varphi_x + \int_{\mathcal{D} \setminus D_0} (u - i_h u)_x \varphi_x \\ &= O(h^2) \|\varphi\|_{1, D_0} \|u\|_{3, D_0} \\ &\quad + O(h^{1.5}) \|\varphi\|_{1, \mathcal{D} \setminus D_0} \|u\|_{2, \infty, \mathcal{D} \setminus D_0} \\ &= O(h^{1.5}) \|\varphi\|_1 (\|u\|_3 + \|u\|_{2, \infty}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)''} \quad \int_{\mathcal{D}} (u - i_h u)_x \varphi &= \int_{D_0} (u - i_h u)_x \varphi + \int_{\mathcal{D} \setminus D_0} (u - i_h u)_x \varphi \\ &= O(h^{1.5}) \|\varphi\|_0 (\|u\|_3 + \|u\|_{2, \infty}), \\ &\quad \text{若剖分几乎均匀;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)''} \quad \int_{\mathcal{D}} (u - i_h u)_x \varphi_y &= \int_{D_0} (u - i_h u)_x \varphi_y + \int_{\mathcal{D} \setminus D_0} (u - i_h u)_x \varphi_y \\ &= O(h^{1.5}) \|\varphi\|_{1, D_0} \|u\|_{3, D_0} \\ &\quad + O(h^{1.5}) \|\varphi\|_{1, \mathcal{D} \setminus D_0} \|u\|_{2, \infty, \mathcal{D} \setminus D_0} \\ &= O(h^{1.5}) \|\varphi\|_1 (\|u\|_3 + \|u\|_{2, \infty}). \end{aligned}$$

由此可以得到: 对于重调和方程(Miyoshi 格式)及一阶双曲方程, 几乎均匀的“大部分矩形”剖分比任意剖分所得的误差要高出半阶。

结论: 采用“大部分矩形”剖分总比任意剖分好。

以上考察了这种那种规则剖分(最多包含少量的非规则剖分). 那么, 对于某些自适应剖分还能不能达到较高阶的误差呢? 下面考察其中的一种.

5. 非正规剖分

对于带有奇点的区域, 人们常常采用局部加密网格. 例如 Babuska 提出一种局部加密的非正规剖分: 首先在矩形区域 $\mathcal{D}$ 上做均匀矩形剖分, 然后在包含奇点且边长为 $\mathcal{D}$ 的边长的一半的子区域 D_0 上将原有网格进行中点加密, 即将原来的单元分成四个相等的小单元. 接着再同上, 对 D_0 的子区域 D_1 上的网格进行中点加密 $\cdots$, 直到奇点附近的网格充分小(见图 6). 图中带有 $\times$ 的点为非正规节点. 为了保证有限元空间的协调性, 需要强加协调性条件: 非正规节点上的函数值为该节点所在边上相邻两点函数值的算术平均值, 或者, 从非正规节点向上面及右面单元的对顶做联线, 形成了非规则的三角形过渡层. 设这些非规则过渡层的并为 $\mathcal{D}_0$. 它也只占小面积:

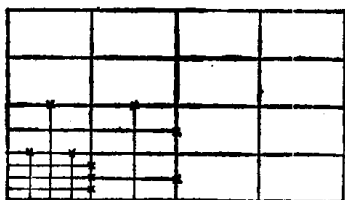


图 6

$$\begin{aligned} \text{meas}(\mathcal{D}_0) &\leq 2 \times \frac{h}{2} \times \frac{L_1}{2} + 2 \times \frac{h}{2^2} \times \frac{L}{2^2} + \cdots + 2 \times \frac{h}{2^k} \times \frac{L}{2^k} \\ &= 2hL \sum_{i=1}^k \frac{1}{4^i} = O(h), \end{aligned}$$

这里 h 为最大单元的最大边长, L 为 $\mathcal{D}$ 的最大边长, k 为局部加密次数. $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_0$ 上的剖分为“大部分矩形”剖分. 这样, 我们可以得到与第四段(i)"、(ii)"、(iii)" 同样的整体超收敛结果.

因此, 对于重调和方程(Miyoshi 格式)及一阶双曲方程, 上述非正规剖分比任意剖分所得的误差要高出半阶. 即使对于二阶椭圆方程, 上述非正规剖分比任意剖分对于插值函数的误差($\|i_h u - u_h\|_1$)也要高出半阶, 此结果可用于有限元解的插值后处理, 详见本书.

为了简单起见, 以上我们仅描述了矩形区域 $\mathcal{D}$ 上的非正规剖分. 当区域 $\mathcal{D}$ 是可分为若干个矩形子区域的组合区域 (如 L 型区域等) 时, 我们可先将 $\mathcal{D}$ 分成若干个矩形子区域, 再按上述规则在各矩形子区域上做非正规剖分, 形成 $\mathcal{D}$ 上的非正规剖分. 在这样的剖分下, 上述整体超收敛结果仍然成立. 此外, 以上限于篇幅仅在 u 充分光滑的条件下证明了上述结果, 通过更细致的分析我们已证明, 对于 $u \sim r^\beta$ ($\beta > 0$) 型的奇异解, 无需知道 β 的值, 当奇点附近的网格充分小时, 上述整体超收敛结果仍然成立 (见严宁宁等: Proc. of Syst. Sci. and Syst. Eng., 1991).

类似处理由若干个四边形子区域组成的多角形区域 (在每个四边形子区域上作非正规剖分).

方 程	有限元 L_2 -误差	任意剖分	大部分几乎均匀矩形非正规
重调和	$v_h - \nabla^2 u$		$O(h^{0.5})$
一阶双曲型	$u_h - u$	$O(h)$	$O(h^{1.5})$

总结: 为使有限元方法有更高阶的逼近, 针对不同形状的区域, 本书采取了这种那种的“规则”四边形剖分 (包括某种自适应剖分), 而非规则的三角形过渡单元只占小面积.

最后将部分结果复述如下:

剖 分		重调和 $v_h - \nabla^2 u$	一阶双曲型 $u_h - u$
几乎均匀	矩 形	$O(h^2)$	$O(h^2)$
	规 则	$O(h)$	$O(h^2)$
	分片规则	$O(h)$	$O(h^{1.5})$
	大部分矩形或非正规	$O(h^{0.5})$	$O(h^{1.5})$
任意剖分			$O(h)$

三、以上, 我们仅讨论了二维双线性元的积分恒等式, 特别是(i)、(ii)、(iii)不带有边积分. 如果带有边积分, 则表达式的误差

将会降阶。

将积分恒等式推广到双 p 次元时,也要尽量不带边积分。为此,不能简单地采取拉格朗日的点状插值,而要采取单元上“点——线——面”的积分状插值。因此,本书不仅研究最优剖分,而且要研究最优插值,它比传统的拉格朗日插值更接近有限元解。

有了最优插值,可对有限元作后处理,产生更高阶的逼近。最优插值有限元的概念来源于普通插值有限元,后者曾出现在 Rannacher 的综述中 (Helsinki, 1988), Shaidurov 的书中 (Moscow, 1989), 特别在我们的综述中 (见杨一都等: 数学实践与认识, 1991)。但是,我们不仅提出最优插值有限元 (见严宁宁、周爱辉等: Proc. Syst. Sci. and Syst. Eng., 1991), 而且应用于各类偏微分方程,使它成为一个普遍的方法 (见周爱辉、李继春、刘明均、潘建华等: Proc. Syst. Sci. and Syst. Eng., 1991), 并用于后验估计 (见朱起定等: 计算数学, 1993)。

最优插值有限元的概念使传统超收敛研究改观: 从个别点的性质变成了整体的性质 (包括到边界), 而且插值有限元已经成为高次元, 使超收敛变得容易理解。传统超收敛的基本著作有陈传森 (湖南科技出版社, 1980) 及 Krizek-Neittaanmaki (Essex, 1989)。

积分恒等式也可以推广到三维空间 (见严宁宁等: Proc. Syst. Sci. and Syst. Eng., 1991), 并同样建立最优剖分和最优插值有限元。在三维情形, 八面体比四面体更可用, 因此我们所建立的最优剖分具有可用性。

我们总的观点: 采用最优剖分和高次插值处理, 低次有限元也能产生高精度。

我们还特别推荐一次元。原因是高次元对于一阶问题以及一般区域并不带来显著好处。

四、既然积分恒等式 (i)、(ii)、(iii) 是本书的基本点, 好奇的读者可能想知道它们是怎么被证明的。下面一段正是为这些读者而写的。