

优化技术及其应用

(第二版)

何献忠 李 萍 等著

北京理工大学出版社

优化技术及其应用
(第二版)

北京理工

TH122

社

优化技术及其应用

(第二版)

何献忠 李 萍 等著



北京理工大学出版社

(京)新登字 149 号

内 容 简 介

本书是 1986 年版本的第二版,它在保留原版本基本框架及特色的基础上,仍以直接法为主,求导法为辅;删去了较旧的内容,大量增加了作者最近几年,在理论及实用技术方面的研究成果,如已经推广的 CFPM 算法及程序,工程优化问题的深化等;并进一步增强了工程设计实例分析;为使仅了解 BASIC 语言的读者掌握优化技术,还新增了用该语言编写的复形法程序,及大量的工程应用实例。书中程序全部运行可靠。

全书共分八章,内容为:设计方法的改进及优化技术概述;直接法及其应用;优化设计中一些实际问题的处理;求导法及其应用;约束条件转化方法及应用;处理多目标优化问题的工程方法;工程优化问题的深化;工程设计应用实例及程序。

本书可作为机械工程、光学工程、特种精密机械专业高年级本科生教材、研究生选修课教材、有关专业继续教育教材,也可供有关专业科技人员、特别是从事设计工作的技术人员参考使用。

优化技术及其应用(第二版)

何献忠 李 萍 等著

*

北京理工大学出版社出版发行

各地新华书店经售

北京市万龙图文信息公司照排

北京地质印刷厂印刷

*

787×1092 毫米 16 开本 14 印张 342 千字

1995 年 2 月第二版 1995 年 2 月第二次印刷

ISBN7-81013-982-7/TP·117

印数:10001-15000 册 定价:9.00 元

第二版 前 言

本书自1986年6月第一次印刷后,先后重印两次,仍满足不了社会需求。最近根据教学安排及兵器工程师进修大学的邀请,撰写了本书的第二版本。

本版保留了原书的框架及特点,仍以直接法为主,求导法为辅,并辅以其它相关技术。努力贯彻学以致用,学用结合。力争使读者学有所得。

本着去粗取精,删旧增新的原则,对内容进行了较大的更换与补充。新增内容,主要取材于作者最近几年所取得的科研成果。这些成果,多已先后被有关院校及厂、所采用。可变多面体法(CFPM)及程序,曾获机电部科技奖。为顾及仅了解 BASIC 语言的读者,掌握优化技术,新增了用该语言编写的复形法程序,第八章的全部工程实例,都用该程序进行优化设计。其余各章中的实例,分别采用了 CM 程序或 CFPM 程序进行了全部核查,为读者提供了更多、更可信的参考根据。新增的第七章工程设计优化问题的深化,是将模糊集理论用于工程优化的试探,目的在于引起工程设计人员,对优化技术应用的新思考。新增的特种精密机械优化工程实例,是应兵器工程师进修大学的要求而增的内容,目的在于扩大该项技术的应用面。

参予本书第二版撰写的人员有:何献忠、李萍、黄航汉、刘学泽、金小海、吕宁等。

本书在写作过程中,得到了兵器工程师进修大学领导的大力支持和帮助。此外,还引用了其它学者的许多资料,在此一并表示深切的谢意。

书中缺点、错误难免,诚恳地期待各方面的指正、帮助。

1994 年 5 月

目 录

第一章 设计方法的改进及优化技术概述	(1)
§ 1-1 研究设计方法的现实意义	(1)
§ 1-2 设计方法的改进与发展概况	(1)
1. 试算法	(1)
2. 表格法	(2)
3. 图算法	(2)
4. 利用一元函数极值理论的设计法	(3)
5. 优化设计法	(5)
6. 综合设计法	(6)
§ 1-3 有关优化设计的术语及概念	(6)
1. 实际技术问题及其数学模型抽象	(6)
2. 设计变量	(6)
3. 目标函数	(8)
4. 约束条件	(8)
5. 设计空间及设计可行域	(8)
6. 优化设计的一般数学模型	(9)
§ 1-4 优化设计过程的形象化表达	(10)
1. 等值线与优化点	(10)
2. 择优过程的形象表达	(11)
第二章 直接法及其应用	(12)
§ 2-1 直接法的基本特点及方法	(12)
§ 2-2 坐标轮换法及其应用	(12)
1. 基本设想	(12)
2. 逻辑框图	(14)
3. 计算示例	(14)
4. 拟减小非标准滚珠轴承外径的论证	(17)
5. 坐标轮换法的局限性	(18)
§ 2-3 单纯形法及其应用	(19)
1. 基本设想	(19)
2. 构成初始单纯形的方法	(20)
3. 收敛条件	(20)
4. 择优过程与框图	(21)
5. 实例运算	(22)
6. 最小推力滚珠导轨设计	(27)
7. 结论	(29)
8. 使用上的局限性	(31)
§ 2-4 复形法及其应用	(31)
1. 基本设想	(31)
2. 初始复形的构成	(32)
3. 收敛判别条件	(32)
4. 择优过程及框图	(32)

5. 实例运算	(34)
6. 钢丝滚道非标准滚珠轴承优化设计及程序	(37)
7. 片簧式径向作用调速器优化设计	(47)
8. 有常量约束的最小推力滚珠导轨优化设计	(50)
9. 结论	(51)
§ 2-5 约束可变多面体法	(52)
1. 基本设想	(53)
2. 择优过程	(53)
3. 实例及程序	(55)
4. 操作说明	(72)
5. 与复形法的一种对比	(75)
6. 低维、小型线性问题与非线性问题求解方法统一的探索	(76)
第三章 优化设计中一些实际问题的处理	(78)
§ 3-1 实用步长确定法	(78)
1. 一维搜索、最小函数值步长确定法	(78)
2. 简单实用步长确定法	(84)
3. 步长对寻优计算量的影响	(84)
§ 3-2 改善局部优化解的工程方法	(85)
1. 函数凸性判别	(85)
2. 局部优化解的实用价值	(87)
3. 相对优化解的改善与判别	(87)
§ 3-3 收敛系数调整	(90)
§ 3-4 离散量的处理	(91)
1. 曲线拟合技术	(91)
2. 实用优化参数的处理	(105)
§ 3-5 线性方程组求解方法	(106)
1. 消元法	(106)
2. 行列式求解法	(108)
3. 逆矩阵法	(107)
第四章 求导法及其应用	(110)
§ 4-1 求导法的基点	(110)
§ 4-2 多元函数极值理论基础	(110)
1. 多元函数的近似表达式和最速下降方向	(110)
2. 几种特殊类型函数的斜量公式	(110)
3. 极值点的充要条件	(112)
§ 4-3 最速下降法及其应用	(115)
1. 基本设想	(115)
2. 分析及改进的可能	(116)
3. 最短带长带传动设计	(116)
§ 4-4 牛顿法及其改进	(118)
1. 基本设想	(118)
2. 实例运算分析	(119)
3. 改进的可能性——阻尼牛顿法	(121)
§ 4-5 变尺度法及其应用	(121)
1. 基本设想	(121)

2. 新矩阵 $[H_k]$ 的构成	(122)
3. 运算示例	(122)
4. 框图	(123)
5. 程序及实例	(124)
6. 程序改进及实例分析	(131)
§ 4-6 阻尼最小二乘法及其应用	(138)
1. 最小二乘法	(138)
2. 阻尼最小二乘法	(139)
3. 阻尼因子 ν 的选择	(140)
4. 计算实例	(140)
5. 迭代过程及框图	(141)
第五章 约束条件转化方法及应用	(142)
§ 5-1 等式约束极小化问题的转化	(142)
1. 待定乘数法的基本设想	(142)
2. 一般应用实例	(143)
3. 设计应用实例——最低成本偏差设计	(143)
§ 5-2 一般有约束极小化问题转化	(148)
1. 基本设想	(148)
2. 具体方法	(150)
3. 罚参数的选取及优化点判别	(150)
4. 计算实例	(151)
§ 5-3 不等式约束转化为等式约束	(153)
第六章 处理多目标优化问题的工程方法	(155)
§ 6-1 基础知识	(155)
1. 定义及基本数学模型	(155)
2. 多目标函数的等值线图形	(155)
§ 6-2 一般求解的工程方法	(156)
1. 主目标函数法	(156)
2. 加权求和法	(156)
§ 6-3 多技术要求齿轮传动系统分速比优化设计	(157)
1. 建立初始模型	(157)
2. 用主目标函数法建模并求优化解	(158)
3. 用加权求和法建模并求优化解	(160)
4. 两种方法所得结果的分析	(162)
§ 6-4 目标函数相互矛盾的求解法	(162)
1. 协调曲线的获得及分析	(162)
2. 有约束多目标函数极小化的协调曲线及分析	(163)
3. 利用协调曲线求优化解	(163)
§ 6-5 求解多目标函数优化方法的新进展	(164)
1. 近期研究概况	(164)
2. 交互作用法	(164)
3. 有关权值算法分析	(167)
4. 改进满意协调法	(168)
第七章 工程设计优化问题的深化	(171)
§ 7-1 模糊集理论的发展	(171)

§ 7-2 常规设计与模糊设计	(171)
1. 两种定义	(171)
2. 两种特征函数	(172)
§ 7-3 常规优化与模糊优化	(173)
§ 7-4 实例分析与启发	(174)
1. 目标函数与设计变量分别保持单调上升关系	(174)
2. 目标函数与设计变量间保持非单调升降关系	(175)
第八章 工程设计应用实例及程序	(177)
§ 8-1 光学工程实例	(177)
1. 自动安平型光学仪器悬挂系统设计	(177)
2. 近半球腔激光器最佳参数设计	(180)
§ 8-2 机械工程实例	(182)
1. 最小应力牙嵌离合器设计	(182)
2. 最小重量车辆传动轴设计	(185)
3. 最小体积二级圆柱齿轮减速器设计	(187)
4. 最低成本切削用量优选	(190)
§ 8-3 特种精密机械工程实例	(192)
1. 平衡机优化设计	(192)
2. 驻退机优化设计	(198)
3. 瞄准机传动系统优化设计	(203)
§ 8-4 复形法 BASIC 程序文本及使用说明	(206)
1. 复形法 BASIC 程序文本	(206)
2. 程序使用说明	(212)
主要参考文献	(213)

第一章 设计方法的改进及优化技术概述

§ 1-1 研究设计方法的现实意义

设计是将某种设想转变为现实的一段过程,是为制造提供根据的必要手段。设计方法则是指,在该过程实施中所用的方法,包括理论、技术及手段。评价一种设计方法的优劣,主要以设计质量、设计效率为根据。设计质量固然根本取决于所用基本理论是否正确,同时也取决于设计方法先进与否。设计效率则主要取决于方法、计算工具及绘图手段。如所用基本理论一致,而设计方法不同,对质量及效率的影响都极明显。

工业发展的现实表明,设计理论、技术及手段的发展应相互推动、相互适应。否则就会直接影响产品的开发,影响市场的繁荣,影响与国际技术、经济运行的接轨。多年来,人们为了适应市场需要,加强竞争能力,曾为此作了巨大的努力,并取得了显著的效果。

§ 1-2 设计方法的改进与发展概况

设计方法从定性的类比设计法,发展到定量的综合设计法,大约经历了六十余年,它的变革过程与相关学科、相关技术、相关手段的发展相互适应。

1. 试算法

这种方法始于本世纪 20 年代末。当时,对于工程项目已提出了一些初始计算根据。试算法即以一定的理论公式为根据,利用已知或假定的技术条件,通过多次试算、修改,最终获得适用的设计参数。

例如设计一个刚度 P' 一定的圆柱形螺旋压力弹簧,可以根据以下古典公式进行试算

$$P' = \frac{P}{F} = \frac{Gd^4}{8nD_2^3}$$

式中 P ——弹簧所受的轴向负荷;

F ——弹簧在负荷 P 作用下所产生的变形量;

D_2 ——弹簧的平均直径,简称中径;

n ——弹簧的有效圈数;

d ——弹簧材料直径;

G ——弹簧材料的切变模量。

根据上式,如已知或预定 D_2 、 n 、 d 、 G 诸参数,通过多次试算、修改,就有可能得到压簧刚度等于或接近于 P' 的设计参数。

刚度公式也可写成一般的多元函数表达式,即

$$y = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

式中, y 代表性能指标 P' , x_i 是设计参量,分别代表 G 、 d 、 n 、 D_2 , 故设计参量数 $n=4$ 。

对于一个多元函数,如要求函数值一定,固然可以通过选择、修改诸 x_i 值来满足要求。但在 x_i 既有一定数值范围或标准限制的情况下,即使经过多次试算、修改,也难获得理想结果,计算量也会随着试算次数的增多而加大。

2. 表格法

这种方法始于本世纪 30 年代。它仍以一定的理论计算公式为根据,参照常川离散数列及规范,预制出表格系列,供设计者直接查阅。目的在于简化设计过程,减少重复试算量,如圆柱形螺旋拉力、压力弹簧设计中所用屈度系数表(见表 1-1)。

表 1-1

C	4	5	6	7	8	9	10
K	1.40	1.31	1.25	1.21	1.18	1.16	1.14

制订上表的根据,是 1928 年由瓦尔(A. M. Wahl)所提出的屈度系数计算式

$$K = \frac{4C - 1}{4C - 4} + \frac{0.615}{C}$$

其中, $C = D_2/d$ 为弹簧旋绕比。若选定 C 后,依表 1-1 即可查得 K 值。

又如滚动轴承手册中的“轴承结构参数”表格,只要根据额定负荷及其它条件,便可查得设计所需标准轴承的类型、型号及尺寸。

表格法比试算法计算量小,使用也极简便;但表格必须分档,数列又皆为离散量,分档又不能过细,故表列数值难于适应各种需要,如表列数值不理想,尚须插值求解。

3. 图算法

这种方法始于本世纪 40 年代。是将应用数学引入工程设计的尝试。它仍以一定的理论公式为根据,建立图尺方程,确定图尺系数,作出具有专用图线的算图。这些专用图线,避免了函数值的离散化,使用时也无需用插值法求中间值。

例 1 屈度系数 K 线图。

如图 1-1 所示,线图由 d 、 D_2 、 K 三条刻线组成。它们既可保持弹簧材料直径 d 因标准化所限定的离散性,又可使中径 D_2 适应设计要求的不同数值,并可快速而又比较准确地获得屈度系数 K 。

具体使用方法是,如选 $d = 11\text{mm}$, $D_2 = 41\text{mm}$,先分别在 d 线及 D_2 线上找到相应的两点,然后将两点虚线相联,并将联线延长与 K 线相交,交点所对应的数值即 K 值。本例所得 K 近于 1.44。

例 2 弹簧允差线图

弹簧允差线图可以用于,在已知弹簧中径 D_2 、材料直径 d 、有效圈数 n 及自由高度 H 时,确定中径偏差 ΔD_2 及自由高度偏差 ΔH 。

如图 1-2 所示为自由高度允差图线,它由 D_2/d 、 ΔH 、

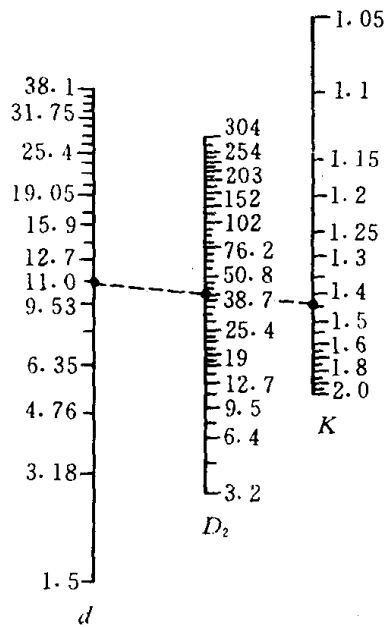


图 1-1 屈度系数 K 线图

n/H 三条刻线组成。如取 $D_2/d=6.6, n/H=8$, 分别在 $D_2/d, n/H$ 两刻线上找到相应的点, 并用虚线相联。联线与 ΔH 刻线相交, 交点所对应的值即 ΔH 。但它应为自由高的百分数, $\Delta H=4.4\%$ 。

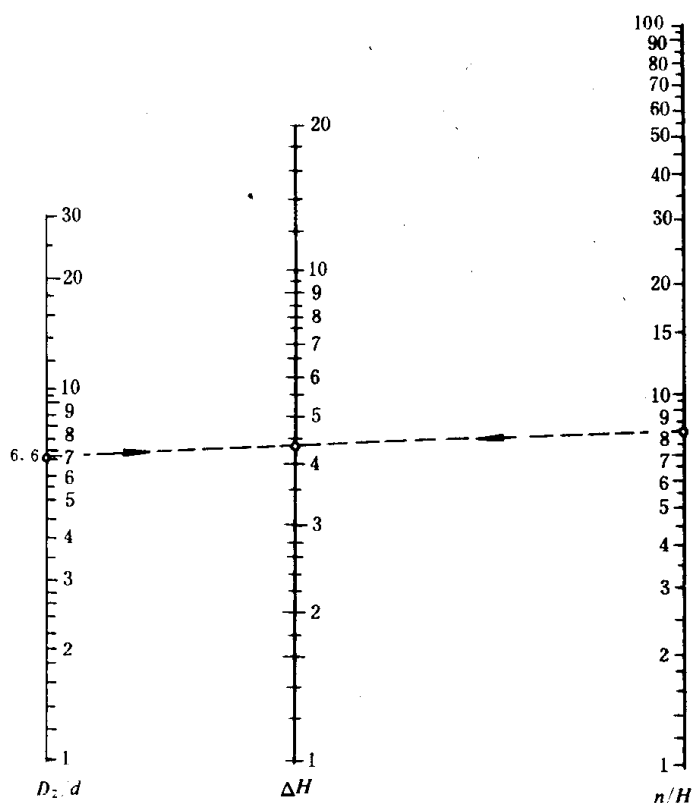


图 1-2 弹簧自由高度允差线图

如图 1-3 所示为中径允差图线, 它由 $d, D_2, \Delta D_2$ 三条刻线组成。如取 $d=1.2\text{mm}, D_2=8\text{mm}$, 先分别在 d, D_2 两刻线上找到相应的点, 并在图上用虚线相联, 再向右延长与 ΔD_2 线相交, 交点所对应的值即 $\Delta D_2=0.12\text{mm}$ 。

以上图线是谢克司 (C. H. Sacks) 根据亨特 (Hunter) 弹簧公司的生产情况, 用方和根法所制作的图线。其它企业也可根据自己的情况, 用同样原理制作有关线图。

可见, 利用预制图线, 既可相对提高设计质量及效率, 又可保持各设计参数的数值特性, 所得结果, 只需进行实用数值处理即可。

在图算法的基础上, 相继形成了各种专用算尺, 使设计手段得到了扩展。

4. 利用一元函数极值理论的设计法

这种方法始于 40 年代末, 目的在于应用极值理论, 获得理想的最优工程设计性能, 是优化设计的萌芽。

如某一设计的性能指标为 y , 诸设计参量为 x_i , 并保持一定函数关系

$$y = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

n 为有限整数, 若以 y 的极大值或极小值, 来表征设计的最优性能, 则由获得极值的必要条件

$$y' = 0$$

所确定的设计参量, 即为获得最优性能所应选用的具体值。

实际上,绝大多数设计都非一元问题。当时,为简化运算,都是只保留诸设计变量中的一个关键变量,而将其余赋值,使多元函数降为一元函数,然后对一元函数求极值,得最优参数。

例1 最大释放圈数蜗线弹簧设计。

蜗线弹簧释放圈数 n 与其它结构参数关系为

$$n = \frac{R_2 - R_3 - R + \sqrt{R^2 + R_3^2 - R_2^2}}{h}$$

式中 R_2 ——蜗线弹簧全部拧紧时的外半径;

R_3 ——蜗线弹簧所用芯轴半径;

R ——蜗线弹簧盒内半径;

h ——蜗线弹簧厚度。

当选定 R 、 R_3 及 h 的具体尺寸后,则 n 仅与 R_2 保持一元函数关系,如令

$$\frac{dn}{dR_2} = \frac{1}{h} \left[1 - \frac{R_2}{\sqrt{R^2 + R_3^2 - R_2^2}} \right] = 0$$

则可得

$$R_2 = \sqrt{\frac{R^2 + R_3^2}{2}} = f(R, R_3)$$

这一结论,曾长期用于机械钟表及机械引信设计。

例2 最小重量或最小体积螺旋压簧设计。

按最小重量条件关系式,依

$$\frac{dW}{dC} = 0$$

得

$$B = \frac{C^3(C^3 - 0.635^2 - 0.98C + 0.615)^{1/2}(5C^3 - 7.27C^2 - 1.21C + 1.23)}{4(1.365C^4 - 0.732C^3 - 0.673C^2 + 0.981C - 0.378)}$$

按最小体积条件关系式,依

$$\frac{dV}{dC} = 0$$

得

$$B = \frac{C^4}{2} \left(\frac{C-1}{C^2 + 0.365C - 0.615} \right)^{1/2} \left(\frac{7C^3 - 5.54C^2 - 8.9C + 3.21}{2C^3 + 0.095C^2 - 3.19C + 1.845} \right)$$

在以上诸式中, W 为压簧重量, V 为压簧体积, C 为旋绕比, B 为系数,它与压簧其它参数保持以下关系

$$B = \frac{FG}{n \sqrt{8P\pi[\tau]}} = f(F, G, n, P, [\tau])$$

式中, $[\tau]$ 为压簧材料许用切应力,其余符号意义同前。

理论上,只要选定 F 、 G 、 n 、 P 、 $[\tau]$,并使旋绕比 C 分别满足以上条件式,即可获得最小重量

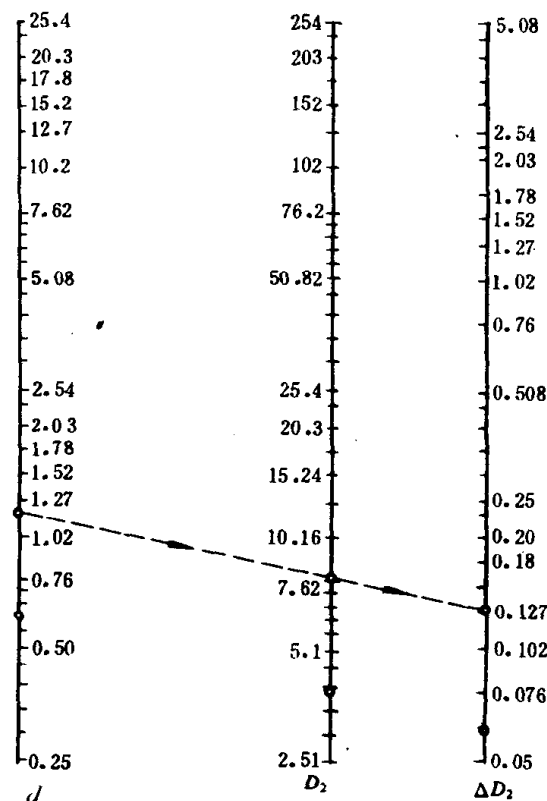


图 1-3 弹簧中径允差线图

或最小体积压簧。

以上条件式由辛克利(R. T. Hinkle)及莫尔司(I. E. Morse)提出,并制成了曲线图,供设计部门使用。

例3 齿轮系统最短启动时间传动比设计。

最短启动时间,必对应于最大启动角加速度,如角加速度为 ϵ ,依

$$\frac{d\epsilon}{di} = 0$$

得传动比 i 的条件式

$$i = m + \sqrt{m^2 + K} \\ m = \frac{M_2}{(M - M_f)\eta}; \quad K = \frac{J}{J_m}$$

式中 M_2 ——负载力矩;

M ——电机有效力矩;

M_f ——系统全部摩擦力矩;

η ——总效率;

J ——全部系统转化到负载轴上的转动惯量;

J_m ——电机的转动惯量。

实际上,传动比 i 将具有以下一般关系

$$i = f(M_2, M, M_f, \eta, J, J_m)$$

可见,理论上只要选定上式右端各参数,并满足该条件式所得的传动比 i ,就可使该齿轮系统获得最短启动时间。

以上结论,曾长期用于雷达及随动系统中的齿轮系统设计。

由以上三例可以看出,为建立一元函数模型,需要将一些设计参数定为常数,而仅保留一个变量。但对一般情况,依极值必要条件所得条件式,仍多为多元函数。故具体应用时,要想合理地满足该式,亦不方便。但以上实例说明,这种方法在不同的历史时期,也曾起过推动作用。

5. 优化设计法

优化设计亦称最优化设计,它始于50年代末,而普及应用于70年代。它是以数学规划理论为基础,以电子数字计算机为辅助工具的一种设计方法。

优化设计的基点是,将优化技术应用于设计过程之中,最终获得较理想的设计参数。由于这种技术多用于初始设计完成之后,或改型设计,故称之为优化设计。优化方法大体分为两类:

一为:直接计算目标函数值、比较目标函数值,并以之作为迭代、收敛根据的方法。

二为:以多变量函数极值理论为基础、利用目标函数的性态,并以之作为寻优、迭代、收敛根据的方法。

前者泛称为直接法,后者泛称为求导法。两种方法的择优、运算过程,皆按预编程序在电子数字计算机上进行,故在有的技术领域中,亦将此过程称之为自动设计。

近二十多年,优化技术在理论和应用上都得到了很大发展,已成为工业界的一项通用技术。实践证实,优化技术可明显地提高设计质量及效率,为进一步改进设计方法提供了可行的手段。

6. 综合设计法

80年代末期,随着高技术的发展及应用,形成了综合设计法。综合设计法以程序设计、优化技术、仿真技术及自动绘图技术的综合为基础,以计算机工作站为工具,将工业设计方法提高到了更新的阶段,使产品设计、换代、创新更趋于自动化,并展示了有可能向智能化发展的前景。

§ 1-3 有关优化设计的术语及概念

1. 实际技术问题及其数学模型抽象

为具体说明与优化设计有关的基本概念及模型,现举例如下:

例 1 设计如图 1-4 示梯形截面槽,并使其容积最大。已知板料尺寸,宽度 $b=24\text{mm}$,长度 $L=50\text{mm}$ 。

解 板长即槽长,槽长一定,槽截面积最大,容积亦最大。

依梯形截面公式,得槽截面积 A 为

$$A = \frac{1}{2}[(24 - 2x) + (24 - 2x + 2x\cos\alpha)]x\sin\alpha \\ = f(x, \alpha)$$

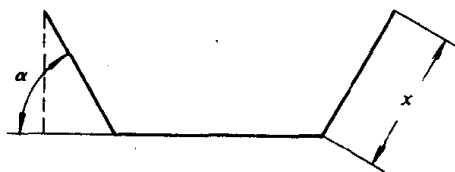


图 1-4 梯形截面槽

如上式有极大值存在,则按二元函数求极值的方法,就可求得最大截面积 A 所对应的 x 及 α 值。如实际设计按此取值,就可获得最大容积的槽。

以上问题也可简写为

$$\max f(x, \alpha) \quad (1-1)$$

它表示了求解截面积 A 极大化的模型,“max”表示极大化。由于式(1-1)为非线性函数,故称非线性问题。

例 2 最小重量螺旋压簧设计。

设计技术要求为:最大工作负荷 $P=30\text{N}$,最大工作变形量 $F=10\text{mm}$,压并高小于 50mm ,压簧内径大于 16mm ,有效圈数在 $3\sim 10$ 圈之内。

解 因压簧重量 W 为

$$W = \pi D_2 n_1 \frac{\pi d^2}{4} \gamma = f(D_2, n_1, d, \gamma)$$

式中 n_1 ——压簧总圈数;

γ ——弹簧材料重度。

其余符号意义同前。设计时应满足的基本要求如下:

在最大工作负荷作用下不破坏,即

$$\frac{8PD_2}{\pi d^3} K \leq [\tau]$$

小于要求的压并高,即

$$H_b = n_1 d \leq 50$$

大于要求的内径,即

$$D_1 = D_2 - d \geq 16$$

最大变形量等于 10mm,即

$$F = \frac{8PD_2^3n}{Gd^4} = 10$$

有效圈数范围,即

$$10 \geq n \geq 3$$

根据以上条件及要求,负荷 P 应为常量;若材料选定,重度 γ 亦为常量;再取 $n_1 = n$,则整个问题的模型可以归纳并写为

$$\min \quad f(D_2, n, d) \quad (1-2)$$

$$\text{sub} \quad g_1(D_2 - d) - [\tau] \leq 0 \quad (1-3)$$

$$g_2(n, d) - 50 \leq 0 \quad (1-4)$$

$$g_3(D_2, d) - 16 \geq 0 \quad (1-5)$$

$$h_1(D_2, n, d) - 10 = 0 \quad (1-6)$$

$$10 \geq n \geq 3 \quad (1-7)$$

式(1-2)至式(1-7)概括表明,在满足各项技术要求时,求解压簧极小化重量的数学模型。“min”表示极小化、“sub”表示应满足的要求, g_j 表示不等式的函数形式, h_1 表示等式的函数形式。

由于式(1-2)至式(1-6)多为非线性函数,故亦为非线性问题。

例3 选定最低总价格轴承。

设计时,欲选定四种滚珠轴承,其个数分别为 x_1, x_2, x_3, x_4 ; 轴承单价分别为 y_1, y_2, y_3, y_4 。要求 x_1, x_2 之和不少于 24 个; x_3, x_4 之和不少于 32 个; x_1, x_2, x_3 之和不少于 36 个,且总价格最低。

解 根据以上条件及要求,即可写出其模型。

$$\min \quad Y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 \quad (1-8)$$

$$\text{sub} \quad x_1 + x_2 \geq 24 \quad (1-9)$$

$$x_3 + x_4 \geq 32 \quad (1-10)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 36 \quad (1-11)$$

式(1-8)至式(1-11)概括表明,在满足各项要求时,求解四种滚珠轴承总价格最低的数学模型。由于它们都是线性函数,故为线性问题。当然,以上模型也可写成一般形式,即

$$\min \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$\text{sub} \quad g_1(x_1, x_2) - 24 \geq 0$$

$$g_2(x_3, x_4) - 32 \geq 0$$

$$g_3(x_1, x_2, x_3) - 36 \geq 0$$

由以上三例可以看出,设计优化数学模型建立和抽象的根据是,设计任务、技术要求及有关技术知识。模型概括地表达了有关设计问题的全部要求,它是选择优化方法及择优计算的主要根据。

2. 设计变量

设计变量是设计模型的基本成分,是设计最后所需确定的参数。如例 1 中的 x, α , 例 2 中的 D_2, n, d , 例 3 中的 x_1, x_2, x_3, x_4 。设计变量的个数,即所需求解问题的维数。故例 1 为二维问题,例 2 为三维问题,例 3 为四维问题。有的工程技术问题可有几十维、几百维,甚至更高维数。

3. 目标函数

以所选定的设计变量为自变量,以所要求的性能指标为因变量,并按一定关系(如几何关系、物理关系、传动关系……)所建立的函数式,即为目标函数。它表征了设计性能要求与设计参数之间的关系,如式(1-1)、式(1-2)、式(1-8)。由于目标函数函数值大小,可以评价设计质量的优劣,故在有的著作中,亦称之为评价函数。

设计变量的个数,确定了目标函数的维数。设计变量的幂及函数的性态,确定了目标函数的性质,如式(1-1)为二维非线性函数,式(1-2)为三维非线性函数,式(1-8)为四维线性函数。

如所选的设计变量与所要求的性能指标之间无精确的函数关系,亦可采用曲线拟合、多元回归或其它近似计算方法,获取近似的函数式作为目标函数。

如在同一设计中,需要满足一个以上的性能指标,则可分别建立一个以上的目标函数表达式,并以之作为初始模型。

4. 约束条件

约束条件包括常量约束与约束方程两类。常量约束亦称边界约束,它表明设计变量的允许取值范围,如式(1-7)。约束方程亦称性能约束,它是以所选定的设计变量为自变量,以要求加以限制的设计参数为因变量,按一定关系(如性能关系、几何关系、设计规范、……)建立起来的函数式,它常用来限制某些设计性能。式(1-3)、式(1-4)、式(1-5)、式(1-6)等都属于约束方程。约束方程又分不等式约束和等式约束。

可以利用一定方法,将约束形式相互转化。如 $g(x_i) \leq 0$, 可转变为 $-g(x_i) \geq 0$; 亦可转变 $g(x_i) + x_j = 0$ 。在一般表达式中,只写一种而代其余。

在所求解的问题中,有时并无约束,有时则有约束。如例 1 为非线性无约束问题,例 2 为非线性有约束问题,例 3 为线性有约束问题。

5. 设计空间及设计可行域

为便于分析、研究,应用向量及矩阵的知识,可将设计模型转化为设计空间,并在此空间中,讨论择优过程。

如将设计方案抽象为一空间向量 X , 并将与之有关的诸设计变量抽象为诸分向量 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 且各分向量线性独立。则以诸分向量为轴所构成的空间,即为设计空间。如有 n 个独立的设计变量,就可相应地构成 n 维空间,常称为 n 维欧氏空间,记为 E^n 或 R^n 。

如 $n=2$, 则有

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)^T$$

$n=3$, 则有

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = (x_1, x_2, x_3)^T$$

.....

$n=n$, 则有

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

显然,在设计空间中的每一个点,都唯一地确定了一个空间向量。它代表了一组分向量及其数值,实际上也就代表了一种具体的设计方案。

如在设计空间中存在着使目标函数达到极值的点,则该点就代表着一种优化设计方案。如在该空间中仅有一个极值点,则它就是全空间中的最优设计方案。该点常用 X^* 或 X_{opt} 表示。

在设计空间中,被约束条件所限区域,即为设计可行域。它是设计空间中的一个局部,优化设计的寻优过程,一般只应在区域内进行(如图 1-5 示)。最后确定的优化点,也应在此可行域内,或在可行域的边界上。否则,所得设计参数将因超出约束而失去实用价值。

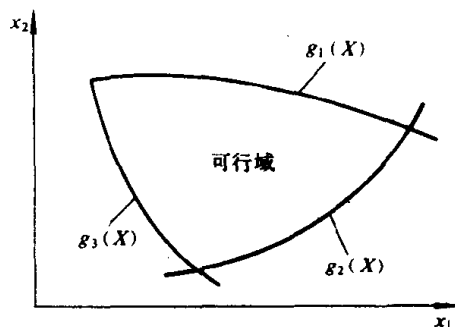


图 1-5 设计可行域

6. 优化设计的一般数学模型

优化模型一般分无约束极小化模型和有约束极小化模型两类。

无约束极小化模型的一般型式为

$$\min f_k(X), \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \quad X \in E^n \quad (1-12)$$

式(1-12)为多目标函数、无约束极小化模型。如 $k=1$, 则为

$$\min f(X), \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \quad X \in E^n \quad (1-13)$$

式(1-13)为单目标函数、无约束极小模型,它是研究优化问题的最基本模型。根据不同的实际要求, k 可为 1 或大于 1 的有限数。

有约束极小化模型的一般型式为

$$\left. \begin{array}{ll} \min & f_k(X), \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \quad X \in E^n \\ & k = 1, 2, \dots, K \\ \text{sub} & g_j(X) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, J \\ & h_l(X) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, L \\ & a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right\} \quad (1-14)$$

式(1-14)一般概括了设计中最复杂的情况。如 $k=1$, 则为单目标函数、有约束极小化模型。如 $k \geq 2$, 则为多目标函数、有约束极小化模型。如仅有 $g_j(X) \geq 0$ (或包括 $g_j(X) \leq 0$), 则称具有不等式约束。如仅有 $h_l(X) = 0$, 则称具有等式约束。如仅有 $a_i \leq x_i \leq b_i$, 则称具有常量约束。