21世纪 自学·复习·考研系列丛书

数学试题精选与答题技巧

新大纲
新题型
新思路

SHUXUESHITI JINGXUAN

YU DATIJIQIAO

富景隆 主编

哈尔滨工业大学出版社

21世纪自学·复习·考研系列丛书

数学试题精选与答题技巧

富景隆　主编

哈尔滨工业大学出版社
哈尔滨

内 容 简 介

本书是根据工科院校数学课程指导委员会所颁布的教学基本要求以及教育部考试中心1999年所颁布的最新考试大纲要求编写的。

本书的主要内容包括大纲要求和典型例题，每章分为两部分：第一部分为必备知识和考试要点，指明读者应掌握的主要内容及其深度广度；第二部分则精选了一些符合于考试要求的典型例题并阐明答题技巧，以便使读者能更深刻、更融会贯通地领会和掌握本部分的基本内容，提高分析问题和解决问题的能力。

这是一本集配合工科院校学生学习工科数学（含高等数学、线性代数、概率论与数理统计）和报考工科硕士研究生复习工科数学于一体的指导书。本书也可作为大专院校教师的教学参考书，以及有志于自学高等数学的读者的自学指导书。

数学试题精选与答题技巧
Shuxue Shiti Jingxuan yu Dati Jiqiao
富景隆 主编
*
哈尔滨工业大学出版社出版发行
（哈尔滨市南岗区教化街21号 邮编150001）
肇东粮食印刷厂印刷
*
开本 787×1092 1/16 印张 22.5 字数 605 千字
1999年8月第1版 1999年8月第1次印刷
印数 1～5 000
ISBN 7-5603-1416-3/O·98 定价 28.00元

前言

随着我国硕士研究生考试制度的改革，对考试科目、考试方法、考试内容等诸多方面提出了体现跨世纪人才素质的要求。工科数学作为工科院校大多数专业硕士研究生入学的必考科目，历来是广大考生关注的重点，其针对性强、读之高效的考研复习指导书也历年是倍受广大考生青睐的“灵丹妙药”。

本书作者曾长期担任教育部(原国家教委)工科数学课程教学指导委员会委员，并于 1985～1995 期间受原国家教委考试管理中心聘请，长期参加并领导过硕士研究生数学入学考试的命题工作，对教学基本要求以及考试中心所颁布的考试大纲，都有较为深入而准确的理解，对各类考试所要求的深广度和应掌握的分寸，也比较清楚。在总结多年本科教学、考研辅导和考研命题之经验的基础上，结合教育部最新考试大纲的要求，经过反复思考、深入研究，编写了这本《数学试题精选与答题技巧》。

本书的特点是：

1.**内容最新**。按照国家教育部最新考试大纲要求编写，包含 1999 年考研题在内的历届典型试题。

2.**技巧性强**。典型例题按类型分类编排，并给出答题方法及技巧，起到指航引路、排障破迷之作用。

3.**重点突出**。必备知识及典型例题全而不滥，精而易懂。

本书主编为富景隆，副主编为富强、王维生，参加编写工作的还有白富多、王希连、王连英、李可成、孙宏伟等人，由于编者水平所限，疏漏不妥之处在所难免，希望得到读者与同仁们的批评指正。

编　者

1999 年 8 月于哈尔滨

目　　录

第一章　函数、极限、连续

函数、极限、连续等基本概念及其运算，是学习工科大学数学的基础，也是从初等数学过渡到高等数学的桥梁，这一部分内容在历年考题中从表面上看所占的比例并不太大，但有关它的内容却几乎渗透在每一道试题之中，因此是不容忽视的。

1.1　函　　数

大　纲　要　求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示方法。
2. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性。
3. 理解复合函数的概念，了解反函数及隐函数的概念。
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形。
5. 会建立简单应用问题中的函数关系式。

1.1.1　必备知识和考试要点

1. 函数及其特性

定义　若在变量 x 和 y 之间存在着一种对应规律，使得变量 x 在其可取值的数集 X 中每取一个值时，变量 y 就有一个确定的值与之对应，这时我们就说 y 是 x 的函数。记为 $y = f(x)$。且将 x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**，自变量 x 可以取值的数集 X 叫做这个函数的**定义域**。

设 a 为 $f(x)$ 定义域中的某一点，今后用记号 $f(a)$ 或 $y|_{x=a}$ 表示函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 时所对应的值。此时也说 $f(x)$ 在 $x = a$ 点是**有定义的**。

定义　若函数 $y = f(x)$ 定义在对称于原点的某区间上，则当 $f(x)$ 满足条件：

$f(-x) = -f(x)$ 时，称 $f(x)$ 为**奇函数**；

$f(-x) = f(x)$　时，称 $f(x)$ 为**偶函数**。

定义　若函数 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 内随 x 增加而减少，即设 x_1, x_2 为 (a,b) 内任意两点，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 $y = f(x)$ 为在区间 (a,b) 内**单调减少的函数**，简记为 $y = f(x) \downarrow (a,b)$，若函数 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 内随自变量 x 增加而增加，即设 x_1, x_2 为 (a,b) 内任意两点，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $y = f(x)$ 为在区间 (a,b) 内**单调增加的函数**，简记为 $y = f(x) \uparrow (a,b)$，同样可以定义在闭区间上或无限区间上的单调增加和单调减少函数。单调增加和单调减少函数，统称为**单调函数**。

定义　若函数 $y = f(x)$ 对数集 A 中的一切元素 x（A 可以是使 $y = f(x)$ 有定义的任何一种区间），都存在一个正数 M，使得有：$|f(x)| \leq M$，则称 $y = f(x)$ 在数集 A 上是**有界的**。如果这样的 M 不存在，就说 $f(x)$ 在数集 A 上是**无界的**。

定义　若存在一个正数 X，能使对一切的 x 均有

$$f(x+X)=f(x) \tag{*}$$

成立，则说 $f(x)$ 是**周期函数**。满足(*)式 X 中的最小者叫做 $f(x)$ 的**周期**。

定义　设已给 y 是 x 的函数

$$y=f(x) \tag{1}$$

若将 y 当作自变量，x 当作因变量，则由函数(1)所确定的 $x=\varphi(y)$ 就叫做函数 $y=f(x)$ 的**反函数**。

由于照顾到人们已经习惯用 x 代表自变量，y 代表因变量，所以也常将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 改记为 $y=\varphi(x)$。例如：

$y=3x+5$ 的反函数本是 $x=\frac{1}{3}(y-5)$，现改记为 $y=\frac{1}{3}(x-5)$；

$y=e^x$ 的反函数本是 $x=\ln y$，现改记为 $y=\ln x$。

我们用记号

$$F(x,y)=0 \tag{2}$$

表示两个变量 x 与 y 之间的一个方程。如果当 x 在某个数集 X 中每取一个 x_0 时，存在方程 $F(x_0,y)=0$（y 为未知数）的一个实根 y_0，那么 y 就成为定义在 X 上的一个函数。我们称这个函数是由方程(2)所确定的**隐函数**。

2. 初等函数

(1) 常数函数 $y=c$

(2) 幂函数 $y=x^\mu$，μ 为非零实数

(3) 三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x$

(4) 反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$

(5) 指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$

(6) 对数函数 $y=\log_a x\ (a>0,a\neq 1)$

统称为**基本初等函数**。有关它们的定义域、图形及简单性质都是每个考生应该掌握的。

定义　若 y 是 μ 的函数，$y=f(\mu)$，μ 又是 x 的函数，$\mu=\varphi(x)$，且后者的值域包含在前者的定义域内时，则构成一个 y 是 x 的函数，且表之为 $y=f(\varphi(x))$，这函数就叫做 x 的**复合函数**。

例如，由 $y=\sin\mu, \mu=x^{1/2}$ 得复合函数 $y=\sin\sqrt{x}$，反过来也可将 $y=\sin\sqrt{x}$ 看作是由 $y=\sin\mu, \mu=x^{1/2}$ 复合而成的复合函数。

由基本初等函数经过有限次加、减、乘、除四则运算以及有限次的复合而构成的函数，叫做初等函数。

1.1.2　典型例题精选与答题技巧

1. 求函数的定义域和表达式

求函数定义域的关键是解不等式或联立不等式组；求函数表达式的关键是由题设联想出 $f(x)$ 所应具有的形式。

【例 1】　若函数 $f(x)$ 的定义域为[0,1]，求函数 $f(\frac{x-1}{x+1})$ 的定义域。

解　只要由 $0\leqslant\frac{x-1}{x+1}\leqslant 1$，知它相当于解不等式组

$$\begin{cases}x-1\geqslant 0\\ x+1>0\\ \frac{x-1}{x+1}\leqslant 1\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}x-1\leqslant 0\\ x+1<0\\ \frac{x-1}{x+1}\leqslant 1\end{cases}$$

前者解为 $x\geqslant 1$，后者解为空集，故所求之定义域为[1，∞)。

【例 2】　若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，试求 $f(x+a)+f(x-a)\ (a>0)$ 的定义域。

解　欲求 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域，只需解不等式组

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}$$

可见 x 应该取在 $a\leqslant x\leqslant 1-a$，而且 a 满足 $a\leqslant 1-a$，于是得

当 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，所求之定义域为 $[a,1-a]$；

当 $a>\frac{1}{2}$ 时，所求之定义域为空集。

【例 3】　已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$，并写出它的定义域。

解　由题设应有 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，即解得

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$$

它的定义域是 $1-x\geqslant 1$，即 $x\leqslant 0$。

【例 4】　已知 $f(x+1)=x^2-3x+2$，求 $f(x)$。

解　此题的一般作法是：先将括号中的式子用单一字母表示，即令 $x+1=u$，从中解出 x 通过 u 的表达式 $x=u-1$，再把它代入已知的函数关系中，使其化为 u 为自变量的函数，即

$$f(u)=(u-1)^2-3(u-1)+2=u^2-5u+6$$

又因为函数关系与自变量所取记号无关，将 u 换成 x 即得所求函数

$$f(x)=x^2-5x+6$$

【例 5】　若已知 $2f(x)+f(1-x)=x^2$，试求 $f(x)$ 的表达式。

解　由所给的函数等式，启示我们不妨设

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

于是从 $2f(x)+f(1-x)=x^2$，有

$$2ax^2+2bx+2c+a(1-x)^2+b(1-x)+c=x^2$$

比较各次项的系数，可解得 $a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{2}{3}$，$c=-\frac{1}{3}$，即

$$f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$$

2. 与函数性质有关的例题

函数的有界性与单调性大多数都是用连续函数与导数来解决。这里只是用定义来讨论函数的奇偶性与周期性。

【例 6】　讨论 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性。

解　由 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$，有

$$f(-x)=\log_a\left[(-x+\sqrt{x^2+1})\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right]=$$

$$\log_a\frac{-x^2+(\sqrt{x^2+1})^2}{x+\sqrt{x^2+1}}=\log_a\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=$$

$$-\log_a(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$$

所以知 $f(x)$ 是奇函数。

【例 7】　求函数 $y=\frac{2^x}{1+2^x}$ 的反函数及其定义域。

解　化所给函数为

$$(1+2^x)y=2^x\quad 即\quad 2^x(1-y)=y$$

于是可解得

$$x=\log_2\frac{y}{1-y}$$

即得所求之反函数为

$$y=\log_2\frac{x}{1-x}$$

它的定义域为(0,1)。

【例 8】 求 $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ 的反函数，并求其定义域。

解 将所给函数两端取立方，有

$$\begin{aligned}y^3=&x+\sqrt{1+x^2}+3(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{2}{3}}(x-\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}+\\&3(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}(x-\sqrt{1+x^2})^{\frac{2}{3}}+x-\sqrt{1+x^2}=\\&2x+3(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}(x-\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}[(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}+(x-\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}]=\\&2x+3(-1)^{\frac{1}{3}}y=2x-3y\end{aligned}$$

所以有 $$x=\frac{1}{2}(y^3+3y)$$

即得所求之反函数为

$$y=\frac{1}{2}(x^3+3x)\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

【例 9】 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数，$f(1)=a$，且对于任何 x 值均有

$$f(x+2)=f(x)+f(2)\tag{$*$}$$

① 试用 a 表示 $f(2)$ 与 $f(5)$；

② 问 a 取什么值时，$f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数。

解 ① 在($*$)式中令 $x=-1$，得

$$f(1)=f(-1)+f(2)$$

又由于 $f(x)$ 是奇函数，$f(-1)=-f(1)$，所以 $f(2)=2f(1)=2a$，又在($*$)中令 $x=1$，得

$$f(3)=f(1)+f(2)=3a$$

最后，在($*$)中令 $x=3$，得

$$f(5)=f(3)+f(2)=5a$$

② 由 ① 知，当且仅当 $a=0$ 时，$f(2)=0$，此时由($*$)式得

$$f(x+2)=f(x)$$

故 $a=0$ 时 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数。

【例 10】 若 $y=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 的图形关于直线 $x=a$ 与 $x=b(a<b)$ 均对称，求证：$y=f(x)$ 是周期函数，其周期为 $2(b-a)$。

证 由假设 $y=f(x)$ 图形关于直线 $x=a$ 与 $x=b$ 对称，即

$$f(a+x)=f(a-x)$$
$$f(b+x)=f(b-x)$$

成立，于是

$$\begin{aligned}f(x)=&f[a-(a-x)]=f[a+(a-x)]=f(2a-x)=\\&f[b-(b+x-2a)]=f[b+(b+x-2a)]=\\&f[x+2(b-a)]\end{aligned}$$

即得证 $y=f(x)$ 是周期函数，周期为 $2(b-a)$。

3. 求复合函数的表达式

最常见的题型是已知 $f(x)$，$\varphi(x)$，求 $f[\varphi(x)]$，而解题的关键是将 $\varphi(x)$ 按照指定的范围代入 $f[\,]$。

【例 11】 设

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|=1\\ -1 & |x|>1\end{cases}\qquad g(x)=e^x$$

求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$。

解　因为 $f[g(x)]$ 表示将 $f(x)$ 中的 x 换成 $g(x)$，所以

$$f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases}1 & |e^x|<1\\ 0 & |e^x|=1\\ -1 & |e^x|>1\end{cases}=$$

$$\begin{cases}1 & e^x<1\\ 0 & e^x=1\\ -1 & e^x>1\end{cases}=\begin{cases}1 & x<0\\ 0 & x=0\\ -1 & x>0\end{cases}$$

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e^1 & |x|<1\\ e^0 & |x|=1\\ e^{-1} & |x|>1\end{cases}=\begin{cases}e & |x|<1\\ 1 & |x|=1\\ e^{-1} & |x|>1\end{cases}$$

【例 12】 设

$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\leqslant x\leqslant 4\\ x-2 & 4<x\leqslant 6\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x^2 & 0\leqslant x<2\\ 2+x & 2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$，求 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$。

解　先由 $f[g(x)]$ 中的 $g(x)$ 入手

$$当 0\leqslant x<2 时，0\leqslant x^2<4,\quad f[g(x)]=f(x^2)=\sqrt{x^2}=x$$

$$当 2<x\leqslant 4 时，4<2+x\leqslant 6,\quad f[g(x)]=(2+x)-2=x$$

总之有

$$当 0\leqslant x\leqslant 4 时,\quad f[g(x)]=x$$

再由 $g[f(x)]$ 中的 $f(x)$ 入手

$$又当 0\leqslant x<4 时，0\leqslant\sqrt{x}<2,\quad g[f(x)]=g(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2=x$$

$$当 4<x\leqslant 6 时，2<x-2\leqslant 4,\quad g[f(x)]=g(x-2)=2+(x-2)=x$$

$$当 x=4 时，\sqrt{x}=2，g[f(x)]=4$$

总之有

$$当 0\leqslant x\leqslant 6 时，g[f(x)]=x$$

【例 13】 (选择题)　　设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leqslant 0\\ x^2+x & x>0\end{cases}$　则

(A) $f(-x)=\begin{cases}-x^2 & x\leqslant 0\\ -(x^2+x) & x>0\end{cases}$　　(C) $f(-x)=\begin{cases}x^2 & x\leqslant 0\\ x^2-x & x>0\end{cases}$

(B) $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x) & x<0\\ -x^2 & x\geqslant 0\end{cases}$　　(D) $f(-x)=\begin{cases}x^2-x & x<0\\ x^2 & x\geqslant 0\end{cases}$

解　欲建立 $f(-x)$ 的表达式，只需分 $-x\leqslant 0$ 与 $-x>0$ 两种情形来讨论，于是有：

$$当 x\geqslant 0，即 -x\leqslant 0 时，则 f(-x)=(x)^2=x^2$$

$$当 x<0，即 -x>0 时，则 f(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x$$

从而

$$f(-x)=\begin{cases}x^2 & x\geqslant 0\\ x^2-x & x<0\end{cases}$$

即应选择(D)。

本题也可以在原 $f(x)$ 的表达式中令 $x=-y$ 而得出

$$f(-y)=\begin{cases}(-y)^2 & -y\leqslant 0\\ (-y)^2+(-y) & -y>0\end{cases}$$

亦即得

$$f(-x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 0\\ x^2-x & x<0\end{cases}$$

1.2 极　限

极限理论是高等数学的理论基础，在高等数学中连续、导数、微分、定积分、级数的敛散性等都是以极限的形式出现，另一方面，极限运算规则又是微积分运算规则的依据，可见极限理论的重要性。

大　纲　要　求

1. 理解极限的概念，理解函数左、右极限的概念以及极限存在与左、右极限之间的关系。

2. 掌握极限的性质及四则运算法则。

3. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法。

1.2.1 必备知识和考试要点

1. 数列的极限

设 $u_n=\varphi(n)$ 是定义在自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 上的一个函数，当 n 依序取自然数集的每一个值时，就得一串相应的函数值

$$u_1,u_2,u_3,\cdots,u_n$$

这串数叫做一个**数列**，并记为 $\{u_n\}$。其中，$u_n=\varphi(n)$ 称为数列的**公项**或**一般项**。显然，当一个数列的公项已知时，数列就完全被确定了。

对于一个数列 $\{u_n\}$，我们观察它随着 n 的无限增大，看其是否有一个确定的趋势，观察结果表明它的趋势不外以下三种：

(1) 随着 n 的增大，u_n 的值总趋向于一个确定的常数 A；

(2) 随着 n 的增大，u_n 的值不管怎样变化，然而就其各项的绝对值来看，却是无限增大的；

(3) 随着 n 的增大，u_n 的值既不趋向于一个确定的常数，也不是就绝对值而言无限增大的。

对于第(1)种情形，我们称数列 $\{u_n\}$ 是有极限的，其确切定义如下：

定义　若对于任意给定的正数 ε，总存在相应的正整数 N，使当 $n>N$ 时，恒有

$$|u_n-A|<\varepsilon$$

成立，则称数列 $\{u_n\}$ 以 A 为**极限**，记为

$$\lim_{n\to\infty}u_n=A \qquad 或 \qquad u_n\to A(当\ n\to\infty\ 时)$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$，我们也说 $\{u_n\}$ 是收敛于 A 的。

对于第(2)、(3)两种情形，它们的共同点是，随着 n 的无限增大，u_n 不趋向于一个确定的常数，这时我们就说 $\{u_n\}$ 的极限是不存在的，或者说 $\{u_n\}$ 是发散数列，特别是对第(2)种情形，我们说 $\{u_n\}$ 是趋向于无穷大的数列，或说 $\{u_n\}$ 是一个无穷大量。其精确定义亦可叙述如下：

定义　若对任意给定的正数 G，总存在相应的正整数 N，使当 $n>N$ 时，恒有

$$|u_n|>G$$

成立，则称数列$\{u_n\}$是趋向于无穷的，记为

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \infty \qquad 或 \qquad u_n \to \infty(当\ n\to\infty\ 时)$$

对于数列极限，我们有以下定理：

定理一　设

(1) 数列$\{u_n\}$，$\{v_n\}$，$\{w_n\}$之间从某一个 N 项之后，均有 $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = A$，则

$$\lim_{n\to\infty} v_n = A$$

定理二　设

(1) 数列$\{u_n\}$各项均满足 $u_n \geqslant 0$；

(2) $\{u_n\}$是有极限的数列，即$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$，则

$$A \geqslant 0$$

定理三　若$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$，则$\{u_n\}$必为有界数列。

定理四　若$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A \neq 0, u_n \neq 0$，则数列$\{\frac{1}{u_n}\}$亦必是有界的。

由定理三可见，如果一数列不是有界的，那么这数列一定没有极限，所以数列的有界性是数列有极限的必要条件，但不是充分条件。下面我们给出数列极限存在的一个充分条件。

数列极限存在准则：若数列$\{u_n\}$单调递增且有上界 A(即 $u_n \leqslant A$)，则$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} u_n \leqslant A$；

若数列$\{u_n\}$单调递减且有下界 $B(u_n \geqslant B)$，则$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} u_n \geqslant B$。

简单地说，**凡单调有界数列，必存在极限**。作为极限存在准则应用之一，我们可以论证对数列$\{u_n\} = \{(1+\frac{1}{n})^n\}$，有

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

此处 $e = 2.7182818284\cdots$ 是一个无理数。

2. 函数的极限

现在我们对函数 $y = f(x)$ 建立极限概念，这时自变量 x 的变化方式虽然比较多，但总可归纳为：

(1) 自变量 x 趋于某一个常数 x_0，此时记为 $x\to x_0$，而 $x\to x_0$ 又可细分为三种情况：

① x 从左边(小于 x_0)趋向 x_0，此时记为 $x\to x_{0-}$；

② x 从右边(大于 x_0)趋向 x_0，此时记为 $x\to x_{0+}$；

③ x 以任意方式趋向 x_0，此时记为 $x\to x_0$。

(2) 自变量 x 的绝对值无限制地增大，此时记为 $x\to\infty$，$x\to\infty$ 又可细分为三种情况：

① $x>0$ 且 $x\to\infty$，此时记为 $x\to+\infty$；

② $x<0$ 且 $x\to\infty$，此时记为 $x\to-\infty$；

③ x 以任意方式(可正可负)趋向于 ∞，记为 $x\to\infty$。

我们考虑当 $x\to x_{0-}$ 时(但 $x\neq x_0$)，$f(x)$ 是否有其确定的趋向，若有则称其所趋向的那个值 L 为其左极限。其精确定义为：

定义　若对于任意给定的正数 ε，总存在一个相应的正数 δ'，使对所有满足 $x_0-\delta' < x < x_0$ 的 x，恒有

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

成立，则说 $f(x)$ 在 x_0 点的左极限为 L，记为

$$\lim_{x\to x_{0-}} f(x) = L \qquad 或 \qquad f(x_0-0) = L$$

完全相仿，我们也可以给出：

定义　若对于任意给定的正数 ε，总存在一个相应的正数 δ''，使对所有满足 $x_0 < x < x_0 + \delta''$ 的 x，恒有

$$|f(x) - R| < \varepsilon$$

成立，则说 $f(x)$ 在 x_0 点的右极限为 R，记为

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = R \qquad 或 \qquad f(x_0 + 0) = R$$

定义　若函数 $f(x)$ 在一点 x_0 处的右极限与左极限均存在，则称其右极限 R 与左极限 L 之差为 $f(x)$ 的点 x_0 处的**跳跃量**，记为 $S\{f(x_0)\}$，即

$$S\{f(x_0)\} = R - L。$$

当 $S\{f(x_0)\} \neq 0$ 时，我们说 $f(x)$ 在点 x_0 处产生间断。

定义　若 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限 L 与右极限 R 均存在且相等，，则说 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在，其极限值为 $A(A = L = R)$，记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$。

值得注意的是这个定义等价于：

定义　设 $f(x)$ 在 x_0 点的某一个邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上有定义（x_0 除外），若对于任意给定的正数 ε，总存在一个相应的正数 δ，使得对于满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的所有 x，恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立，则说 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时以 A 为极限，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \qquad 或 \qquad f(x) \to A（当 x \to x_0 时）$$

其实这里的 δ，乃是左极限中的 δ' 与右极限中的 δ'' 两者当中的最小者，即 $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$。

与数列极限的几个定理一样，对于函数极限，我们也有定理：

定理五　设有三个函数 $f(x), g(x), h(x)$，并且

(1) 对于 x_0 的某邻域（x_0 除外）上每一点 x 均有 $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$；

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$，则

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = A$$

定理六　设

(1) $f(x)$ 在 x_0 的某邻域（x_0 除外）上均有 $f(x) \geqslant 0$；

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则　　$A \geqslant 0$

定理七　若 $\lim\limits_{x \to x_0} = A$，则 $f(x)$ 在 x_0 的某一个邻域（x_0 除外）上是有界的。

定理八　若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \neq 0, f(x) \neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 在 x_0 的某一个邻域（x_0 除外）上是有界的。

定理九　若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A, \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$，则

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$$

$$\lim_{x \to x_0}(f(x)g(x)) = AB$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}（当 B \neq 0 时）$$

推论一　若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = k$，$c$ 为常数，则

$$\lim_{x \to x_0} cf(x) = c \lim_{x \to x_0} f(x) = ck$$

推论二　设有多项式

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

$$Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m$$

及其分式

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}，而且\ Q(x_0) \neq 0，则$$

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0) \qquad \lim_{x \to x_0} R(x) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

关于函数极限,还有下面的事实:

若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \geqslant 0,\ f(x) \geqslant 0$,则$\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{A}$。

应该指出的是:如果将上述定理中的 $x \to x_0$ 皆换为 $x \to \infty$(或 $x \to +\infty$,或 $x \to -\infty$)时,那么相应的定理仍成立,故不赘述。

我们在$\lim\limits_{n \to \infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$的基础上还可以证明

$$\lim_{x \to \infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

也成立,它与

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

合称为两个重要极限。

1.2.2　典型例题精选与答题技巧

1.数列的极限

求数列极限的方法主要有以下三种:

(1) 用定义或极限运算定理求极限,见例 1。

(2) 利用已有公式或拆项法,求得通项 x_n 的简洁表达式再求极限,见例 2 ~ 7。

(3) 用数列的极限存在准则求极限,见例 8 ~ 12。

【例 1】　讨论$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2^n - q^n}{2^n + q^n}$　$(q \neq -2)$之值。

解　$q = 2$时,　$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2^n - q^n}{2^n + q^n} = 0$

$|q| > 2$时,$|\dfrac{2}{q}| < 1$,有

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^n - q^n}{2^n + q^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{(\frac{2}{q})^n - 1}{(\frac{2}{q})^n + 1} = -1$$

$|q| < 2$,$|\dfrac{q}{2}| < 1$,有

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^n - q^n}{2^n + q^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - (\frac{q}{2})^n}{1 + (\frac{q}{2})^n} = 1$$

【例 2】　求$\lim\limits_{n \to \infty}(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2})$。

解

$$\lim_{n \to \infty}(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}) =$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2}(\frac{n(n+1)}{2}) = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

【例 3】　求$\lim\limits_{n \to \infty}(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \cdots + \dfrac{2n-1}{2^n})$。

解　记$x_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \cdots + \dfrac{2n-1}{2^n}$,则