大学基础数学自学丛书

有限数学引论

龚光鲁

大学基础数学自学丛书

有限数学引论

龚光鲁

上海科学技术出版社

大学基础数学自学丛书
有 限 数 学 引 论
龚 光 鲁
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路 450 号）
新华书店上海发行所发行 无锡县人民印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 12 字数 261,000
1982 年 11 月第 1 版 1982 年 11 月第 1 次印刷
印数 1—26,500
统一书号：13119·1002 定价：(科三) 0.95 元

序　言

我们伟大的祖国，为了尽早实现四个现代化的宏伟大业，需要造就大批又红又专的、具有高度文化修养和现代科学知识的工业大军、农业大军、科技大军、文化大军和国防大军。这是一项摆在全体人民面前的极为艰巨的任务。人才的培养，基础在教育。然而，目前我国每年只可能吸收很小一部分中学毕业生进入高等院校深造，大批已经走上或将要走上各种工作岗位的千千万万青年人，都迫切要求学习现代科学基础知识，以适应新时期的需要。所以，在办好高等院校的同时，还应尽量为那些不能升入大学或无法离职进入大学的青年提供良好的业余学习条件。为此，上海科学技术出版社编辑出版《大学基础数学自学丛书》、《大学基础物理自学丛书》和《大学基础化学自学丛书》。

《大学基础数学自学丛书》由我们负责主编，由北京大学、北京师范大学和复旦大学数学系有关教师执笔编写。包括《一元函数微分学》、《一元函数积分学》、《多元函数微积分》、《级数》、《空间解析几何》、《高等代数》、《复变函数论基础》、《常微分方程基础》、《概率论与数理统计基础》、《微分几何基础》、《有限数学引论》等共十一种，可供具有相当于高中文化程度、有志于自学大学数学课程的广大读者使用。

本《丛书》是一套大学基础课的自学读物，与中学程度的《数理化自学丛书》相衔接。为了使自学读者在没有教师讲课的条件下读懂、学好，其内容选取和编排不同于一般的大学课

本。文字叙述用讲课的形式书写；概念引入尽量从具体的、通俗的地方入手，逐步深入；内容安排抓住重点，讲深讲透。为了对读者解题有所启发，巩固所学的基础知识等，文中举有较多的例题；凡估计读者容易发生困难的地方，尽量给予必要的分析。习题、例题均按章分节安排，书后附有习题答案或提示。每册之首都有编者的话，指导读者自学全书。总之，想尽可能减少自学中的困难。

自学，时间总比在校学习紧得多。要自学有成就，没什么“诀窍”，如果有的话，那就是“多思考，多练习，熟能生巧”。

学习必须从自己的实际水平出发，学每本书要有一定的基础。选读顺序可根据编者的话的指导进行。有志者，事竟成。希望广大读者循序渐进、持之以恒、锲而不舍地学习。愿大家努力学好。

《丛书》编审过程中得到了北京大学数学系、北京师范大学数学系和北京师范学院数学系领导的大力支持；许多同志参加了提纲、样稿的讨论，并提供了宝贵的意见；编撰者和审稿人为《丛书》付出了辛勤的劳动，谨此一并致谢。

由于《丛书》编写和出版的时间仓促，难免有缺点和错误，希望读者不吝赐教！

江泽涵　　赵慈庚

于北京大学燕南园　于北京师范大学工五楼

1980年1月

编者的话

有限数学与其说是一个数学学科，还不如说是一些数学学科的总称．按其本来的含义，它只研究有限个元素的集合所涉及的数量或类似于数量的关系．有限数学包含的范围是极其广泛的，几乎很难穷尽它．

本书作为引论，主要目的是介绍一些较为常用的有限数学知识和方法．这些方法大多不太适合于列入一般的数学分析、几何或代数等教程中．因此在本书中，我们并不拘泥于有限数学的定义，以及它到底有些什么具有代表性的重要课题，而只是选取一些初浅的、但是应用范围较为普遍的课题，甚至包括，严格地说，并不属于有限数学的个别课题．具有中等数学基础的读者，可通过学习本书而掌握一些初等的数学方法，为进一步学习其他高等数学而打下一定程度的基础．

本书第一章介绍集合的概念；并在附录中介绍近一二十年来活跃于应用科学中的弗晰集（模糊集）概念；第二章介绍命题逻辑与谓词概念；第三章介绍集合上的关系、运算以及一些常见的代数系统；第四章列举一些数数问题及数数的基本方法，其中的麦比乌斯变换法是初等数论中的一个方法；第五章介绍有限图与平面图的一般概念．这些知识是在计算机科学及其它应用领域中必需的数学工具之一．其中第一章是全书的基础，其它各章除某些例题与个别定义、定理外，都可以自成系统．因此，如将与别的章节有联系的个别部分暂时略过，读者就可以从第一章跳读任何一章．

本书力求通俗易懂，在各章中都安排了丰富有趣的例题，而不需要很多准备知识，适合于具有中学数学知识的读者自学。

读者在自学过程中，应把注意点放在弄清定义与定理的含义、证明的要点与关键以及运算的要领上，要在脑中有一个清晰的“形象”。在没有弄清定义与定理的含义之前，最好不要往下读。

本书中有些标“*”号的部份，读者在初读时如果感到较难，则可以在学完这一章后，回过来补读，甚至可以略去不读，这不影响掌握全书知识的完整。

北京师范大学数学系汪培庄同志不辞辛苦审阅了本书初稿，提出了不少宝贵的意见，在此谨致谢意。

限于编者的知识水平，如有不当与不足之处，请同志们批评指正，以便改进。

龚光鲁
于北京大学数学系
1981年8月

符号说明表

$a, b, c, \cdots$	集合中的元素
$A, B, C, \cdots$	集合；矩阵；事件
$\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C}, \cdots$	弗晰集
$\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{G}, \cdots$	关系
$x, y, z, \cdots$	变项
$p, q, r, \cdots$	命题
$a \in A$	a 是集 A 的元素
$a \overline{\in} A$	a 不是集 A 的元素
$\emptyset$	空集
$\dot{\phi}$	空关系
$\cup$	集合的"并"；弗晰集的"并"；事件的"和"；关系的"和"
$\cap$	集合的"交"；弗晰集的"交"；事件的"积"
$\overline{A}$	集合 A 的补集；事件 A 的对立事件
$\overline{\boldsymbol{R}}$	关系 $\boldsymbol{R}$ 的"补"关系
$-$	集合的"差"；弗晰集的"差"；事件的"差"；关系的"差"
$\subset$	集合的"包含"；弗晰集的"包含"（右包含左）；事件的"蕴涵"；关系的"蕴涵"（左蕴涵右）
$=$	集合的相等；关系的相等
U	全集，论域

$A \times B, X \times Y, \cdots$ $X^n = X \times X^{n-1}$	集合的笛卡儿积
$\vee$	命题的“析取”(或),两数中较大的一个;矩阵间的一种运算
$\wedge$	命题的“合析”(且);两数中较小的一个;矩阵间的一种运算
$\sim \square$	命题的“否”(非);矩阵的一个运算
$\rightarrow$	条件(命题),定向图的顶点间的可达性
$\leftrightarrow$	双条件(命题);(无向)图的顶点间的可达性
$\sim$	图的顶点之间的连结性;代数系统间的同态
$\Rightarrow$	命题间的“蕴涵”关系
$\Leftrightarrow, \equiv$	命题间的逻辑等价关系
$\mathbf{1}$	恒真命题;元素全是 1 的矩阵
$\mathbf{0}$	恒假命题;元素全是 0 的矩阵
$F(x_1, \cdots, x_n)$	含变项 $x_1, \cdots, x_n$ 的一个谓词
$\exists$	“存在”
$\forall$	“对一切”
$\exists !$	“存在唯一的一个”
$a\boldsymbol{R}b$,	a 与 b 之间存在着 $\boldsymbol{R}$ 关系
$A_R, A_S, A_G, \cdots$	关系 $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}$ 的结合矩阵;图 G 的结合矩阵
A^T	矩阵 A 的转置矩阵
$\boldsymbol{R}^{-1}$	关系 $\boldsymbol{R}$ 的逆关系
$[x]_R, [y]_R, \cdots$	等价关系 $\boldsymbol{R}$ 的等价类
$\circ$	关系或映射的复合运算;结合矩阵的一种运算
$(X, \leqslant)$	半序集 X

$f, g, h, \cdots$	映射
f^{-1}	逆映射
$D(\boldsymbol{R})$	关系 $\boldsymbol{R}$ 的定义域
$W(\boldsymbol{R})$	关系 $\boldsymbol{R}$ 的值域
$f_1 \vert_X$	映射 f_1 在集合 X 上的限制
I_X	集合 X 上的恒同映射
$\begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & n \\ i_1, & i_2, & \cdots, & i_n \end{pmatrix}$	置换
N	全体自然数
Z_p	$\{1, 2, \cdots, p\}$
$\oplus_p$	模 p 加法
$\otimes_p$	模 p 乘法
$(\bmod p)$	按模 p
$*, ◎, \odot, \cdots$	运算
$◎ \times \odot$	运算的直接积
$(\times; ◎)$	带有运算 ◎ 的代数系统
e_l, e_r, e	左单位元，右单位元，单位元
O_l, O_r, O	左零元，右零元，零元
$a_l^{-1}, a_r^{-1}, a^{-1}$	a 的左逆，右逆，逆元
χ_A	集合 A 的示性函数
$X/\boldsymbol{h}, X/\boldsymbol{R}$	X 按等价关系 $\boldsymbol{h}, \boldsymbol{R}$ 全成的商集
$\cong$	同构
f_h, f_R	自然同态映射
H_a	陪集
$\ker(h)$	映射 h 的核
$n!$	n 阶乘$(=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)$
R_n^m	n 个元素中选 m 个的可重复排列数

P_n^m	n 个元素中选 m 个的不可重复排列数
C_n^m	n 个元素中选 m 个的不可重复组合数
D_n^m	n 个元素中选 m 个的可重复组合数
$C_n^{n_1, n_2, \cdots, n_m}$	把 n 个元素分成 m 组，第 k 组有 n_k 个元素 $(k=1, 2, \cdots, m)$ 的不同分法数
$n(A)$	集合 A 的元素个数
$\left[\frac{n}{m}\right]$	分数 $\frac{n}{m}$ 的整数部分
$S_k \equiv S_k(A_1, \cdots, A_n)$	$\sum\limits_{i_1<\cdots<i_k} n(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$
$N_{(m)}(A_1, \cdots, A_n)$	属于 $A_1, \cdots, A_n$ 中 m 个的元素个数
$N_{[m]}(A_1, \cdots, A_n)$	属于 $A_1, \cdots, A_n$ 中 m 个但不属于其中任意 $m+1$ 的元素的个数
$A_{[r]}(n, m)$	把 n 个不同的球放到 m 个相异的格子中去，恰有 r 个空格的放法数
$A_{(r)}(n, m)$	在上述情况中，至少有 r 个空格的放法数
$A(n, m)$	(即 $A_{[0]}(n, m)$)$=\sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k (m-k)^n$
$A'_{[r]}(n, m)$, $A'_{(r)}(n, m)$, $A'(n, m)$	与上面类似，但 n 个球是相同的
$f_m(n)$	n 个相同的球放到 m 个相同的格子中去的不同放法数
$[m]^n$	$=m(m+1)\cdots(m+n-1)$
$(t)_n$	$=t(t-1)\cdots(t-n+1)$, $((t)_0=1)$
$s(n, k)$	第一类斯特林数：$(t)_n=\sum\limits_{k=0}^{n} s(n, k) t^k$
$S(n, k)$	第二类斯特林数：

	$t^n=\sum_{k=0}^{n}S(n, k)(t)_k$
$\mu(x, y)$	麦比乌斯函数
$N(q_1, \cdots, q_m; r)$	瑞姆赛数
$[v_1, v_2]$, $\overleftrightarrow{[v_1, v_2]}$	(图的)边或双向边
$\overrightarrow{[v_1, v_2]}$	定向边
$G=\langle V, E\rangle$	图
$d^+(v)$, $d^-(v)$, $d(v)$	顶点 v 的正结合度,负结合度,结合度
$R(G)$	图 G 的贝蒂数
$\chi(G)$	图 G 的特征数
$\rho(G)$	图 G 的连通分量数
$\gamma(G)$	图 G 的着色数
$\varkappa(G)$	图 G 的连通度
$\oplus$	(初等环路的)直和运算
K_n	n 个顶点的完全图
$K_{n,m}$	顶点数分别为 n 及 m 的完全二分图
G^*	G 的补图
$G=\langle V_1, V_2; E\rangle$	二分图
$G_{u=v}$	把顶点 u 与 v 合并后的缩图
G_{u-v}	把顶点 u 与 v 连边后的扩图
$c(T)$, $c[v, u]$, $c(\gamma)$	树 T, 边 $[v, u]$, 路 γ 的价格

有限数学

目　　录

第一章　有限集合

第二章　逻　　辑

第三章　关系、映射与运算

第四章 集合的数数问题

第五章 有限图引论

习 题 答 案

第一章

有限集合

第一节　集合的基本知识复习

在中学数学中，我们曾经遇到过“集合”这个概念．为了本书引用方便，我们在这里简要地回忆一些重要的概念．“集合”这个词可以用来表示任何一组东西，只要我们对每一个特定的东西都能确定它是否属于这个组就行．一个性质、一种分类或一种范围常常相应地规定了一个集合．

定义1　一个集合是指具有确切含义的一堆东西．这堆东西中的每一个，称为这个集合的*元素*．集合中的每两个元素都认为是不同的．

一般用大写拉丁字母表示一个集合，有时还用带下标或上标以示区别．用记号 $a\in A$、$a\overline{\in} A$ 分别表示 a 是 A 的元素和 a 不是 A 的元素．只有有限个元素的集合叫做*有限集*．“有限数学”的对象往往是某些有限集．

描写一个集合的方法有两种：一种是列举法，在一个花括号内列出这个集合的所有元素．这种方法对元素多的或规律性复杂的集合无能为力；另一种是清楚地描述这个集合的元素所具有的特性，称为特征描述法．例如

$Y=\{a|a$ 为某平面 P 上的一个矩形，a 的面积 $=1\}$

表示 Y 为平面 P 上一切具有面积为 1 的矩形所组成的集合．又如集合

$V=\{x|x$ 实数，$x^2+1=0\}$；

$V'=\{$直角三角形$|$直角边a、b及斜边c满足$a^2+b^2>c^2\}$都没有任何元素．这种没有元素的集合可以认为都是一样的，称为空集．在集合论中约定：空集只算一个，不再按其具体的来源区别它们．空集记为$\emptyset$．

定义 2 如果集合A中的元素都是集合B中的元素，则称A是B的子集，记为$A\subset B$（记号"$\subset$"是由记号"$\leqslant$"变形而来的），或说B包含A（见图 1-1）．

显然，对任何集合A，均有$A\subset A$，$\emptyset\subset A$．

须要注意的是：即使是同一个集合的两个子集，也未必一定可以比大小．

如果$A\subset B$，$B\subset A$，则称A与B相等，记成$A=B$．

为了对集合的运算有直观形象，我们常用平面上的一个图形内所包含的点来表示一个集合，称为集合的文氏（Venn）图．

定义 3 把A、B两个集合中的元素放在一起（相同的元素只算一个），所得到的新集合叫做A与B的并集（或和集），记成$A\cup B$（或$A+B$）（见图 1-2）．

定义 4 把A、B两个集合中共有的元素放在一起所得到的新集合叫做A与B的交集（或积集），记成$A\cap B$（或AB）（见图 1-3）．若$A\cap B=\emptyset$，则称A与B不交（见图 1-4）．

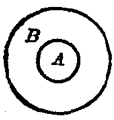

图 1-1

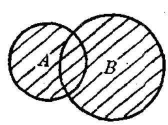

图 1-2

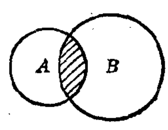

图 1-3

定义 5 把A中不属于B的那些元素放在一起所得到的新集合叫做A与B的差集，记成$A-B$（或$A\backslash B$）（见图