

燃烧过程数值计算

王应时 范维澄 著
周力行 徐旭常

科学出版社

1986

内 容 简 介

燃烧过程数值计算(或称计算燃烧学)是近年来兴起的一个十分活跃的研究领域,它具有很大的科学价值和实际意义。

本书是计算燃烧学方面的一本专著,它汇集本学科的最新进展和作者的研究经验,系统地阐述了燃烧过程数值计算的学术思想、理论体系和处理方法,包括湍流模型、湍流燃烧模型、火焰传热模型、两相燃烧模型和独具特色的数值方法。叙述力求简明扼要,重点突出。

本书可供在工程热物理、能源、航天、航空、化工、冶金、核电、兵工等部门从事流体流动、传热传质和燃烧过程的研究、装置设计和教学工作的科技人员、大学教师和研究生参考。

燃烧过程数值计算

王应时 范维澄 著
周力行 徐旭常

责任编辑 陈文芳 李雪芹

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1986 年 11 月第 一 版 开本: 850×1168 1/32

1986 年 11 月第一次印刷 印张: 11 1/2

印数: 精 1—2,250 插页: 精 2
平 1—2,100 字数: 299,000

统一书号: 15031·748

本社书号: 4839·15—10

定价: 布脊精装: 4.05 元
平 装: 3.25 元

前 言

十五年来一个新的研究领域——流体流动、传热传质和燃烧过程的计算机模拟迅速地发展起来,计算流体力学、计算传热传质学和计算燃烧学相继出现,用理论直接指导实验和设计工作的重要变革正在兴起。

国内燃烧过程数值计算的研究已有近十年的历史,但真正引起人们的注意和兴趣却是近几年的事。工程热物理学会很有远见地热情支持了这一新兴领域的发展,它举办多种形式的学术活动,使得国外的最新成就能广泛传播,国内的研究成果能及时交流。目前一批高等学校和研究部门正相继进入该领域,越来越多的人看到并逐渐相信:以大型计算机为工具,把燃烧理论和数值方法相结合,必将带来燃烧科学的繁荣,必将带来燃烧装置设计和试验工作的革命性变化。

本书由中国科学院工程热物理所王应时,中国科学技术大学范维澄,清华大学周力行、徐旭常等四人合著。它是我们各人多次讲学内容的系统综述。它概括了本学科的最新进展和我们四人在国内外开展实际研究工作的体会。

我们希望本书的出版有助于促进该学科的传播、交流和发展,有助于促进燃烧装置试验和设计在更大程度上的计算机化。本书不当之处,敬请读者批评指正。

本书根据统一的大纲由四人分章节写成:王应时写第二、七、八章;范维澄写前言,第一、三、六章;周力行写第四章;徐旭常写第五章。在相互检查的基础上最后由王应时定稿。作者署名以姓氏笔划为序。

目 录

符号表	v
第一章 导论	1
§ 1.1 燃烧过程数值计算的科学价值和实际意义	1
§ 1.2 历史背景	2
§ 1.3 内容梗概	3
第二章 气体湍流流动	7
§ 2.1 无粘性气体动力学方程组	7
§ 2.2 粘性气体动力学方程组	10
§ 2.3 湍流的数学模型	23
§ 2.4 计算例题	46
第三章 气体湍流燃烧	64
§ 3.1 引言	64
§ 3.2 湍流扩散火焰模型	71
§ 3.3 湍流预混火焰模型	79
§ 3.4 几率分布函数的输运方程模型	91
§ 3.5 平均反应速率的输运方程模型	93
§ 3.6 ESCIMO 湍流燃烧理论	96
§ 3.7 复杂化学反应系统的数学模型	116
第四章 火焰传热过程的数值计算	134
§ 4.1 概述	134
§ 4.2 热流法	140
§ 4.3 区域法	147
§ 4.4 离散发射和概率模拟法	154
§ 4.5 火焰传热过程概率模拟计算方法的改进和应用实例	176
第五章 多相(两相)流动和燃烧	204
§ 5.1 颗粒悬浮流的基本特征及性质	204
§ 5.2 颗粒悬浮体的单流体模型(无滑移模型)	205

§ 5.3	单流体模型在液雾及煤粉火焰研究中的应用及评价·····	209
§ 5.4	颗粒轨道模型(分散颗粒模型)·····	214
§ 5.5	颗粒群轨道模型的数值解法·····	218
§ 5.6	轴对称射流煤粉火焰轨道模型数值计算·····	237
§ 5.7	液雾蒸发和燃烧的轨道模型数值计算·····	243
§ 5.8	煤粉冷态混合及燃烧的轨道模型数值计算·····	254
§ 5.9	对颗粒轨道模型的评价·····	260
§ 5.10	颗粒悬浮体的双流体或多流体模型(多连续介质模型)·····	260
§ 5.11	颗粒悬浮体多流体模型的数值解法·····	264
§ 5.12	多相流的多流体模型的应用与评价·····	267
第六章	反应流基本方程的数值解法·····	286
§ 6.1	微分方程的离散化·····	287
§ 6.2	差分方程的系数·····	291
§ 6.3	压力场的作用及求解·····	302
§ 6.4	差分方程组的解法·····	310
§ 6.5	计算机程序的选择和编制·····	318
第七章	涡量-流函数方程的解法·····	324
§ 7.1	基本方程及其讨论·····	326
§ 7.2	边界条件和源项的处理·····	337
§ 7.3	差分方程的建立及其求解·····	341
§ 7.4	影响收敛性和精确性的一些因素·····	346
第八章	结束语·····	348
	索引·····	354

第一章 导 论

§ 1.1 燃烧过程数值计算的科学价值和实际意义

1.1.1 燃烧装置设计的新手段

从燃烧装置出现到现在的几千年内,燃烧器的设计和改进主要是靠试验,包括近代发展起来的冷态模型试验、热态模型试验和全尺寸装置试验。人们依靠试验取得数据和经验公式,同时也依靠试验发现问题,改进设计。

燃烧过程的数值计算以计算机为桥梁,把燃烧理论、实验和燃烧器设计三者有机地结合起来,开辟了用燃烧理论直接指导实验和设计工作的途径。把燃烧器的几何形状、结构尺寸和进出口状态作为定解条件,通过计算机求解控制微分方程组,便可以计算出燃烧器内部流体速度、温度和组分浓度等参数的分布及其变化,预测装置的气动、传热和燃烧性能以及污染物排放水平,在计算机上进行设计方案的初步论证和燃烧器性能调试。这不但有助于深化对基本现象和过程的认识,而且使装置的设计最佳化在更大程度上依靠合理的计算,从而减少实验工作的盲目性和工作量,节约设计和试验过程中的能源、材料和人力。

1.1.2 使燃烧学上升到理论高度

几十年前人们已经建立了化学流体力学基本方程组,但由于方程数目多、耦合和非线性,只有经过大量简化才可能求解。这一方面使得人们无法通过将解与实验对照来检验理论,因为难以区分这种解的误差是来源于基本理论还是来源于人为的假设;另一

方面使得燃烧学长期停留在分类综合实验现象和对极个别层流现象（如纯质燃料单滴燃烧、本生灯火焰等）孤立地进行分析的阶段。

燃烧过程的数学模拟提供了在一般情况下求解基本方程的手段，它把分散的理论分析和实验现象统一起来。一方面通过计算结果与实验数据的对比，检验和发展理论模型；另一方面通过各种条件（包括各种极端条件）下的数值计算可深化对燃烧过程的认识和预言新现象的发生，进一步揭示燃烧规律，使燃烧学上升到系统理论的高度。

1.1.3 有助于邻近学科的发展和边缘学科的形成

在对实际工程燃烧过程进行数值计算时，为建立数学上的定解问题，必须找到描述湍流输运以及湍流与燃烧相互作用的途径。这需要与流体力学、化学动力学和热物理测量工作者配合，开展理论和实验研究，提出新的概念和理论模型。

描述实际燃烧过程的定解问题的数学适定性如何？是否可以和采用何种途径得到既与微分方程一致又与实验相符合的数值解？是否存在和值得探讨所谓最佳求解方法？等等，这是需要和计算数学家们一起研究的问题。

燃烧过程数值计算使得人们有可能把采用不同理论模型和计算方法得到的数值解与实验数据对比分析，检验和发展与临近学科相关的理论模型和计算方法，从而促进流体力学（单相和多相）、传热传质学、化学动力学、输运理论和计算数学的发展。

§1.2 历史背景

为了有效地利用燃料能源，提高燃烧热能动力装置的效率和减少污染；为了设计和研制高性能的燃烧器，需要定量认识燃烧过程。

燃烧是一种带有剧烈放热化学反应的流动现象。实际燃烧过

程是一个包含流体流动、传热、传质和化学反应以及它们之间相互作用的复杂的物理和化学过程。以解析方法为手段的经典燃烧理论,只有在做了大量理想化的简化之后,才能得到某些定性关系。当时人们认识燃烧过程的途径是实验研究,燃烧装置的设计主要靠试验,燃烧学基本上是一门实验科学。

计算机的出现促进了燃烧学与数值方法的结合。六十年代后期,斯波尔丁(Spalding)首先得到了边界层燃烧问题的数值解^[1]。接着,斯波尔丁^[2]和哈劳(Harlow)^[3]继承和发展了普朗特(Prandtl)、科尔莫戈罗夫(Kolmogorov)^[4]和周培源^[5]等人的工作,创立了“湍流模型方法”,提出了一系列的湍流和湍流燃烧模型,发展了各具特色的数值计算方法和计算机程序体系。

一大批燃烧过程数值计算的成果带来了燃烧学的繁荣,它激励人们勇敢地开辟“多相流动和燃烧过程数值计算”的新领域。哈劳^[6]和斯波尔丁^[7]引入两相物质相互穿透的概念,斯波尔丁进一步开拓“相”的概念,提出多相共存的理论,建立了多相化学流体力学方程组和一套多相流的数值解法^[8,9]。

近二十年来,英、美、法、联邦德国、苏、波、日和埃及等国相继开展了燃烧过程数值计算的研究工作,在基本方程、理论模型、数值方法和计算机程序等方面均取得了可喜的进展,已发展到有可能对大型煤粉锅炉、燃气轮机燃烧室、内燃机、火箭发动机、核反应堆蒸汽发生器和弹膛等系统中的三维、定常或非定常、均相或多相、湍流、有或没有化学反应的实际过程进行数值分析,给出参数的分布及其变化,预测装置的性能。这一新领域的出现,极大地丰富了燃烧学的内容,逐渐形成了“燃烧过程数值计算”这一分支学科。

§1.3 内 容 梗 概

燃烧过程数值计算的中心内容是研究对基本燃烧现象和实际燃烧过程进行计算机模拟的思想、理论和方法。它的主要内容涉

及三个方面。

1.3.1 构造基本方程和理论模型^[10]

燃烧过程的变化是有规律的,它满足物理和化学的基本定律。燃烧过程涉及的基本定律主要是:物质不灭定律、牛顿第二定律、能量转换和守恒定律、组分转换和平衡定律等。这些定律的数学表达式可写成下面的形式:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \text{div}(\rho\mathbf{u}\phi + \mathbf{J}_\phi) = S_\phi \quad (1-1)$$

为使该方程组的未知数个数等于方程的个数,需要给出扩散通量 $\mathbf{J}_\phi$ 和源项 S_ϕ 的合理的表达式。这样便得到了控制燃烧过程的基本方程组,它由连续性方程、动量方程、能量方程和组分方程组成,其统一形式为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \text{div}(\rho\mathbf{u}\phi) = \text{div}(\Gamma_\phi \text{grad}\phi) + S_\phi \quad (1-2)$$

方程中的四项依次称为时间导数项(瞬变项)、对流项、扩散项和源项。

工程实际中的燃烧过程基本都是湍流过程。湍流的机理和详细计算目前尚未解决,幸而我们感兴趣的主要是速度、温度和各组分浓度的时均值。但是,在通过对基本方程进行雷诺分解和平均、试图建立时均量的微分方程的过程中,却丧失了一部分信息,这表现为时均量微分方程的不封闭性。人们不得不设法用近似但可解的方程组去取代严格而不可解的方程组,这个过程称为模化或模拟。不同的模化方法或方案就构成了不同的模型。

需要模化的分过程有:湍流流动、湍流燃烧、火焰传热、多相流动和燃烧。这些分过程模化的思想、理论和方法将分别在本书的第二至五章中进行讨论。

1.3.2 控制微分方程的离散化

燃烧过程的控制方程具有数目多、非线性和相互耦合的特点。

这就决定了在一般情况下方程组找不到解析解，而只能用数值法求解。

微分方程的离散化是用计算机求解的前提。需要探索合理而有效的离散化的方法、格式和方案。这里可供选择的有：有限差分、有限元和有限分析等方法；中心差分、上风差分、指数差分和混合差分等格式；显式、半隐式和隐式等差分方案。目前解决燃烧问题常用的是：有限差分中的控制容积法，上风差分格式和隐式方案。

1.3.3 计算方法

微分方程组离散化之后大约得到 $(m \times n)$ 个代数方程，这里 m 表示积分区域的网格点数， n 表示微分方程数。这些方程是联立的，方程未知量的系数中一般还包含着未知数。如何求解这么多的代数方程是一门内容十分丰富的学问，它所面临的困难并不亚于构造理论模型和寻找合理的离散化方案。至今人们总结出的规律性的东西还很少，主要仍然凭经验。

计算方法不仅关系到求解的速度，而且更重要的是直接影响到解的存在性和收敛性。对于完全一样的微分方程、离散化方案、以及边界条件和初始值，采用某些计算方法可以得到与实验符合的数值解，而用另一些方法就会根本得不到收敛解，以致一些人因此而怀疑解的存在性。

研究计算方法的目的是力求编制出具有可靠性、经济性、通用性和灵活性的计算机程序。本书的第六、七两章将较详细地阐述处理上面第二、三两个问题的思想和方法。

参 考 文 献

- [1] Patankar, S. V. and Spalding, D. B., A Finite-Difference Procedure for Solving the Equations of the Two-Dimensional Boundary Layer, *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, Vol. 10, pp. 1389—1411, (1967).
- [2] Launder, B. E. and Spalding, D. B., *Mathematical Models of Turbulence*, Academic Press, London and New York, (1972).

- [3] Harlow, F. H. and Nakayama, P. I., Turbulence Transport Equations, *Physics of Fluids*, Vol. 10, No. 11, pp. 2323—2332, (1967.)
- [4] Kolmogorov, A. N., Equations of Turbulent Motion of an Incompressible Fluid, *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Phys.*, Vol. 6, No. 1/2, pp. 56—58, (1942).
- [5] Chou, P. Y., Pressure Flow of a Turbulent Fluid Between Two Infinite Parallel Planes, *Quart. Appl. Math.*, Vol. 3, No. 3, p. 198, (1945).
- [6] Harlow, F. H. and Amsden, A. A., Numerical Calculation of Multi-Phase Fluid Flow. *J. Comp. Phys.*, Vol. 17, No. 1, pp. 19—52, (1975).
- [7] Spalding, D. B., The Calculation of Free-Convection Phenomenon in Gas-Liquid Mixtures, ICHMT Seminar, Dubrovnik, (1976), Pub. in "Turbulent Buoyant Convection" by Hemisphere Washington, Ed. Afgan, N. and Spalding, D. B., pp. 569—586, (1977).
- [8] Spalding, D. B., Numerical Computation of Multi-Phase Fluid Flow and Heat Transfer, Pub. in "Recent Advances in Numerical Mechanics" Ed. Taylor, C. by Pineridge Press, (1980).
- [9] Spalding, D. B., Numerical Computation of Multi Phase Flows, Imperial College Report HTS/81/8, London, (1981).
- [10] 范维澄, 计算燃烧学简程, 中国工程热物理学会第一次计算燃烧学讨论班讲义, 1983.

第二章 气体湍流流动

由于大部分的实际燃烧过程中都伴随着气体湍流流动,因此研究气体湍流流动是研究湍流燃烧过程必不可少的内容。事实上也确实如此,自七十年代以来,有相当多的研究湍流的力学家和研究应用数学的数学家都以湍流燃烧作为他们的研究对象。根据本书编写的宗旨,一方面尽可能多地反映出每个作者过去所做工作的特色;另一方面又要使全书能自成体系,让读者阅读时有连贯性。因此在编写本章时,作者希望引导读者沿着气体动力学方程的发展由简而繁,同时说明这些方程对实际问题能起到何种作用。在叙述过程中着重于物理概念,也进行必要的数学推导,因为这些数学推导能促使燃烧工作者对数学模型的机理有较深入的了解。现在就从简单的无粘性气体动力学方程组开始进行讨论。

§2.1 无粘性气体动力学方程组

众所周知,无粘性理想气体在没有外源力作用时的连续方程、动量守恒方程和能量守恒方程如下:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2-1)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (2-2)$$

$$\frac{d\bar{h}}{dt} = T \frac{ds}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2-3)$$

根据向量分析知道

$$\nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \quad (2-4)$$

其中 $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$, 是涡矢。将式(2-4)代入式(2-2), 则得

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) - \mathbf{v} \times \omega = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (2-5)$$

应用热力学第一定律

$$T \nabla s = \nabla \tilde{h} - \frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) \quad (2-6)$$

将式(2-6)代入式(2-5), 得

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \omega = T \nabla s - \nabla \tilde{h} \quad (2-7)$$

上式是动量方程的另一种形式, 是克鲁科 (Crocco) 于 1937 年提出的^[3]。

应用式(2-1)、(2-3)、(2-7)再加其他辅助方程, 可用来解决无粘性条件下的气体流动过程。希克斯 (Hicks) 曾用这样的方程组来分析所谓的非绝热流动。在利用这种模型时, 主要考虑把加热效应反映在滞止焓和熵的增量上。由于一个热力学状态参数可由另外两个状态参数来决定, 因此一旦 $\tilde{h}$ (即 h)、 s 定了, 那么其他热力学参数在流场内从理论上讲均可求得。

从上面提出的方程组可以求出流场中涡量的发展过程。为此对式(2-5)和(2-7)取旋度, 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \times \left(\nabla \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) - \nabla \times (\mathbf{v} \times \omega) \\ = \nabla \times \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p \right) \end{aligned} \quad (2-8)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \nabla \times (\nabla \times \omega) = \nabla \times (T \nabla s) - \nabla \times (\nabla \tilde{h}) \quad (2-9)$$

根据向量运算可将式(2-8)和(2-9)化为下列形式:

$$\frac{d\omega}{dt} - (\omega \cdot \nabla) \mathbf{v} + \omega (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \nabla \times \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p \right) \quad (2-10)$$

$$\frac{d\omega}{dt} - (\omega \cdot \nabla) \mathbf{v} + \omega (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \nabla T \times \nabla s \quad (2-11)$$

当流体满足正压 (Barotropic) 运动的条件,即

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) = 0$$

(密度仅仅是压强的函数) 或 $\nabla s = 0$ (均熵) 或 $\nabla T = 0$ 或 $\rho = \text{常数}^{[2]}$, 则式(2-10)和(2-11)变为

$$\frac{d\omega}{dt} - (\omega \cdot \nabla)\mathbf{v} + \omega(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (2-12)$$

上式是理想流体在满足正压条件时涡旋线和涡旋管强度保持不变的必要和充分条件^[3]。用于不可压缩流体, 这条定理首先是由海尔姆霍尔兹 (Helmholtz) 证明, 因此就称为海尔姆霍尔兹定理。

上述这一条件也可以从斯托克斯 (Stokes) 定理证得。

根据斯托克斯定理, 环量 Γ 可定义为

$$\Gamma = \oint_c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_A (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{A}$$

对第一个等式进行微分

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint_c \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{l} + \oint_c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} \quad (2-13)$$

如果速度场是连续(即单值的话), 则

$$\oint_c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \oint_c d \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 = 0$$

同时, 利用式(2-2)的关系, 并应用斯托克斯定理, 则式(2-13)成为

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= \oint_c \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p \right) \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_A \left[\nabla \times \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p \right) \right] \cdot d\mathbf{A} \end{aligned}$$

根据式(2-10)和(2-11)可知

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= \int_A \left[\nabla \times \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p \right) \right] \cdot d\mathbf{A} \\ &= \int_A (\nabla T \times \nabla s) \cdot d\mathbf{A} \end{aligned} \quad (2-14)$$

对于流体满足正压运动的条件时,则

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0,$$

这就是开尔文 (Kelvin) 定理^[1,4]。

从式(2-12)和(2-13)可以看出,它们是从不同角度来阐述理想流体满足正压条件时流场特性的,而式(2-12)所代表的涡旋管强度保持不变的条件是指涡旋管的总强度,而正好就是 Γ 所代表的量,因为 $\Gamma = \int_A \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{A}$ 。

当理想流体不作正压运动时,那么

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) \neq 0$$

$$\nabla s \neq 0$$

$$\nabla T \neq 0$$

因此

$$\frac{d\Gamma}{dt} \neq 0$$

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{v}) \neq 0$$

这说明涡旋线或涡旋管强度守恒的条件已破坏,也就是说涡量在流场内会有变化,即使开始时流场是无旋的,也不代表最终是无旋的。

到此为止说明了一个问题:如果用理想流体来处理燃烧或加热过程是可以计算出因加热而产生的涡量变化,但不要忘记在这种计算涡量的物理模型中由于没有考虑粘性作用,它对涡量的产生和传递都无法表述清楚。因此不能反映出实际气体中因存在燃烧而产生的复杂现象。

§ 2.2 粘性气体动力学方程组

从微观来看,任何流体都是由分子组成,因此气体动力学问

题的基本处理，应该通过分子运动的理论来进行。在粘性流体的讨论中，所谓层流流动就是建立在分子运动的基础上来讨论粘性作用。它与湍流流动有所不同，后者是建立在微团运动的基础上来讨论问题的。当然，七十年代后期以来，有的流体力学家试图把复杂的湍流流动化为最基本的层流流动来计算，但这样的计算工作量是非常之大，以致目前还没有这么大容量的计算机可完成这一工作。

既然应用最基本的层流流动来解决湍流这条路目前看来无法走通，那么就促使人们想方设法在微团运动的基础上来完善湍流理论，特别对于工程上的计算应用，更希望有较简单的湍流数学模型，它既反映了一定的湍流流动的物理现象，又能保持计算工作量不致于太庞大。

下面我们就从粘性气体动力学的基本方程组出发来讨论问题。以矢量和张量表示的形式对方程组来讲最具有普遍性。当不存在外源力作用时：

连续方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2-15)$$

动量守恒方程

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}' \quad (2-16)$$

标量守恒方程

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{J}_\phi + \frac{1}{\rho} S_\phi \quad (2-17)$$

对于化学组分守恒来讲，式(2-17)可写成

$$\frac{dm_j}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{J}_j + \frac{1}{\rho} S_j \quad (2-17')$$

对于能量守恒来讲，式(2-17)可写成

$$\frac{d\tilde{h}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \left[\mathbf{J}_h + \sum_i h_i \mathbf{J}_i \right]$$

$$+ \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\boldsymbol{\pi}' \cdot \mathbf{v}) + Q + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2-17'')$$

由于上述这些方程都是通过最基本的物理定律推导得到的数学表达式,因此它可以适用于任何一种粘性流动过程。但当涉及实际问题并用上述方程来描述层流流动和湍流流动时,便会有不同的内容。

2.2.1 层流粘性流动的气体动力学方程组

在层流粘性流动中,各物理量的输运是通过分子运动来完成的,因此各输运系数为分子与分子之间的相互作用规律和分子的性质所决定。

根据流体力学的理论,在粘性气体中,作用在任一微小封闭体系上的应力张量 $\boldsymbol{\pi}$ 是一个对称二阶张量。它可分解为静压力 p 和粘性应力张量 $\boldsymbol{\pi}'$ 。当然 $\boldsymbol{\pi}'$ 也是一个对称二阶张量。

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}' - p\delta_{ij} \quad (2-18)$$

直到目前为止,虽然有许多书籍和论文都应用式(2-15)、(2-16)、(2-17')、(2-17'')来讨论气体的粘性流动,但其中有一些还存在概念上的混淆。文献[5]对此曾作了精辟的阐述。作者根据文献[5]的论点,结合本章讨论的内容,进行下列分析。

根据弹性理论,在笛卡儿坐标系中,对于均匀各向同性的弹性介质来讲,弹性位移 u 和弹性变形张量 $\boldsymbol{\phi}$ 及弹性位移散度 θ 之间有下列的关系式:

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (2-19)$$

$$\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$