

A. Я. 辛钦 著

数学分析八讲

王会林 齐民友 译



武汉大学
出版社

017
X61-2

414777

数学分析八讲

A. Я. 辛钦 著

王会林

译

齐民友



00414777

武汉大学出版社

1998

图书在版编目(CIP)数据

D290/14

数学分析八讲/A. Я. 辛钦 (A. Я. ХИНЧИН) 著; 王会林, 齐民友译. —武汉: 武汉大学出版社, 1998. 7

ISBN 7-307-02418-7

I 数…

II ①辛… ②王… ③齐…

III 数学分析

IV O17



武汉大学出版社出版

(430072 武昌 珞珈山)

武汉大学出版社印刷总厂印刷

(430015 武汉市汉口新华下路192号)

新华书店湖北发行所发行

1998年7月第1版 1998年7月第1次印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 8.5

字数: 217千字 印数: 1—2000

ISBN 7-307-02418-7/O·180 定价: 9.50元

本书如有印装质量问题, 请寄承印厂调换

第三版序言

第三版同第一版的区别只是不多的变化。其中最主要的是我从基本引理中删去了“归纳法原理”，因此所有依赖此原理进行的证明都代之以其他。我期望对于大多数读者而言能因此而更易于掌握本书，因为依我看来，这个原理以及赖以进行的研究，在逻辑方面对读者提出的要求，比起本书中一般采用的要更高一些。

其他的变化值得一提的只有 Taylor 公式的新的解释以及关于带有界变差函数的一节。

第一版序言

高等数学教程在相当多的高等学校里是或多或少都要讲授的。所有的工科院校以及大部分军事院校、农业院校和经济院校的学生们都了解数学分析的基础，更不用说综合大学以及师范院校专门系科的学生了。所有这些在各类学校讲授的许许多多教程不仅在其范围上，而且在其赖以建立的原则的、思想的以及逻辑的基础上都是十分不同的。在这后一方面，从本质上讲，只有综合大学的教程才达到了较为可靠的科学水平，其余所有的则不得不进行压缩，只能满足于、局限于科学观远远落后于现代科学的思想——逻辑基础，而有时由于大纲的限制，只能满足于很有局限的教学要求。

然而我们却时常遇到这样的情况：一位工程师、教师、经济学家原来只能依照那种简易的教程来学习高等数学，开始感觉到需要拓宽自己的数学知识，且首先是要有更加牢固的基础。这种需要可能是产生于该专家在其专门的科学领域内的某个具体的研究，或者是由于一般的拓宽科学和生活视野而必然提出来的——不管怎样，这个要求当然应当得到满足。乍看起来做到这一点是很简单的：拿一本完整的数学分析教

程,如 Немыцкий^① 的或者 Фихтенгольц^② 的,然后依靠已有的不太牢固、不太深的知识来系统地钻研它。但是,经验表明,这个看起来如此自然的途径几乎从来就不能达到目的,且除了少数例外都导致失望,时常放弃了按此既定方向继续尝试。问题在于,一方面,我们的学生一般说来为了自己提出的目标只安排了十分有限的时间,研究多卷的大教程因此是不可能的。另一方面,可能是最重要的——还没有坚实的科学基础且不是专业的数学家,没有人指导,他不可能自己从研究中区分出哪些是原则的方面,因而被迫以全部精力注意于没有实质意义的微不足道的小事上,而终于迷失方向,就像俗话所说的,只见树木,不见森林。

然而要完全满足这类学生的要求和需要,其实所需非常有限。几年以前我有机会讲授了一门国立莫斯科大学专门为此目的而设的课程,总共 12 讲,每讲两小时,学员是想要提高自己数学水平的工程师们。应当承认,起初对此任务我几乎是毫无指望的,然而我有理由认为,我的课程是满足了学员的要求的,尽管它很简略。取得这个成就的诀窍在于我找到了解决摆在我面前的教学任务的正确的秘诀:从一开头我就拒绝了充分详细地哪怕只是阐述本课程的某一章的想法,而只限于讲授那些原则性的、扼要的、突出的、具体的,而且使人有难忘印象的发展。我更多地讲的是关于目的和趋势、关于问题和方法、关于基本的分析概念之间的以及它们与应

① Немыцкий 等,《数学分析教程》,卷 I ~ II, 国家技术理论文献出版社,1944。

② Фихтенгольц,《微积分学教程》,卷 I, 国家技术理论文献出版社,1947。有中译本。——译者。

用之间的关系，而不是个别的定理及其证明。我不怕在许多情况下把不具有原则意义的证明细节（而有时是一连串定理及其证明）抛开，而让我的学员去看教科书。但是要是为阐明某个有着主导作用、原则意义的概念、方法或者思想，我则不吝时间，力求用各种手段，通过各种各样的表述，通过直观形象等等尽可能明白而有效地把这些基本的内容灌输给我的学员。我有理由认为：在有了这种修养之后，他们每一个人如果希望或需要更深入地研究数学分析的某一章节时，已经能够独立地、无需旁人帮助地首先是找到他所需的材料，然后能够进行研究。就是说，就可以自立地区分主要的和次要的、本质的和非本质的。

我同个别学员或一组学员的许多次的个别谈话，以及同整个课堂的一系列的谈话都经常地使我确信，我所选择的道路是唯一正确的道路。我愿借此机会指出：很大的一个课堂，满满的都是本课程的听众，他们大多数直到课程结束都没有退席，这是以最好的方式证实了在我们的工程师中是多么广泛地存在着要求提高自己的数学知识水平的愿望。

这一本书与我刚刚提到的所开的那门课程，都是为了同一目的，并且力求以同样的方法来实现它。因而一开始就应当告知读者：他在这里找不到大学的分析教程的多少完整的表述，或者哪怕是本门课程个别选定章节的完整表述。作者给自己提出的任务仅仅是给出数学分析的一般的、尽可能容易了解和记忆的基本思想、基本概念和基本方法的概述。这种概述对任何人都是容易阅读和掌握的，即使是只学过最简单的数学分析课程的人。而且一旦掌握了它，就能使读者任意地、独立地研究本课程的任何一部分、任何一章的所有细节。

但是，我敢于相信，国立大学数学系的许多学生阅读本书也能带来实质性的收益。问题在于，无论是教科书，也无论是讲演者，自然地要受到时间和大纲的限制，不可能充分地注意原则问题的讨论，因此对阐述具体问题的所有细节必然受到限制。然而，谁都知道，有时撇开树木来观察森林是多么有好处。我希望本书能在此对某些未来的数学家，首先是着手研究数学分析的人有所帮助。

目 录

第三版序言	1
第一版序言	2
第一讲 连续统	1
第二讲 极 限	24
第三讲 函 数	50
第四讲 级 数	81
第五讲 导 数	114
第六讲 积 分	152
第七讲 函数的级数展开	193
第八讲 微分方程	227
译后记	257

第 一 讲

连 续 统

为什么数学分析必须从研究连续统开始？——为什么没有完整的实数理论的建立是不能研究连续统的？——无理数的构造。——连续统理论。——基本引理。

为什么数学分析必须从研究连续统开始？“变量 y 称为变量 x 的函数，如果对于变量 x 的每一个值，量 y 都有唯一确定的值与之对应。”可以把这句话当作是开启高等数学领域的大门：借助于这句话我们可以定义最重要的、最首要的数学分析概念——函数关系概念。在此概念中，已经奠定了借助数学工具来把握自然现象和技术过程的完整思想的萌芽。这就是为什么我们必须毫不含糊地要求这个定义有完全的、无可指责的明确性；其中的每一个字都不应引起一点怀疑的阴影。在此，极小的一点歧义都可能危及所构筑的整个庄严的大厦，这个大厦是科学，它就是以此概念为基础建造起来的，歧义会使得这座大厦成为不完善的，需要从根本上重建。

而同时我们开始时作的那个简单的表述，在进一步地研

究时，在许多地方是含义不明的并且容许不同的解释。我们在这里只注意这种不清楚的地方之一，因为恰恰是试图把这一点的内容最后弄清楚，把我们紧紧地引向我们今天的讲义的对象。

我们的定义包含了这样的字眼：“对量 x 的每一个值”，为了不留下任何含糊之处，我们必须无条件地要求给大家解释清楚术语“变量的值”的意义。但这还是小事，在我们的定义中说到的“每一个值”。由此得知：要想充分了解这个定义，只掌握量 x 的某些个别的值的概念是不够的。最要紧的是，我们应当完全精密地理解这些值的整个集合，整个的“蓄积”，这些值中的任何一个都应当有一个确定的量 y 的值与之对应。我们应当了解在数学分析中称为已知函数的“定义域”的，是什么东西。

什么是变量的个别的值？我们知道，这就是数。如果是这样，则所有这些值的集合就是某些数的集合——某个所谓的数集。这个集合是什么样的？它包含有什么样的数？我们从一开始就排除了考虑虚数，而假设所有的量 x 和 y 的值都是实数。那么，所有的实数都可以作为量 x 的值吗？如果不是，那么什么样的可以而什么样的不可以呢？

关于所有这一切在我们的定义里什么也没有说，而这是完全明白的，因为不可能对所有的函数都用同一方式回答这个问题（而实质上甚至对同一个函数在不同的问题中也不行）。函数的定义域既取决于该函数的性质，也取决于那些特定的问题，正是为了解决这些问题我们才在当前的研究中需要这个函数。因为很容易明白，同一个函数在不同的问题中是对不同的自变量值进行研究的。对所有这一切我们知道许多例子。例如：函数 $y = x!$ （至少在初等数学范围内）只对

正整数 x 研究才有意义；函数 $y = \lg x$ 只对 $x > 0$ 有意义，等等。可以容易地想出这种例子，其中函数的自然定义域会是结构十分复杂的数集。

但是，如果我们自问：不仅在数学分析本身中，而且在其应用中，我们实际上最常见的量 x 的值的集合是什么样的？则我们应该说：在绝大多数情况下，函数的这类定义域是“区间”（闭的或开的），即介于两个已知数之间的所有实数的集合（包含或者除去这两个数）。有时这个区间成为半直线（例如： $x > 0$ ），这就表明，量 x 的值的集合是大于（或者小于）某个数的所有实数的集合（有时条件 $>$ 或 $<$ 要代之以条件 $\geq$ 或者 $\leq$ ）。最后，还有这样的情形，即区间变成为整个直线，即量 x 的值可以是所有的实数。这时则说函数的定义域是整个实轴或者“数直线”。

无论如何，我们看到，对于数学分析中的函数而言，函数在其上发展且展示其个别的特点的那个域、那个场地，函数在其中才能成为自然科学的 and 技术的强大数学武器的载体，都是所有实数的集合。这个集合在数学中被称为连续统（确切些说是线性连续统）。完全像培育植物之前，必须仔细地研究土壤一样，在高等数学中我们期望热心人依靠科学，而不是只靠碰运气的庄户人，在以函数关系概念为基础建筑这个科学的整个大厦之前，应当以仔细的方式研究这个概念赖以生存和发展的载体。这就是为什么在所有的认真地科学地编成的数学分析教程中，连续统都是第一个研究对象。且只有当其本质以及性质被充分掌握之后，才可能转而进入对函数关系概念的根本的研究。而连续统的结构并不像我们初看时设想的那么简单。展现在我们眼前的实数世界是一个复杂的、富含各种各样细节的结构。对它作全面的研究，直到现

在还不能认为科学已经完成了这件事。

为什么没有完整的实数理论的建立是不能研究连续统的？这样一来，连续统是什么样的？存在着什么样的实数？何时以及为什么我们才可以相信已经实际上掌握了所有实数的全部？

在初等代数里，我们掌握了全部有理数的集合，即所有的整数和分数，既有正的，而且也有负的。但很快地我们就开始注意到这些数对我们来说是不够用的，这是什么意思？为什么不能只局限于有理数呢？我们不能这样做是因为在有理数中没有例如 $\sqrt{2}$ 这个数，即找不到平方等于数2的有理数。而为什么必须有这样的数呢？因为就是边长为1的正方形的对角线恰好有长度 $\sqrt{2}$ 。因而如果我们否定了这个数的存在，则我们对几何学中如此简单地产生的线段的长度，就不能以任何数来表达了。显然，在这样的基础上度量几何就不可能得到发展。这就是说， $\sqrt{2}$ 应当在实数中找到其位置。但在有理数中是没有它的位置的。因此我们称该数为无理数。但是这个 $\sqrt{2}$ 绝对不会只满足于我们只是承认它的存在：它马上就会开始要求，首先在有理数中间给它找到完全确定的位置，即准确地指出什么样的有理数小于它以及什么样的有理数大于它（例如 $\sqrt{2} > 1$ ——正方形的对角线大于其边）。其次，它要求我们要学会对它进行运算，就像对有理数一样，还要与有理数的运算相容（例如：正方形的边与对角线的和等于 $1 + \sqrt{2}$ ，这要求我们对这个数也赋予意义，即把它归并入实数集合之中）。新数的所有这些要求都完全是根本性的并且是合理的，而且如果我们目前还不回答这些问题，则这只是因为我们马上还要引入另外的许多新数进入到我们的领域。它们全部都毫无例外地将对我们的提出这样的要求，所以

最简单的办法是在今后同时满足所有这些新数的要求，而不对每一个数个别地处理其细节。

在 $\sqrt{2}$ 以后，我们的领域中自然的且是不可避免的要包含所有的有理数的平方根（正的和负的），然后是立方根以及一般的所有形如

$$r^{\frac{1}{n}} \quad (1)$$

的数，其中 r 是任意的正有理数，而 n 是任意的一个 ≥ 2 的整数。但如众所周知，事情还不只这些。像前面作出正方形的对角线的表示一样，还有许多具体的问题要求我们在一系列情况下把全部代数方程的根作为新的数。只要已知方程在我们已经引进的数中没有根，就会发生这样的情况，因为我们又不能否认这些根存在，不能剥夺某些完全具体确定的量具有数的特征。

让我们在此方向上进行到底。我们称形如 $P(x) = 0$ 的方程的所有根（实的）为代数数，其中的 $P(x)$ 为带整系数的任意的多项式，并且把所有的实的代数数都引入我们的领域。特别地，我们因而把所有形如（1）的数引入了我们的领域。因为数 $r^{\frac{1}{n}}$ 可定义为方程 $qx^n - p = 0$ 的根，其中 $\frac{p}{q} = r$ 是有理数 r 的通常的分数表示。作为更为特殊的情况是任何有理数 $r = \frac{p}{q}$ 作为方程 $qx - p = 0$ 的根也应属于代数数的集合之中。

可以很容易将代数数的整个领域进行所谓“排序”，即指明一个法则，使得对任意两个代数数都能确定谁大谁小；稍微困难，但还不太复杂的是，确定一个法则对这些数进行任何通常的代数运算，使得这些运算的结果始终仍然是代数数。因此——这是很重要的关键——对代数数进行代数运算永远只

会得出代数数,而不需要引入什么新的数了。

也许我们能够现在就停下来,认为实数域的构造完成了,并且因此把所有的代数数的集合当作连续统?

众所周知,我们不能这样做,并且也熟知为什么不能这样做. 如果对于至今为止许多代数理论而言可以满足于我们所构造的数的话,则恰恰是对于分析而言,限于代数数是完全不行的. 问题在于: 数学分析的第一步就要对于初等代数运算添加基本的且是最重要的分析运算——极限过程. 有很多情形,有完全具体的理由迫使我们去了解这个或那个数序列极限的存在,况且,这个极限显现在我们面前是作为有着具体的且是现实的意义的数,而且在今后我们还期望对它进行代数运算和分析运算. 如果事情是这样的: 任何我们认为应当具有确定的极限的代数数序列,其极限实际上同样存在于代数数的范围之内,则就可以假设代数数这个范围也就是连续统,除代数数之外,数学分析不再需要任何其他的实数.

但事情并非这个样子. 如果我们取一个半径为 1 的圆,并且作出其内接正多边形,无限地增加其边数,则所有这些多边形的周长都可以用代数数表示. 这个数序列的极限我们称之为圆周长. 否认这个极限存在就意味着几何学中不准说到圆周的长度. 你们容易想象得出,这种禁令不仅使几何学,而且使所有其他用到圆形的精确科学都会崩溃.

与此同时,可以证明,在代数数中是没有这个极限的. 摆脱这种情形的出路在哪里? 出路很明白. 我们不得不承认,对于数学分析而言只有一种代数数是不够的,必须再给它添加新的实数. 所有这些非代数数的实数通常称为“超越数”. 我们上面构造的数(半径为 1 的圆的周长)表示成 2π , 即是说 π 是一个超越数. 在分析中另一个重要的超越数的例子是熟

悉的数 $e=2.718\cdots$ ，正如你们了解的那样，它也是从有理数出发由简单的极限过程产生的。e 和 π 的超越性是很晚才被证明了的，是在 19 世纪的后半叶。但是引进超越数的必要性是较早一些就被指出了的，是在 19 世纪的中叶，是在另一些更简单的尽管不太重要的例子中给出的（由法国数学家 Liouville 作出）。

这样，我们的连续统仍然还没有建成。继续下去，我们应当怎样做呢？我们能否停留于此并且这样说：“连续统就是所有的代数数的全体，再加上“根据需要，把从代数数通过极限过程得出的但其本身又不是代数数的数（像 e 和 π ）添加进去（作为超越数）？”我们提出这个问题是因为大多数“简易的”数学分析教程正是以此为基础编写的（当然，通常没有明说）而回避了阐述完整的无理数理论。

不，当然不能这样说，也不能停留在我们现在所在的地方。对此有一系列简单的、有说服力的原因。首先，作为所有实数的总体的连续统应当定义为某个固定的集合（例如：按照上面作出的定义所有的代数数的集合的模式），而不留下以后再给它添加越来越新的数的可能性。其次，在我们初步的定义中字眼“根据需要”这个说法显然缺少准确的内容。如果我们有一个没有代数极限的代数数的序列，或者认为它有超越极限或者为它完全没有极限，从形式的观点来看，现在我们有权利任意地回答这个问题。如果不是从形式的考虑，而是按照具体的现实的考虑来选取这个或那个解答，这种作法，无论它们多么必要，在数学定义中都是不能容许的。拒绝数 π 的存在，在目前这是极为不利的。但在其他的情况下作类似的否认可能不会带来任何不便。但是，显然地，那个使我们“每当没有它就进行不下去”时就引入超越数的准则不论怎么

说都不能成为数学准则。最后，从哪里也不能得出，我们可以满足于以这样的途径引入的数，因为新的数还得进行加法、乘法，进行极限过程（对数学分析来说不允许对这些数进行这些运算是什么也不能做的）。由何处我们能够确信，所有的运算结果都将是我们的连续统的实数？而如果不是，则又要补充它们，可见我们的连续统还没有包含所有的实数。

因而我们看到，我们所持的立场是不能坚持的。在作出一个或两个超越数作例子，然后就说如此“等等”，这样是不行的，因为我们刚刚已经看到，我们这样并没有定义任何连续统。

因而我们看到要对数学分析作完全的论证，就不可避免地要建立实数的一般理论，这理论不能限于构造一些新数来作为例子，而要包含这种构造方法的一般原则，按此原则可以刻画出所有实数的集合。

无理数的构造。 在科学中有几个不同的连续统理论，但是所有这些理论——牢记这一点是很重要的——在处理自己的问题时在思想方面是完全一样的。与这些原则性的统一比较起来，对待它们之间的差别应当像我们在审查建筑物的建筑设计时看待结构的细节一样。

所有这些理论都把有理数集合作为最初的数据而用统一的构造原则从中得到所有实数的整个集合。这个原则的形式在各种理论中是不同的，但是这些理论之间的相似之处还远不止于我们所已指出的那些。问题在于：选择一种构造原则以构造新的无理数，在所有的理论中，尽管存在着本质上的形式上的区别，基础都是同一个思想。这个思想就是：在构造新数时，基本解析运算极限过程起了首要的、主导的作用，所遇到的种种方法，都可归结为它，而可看作它的特殊情形。