● 研究生教材 ● 研究生教材

非标准分析与随机分析

金治明　刘普寅　著

国家自然科学基金资助课题

非标准分析与随机分析

金治明　刘普寅 著

国防科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

非标准分析与随机分析/金治明，刘普寅. -长沙：国防科技大学出版社，1997.9

ISBN 7-81024-459-0

Ⅰ非标准分析与随机分析

Ⅱ金治明刘普寅

Ⅲ数学－非标准分析－随机分析

Ⅳ O17

责任编辑：何　晋

责任校对：罗　青

封面设计：陆荣斌

国防科技大学出版社出版发行

电话:(0731)4505241 邮编：410073

E-mail:gfkdcbs@ public.cs.hn.cn.

新华书店总店北京发行所经销

国防科技大学印刷厂印装

*

开本：850×1168　1/32　印张:13.5　字数:363千

1997年9月第1版第1次印刷　印数：1-2000 册

*

ISBN 7 - 81024 - 459 - 0

O·67　　定价：20.00 元

内 容 简 介

本书较系统地介绍一个新的数学分支—非标准分析及其在概率论与随机分析中的应用。

全书分九章，前四章为非标准分析的基础理论，第五章是非标准微积分，第六、七章分别讨论非标准分析在拓扑学及泛函分析中的应用。第八章介绍非标准的测度论与概率论，第九章研究非标准分析在现代随机分析中的应用。

本书为学习非标准分析的研究生而写，也可供高年级大学生与科技工作者参考。

符号说明

$\mathbf{N}$	自然数集
$\mathbf{N}_0$	$\mathbf{N}\cup\{0\}$
$\mathbf{R}$	实数集
$\mathbf{R}^+$	正实数集
$\mathbf{R}_0^+$	非负实数集
$\mathrm{dom}\ R$	函数或关系R的定义域
$\mathrm{rng}\ R$	函数或关系R的值域
$^*\mathbf{R}$	超实数集
$^*\mathbf{N}_\infty$	无穷大自然数集
$\overline{\mathbf{R}}$	$\mathbf{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$
st	标准部分映射
st_τ	关于拓扑τ的标准部分映射
$^\circ x$	实数x的标准部分
$\mathrm{ns}\ {}^*X$	$^*X$的全体近标准点的集合
$\mathrm{pns}\ {}^*X$	$^*X$的全体预近标准点的集合
$\mathrm{cns}_\tau({}^*X)$	$^*X$的全体紧点的集合
$\mathrm{Fin}\ {}^*X$	$^*X$的全体有限点的集合
$\mathrm{Card}\ A$	集合A的内基数
$m(0)$	0的单子
$\mu_\tau(a)$	点a关于拓扑τ的单子
$\approx$	无限接近
$L(\nu)$	由内测度ν产生的 Loeb 测度
$L(\mathcal{A})$	由内代数$\mathcal{A}$产生的 Loeb 代数
$\mathcal{P}(X)$	集合X的一切子集

前 言

微积分的创立是300年前的事，它的创始人之一Leibniz，作为一个哲学家，他直觉地认为无穷大、无穷小的数是存在的，且服从实数同样的定律。然而微积分的严格化植根于实数系的确立，数系从自然数—有理数—实数的扩张经历了漫长的历史，直到19世纪的后半叶才完成实数系的严格构造。因此，Leibniz 关于无穷大、无穷小只是一个直觉或天才的断言，终因缺乏基础而被$\epsilon-\delta$的方法所取代，这就是由Weierstrass, Cauchy等人所严格化的经典分析，在这里我们称之为标准分析。

1961年，美国数理逻辑学家A.Robinson用数理逻辑中一个重要分支—模型论的方法，建立了实数系R的扩张超实数系 *R,无穷大、无穷小成为 *R中实在的元素，而且严格证明了 *R与R服从同样的定律。这样，被排斥在严格数学之外达300年之久的无穷大、无穷小重新回到了严格数学，这就创立了非标准分析。

在本世纪60–70年代，国内曾有一段学习马克思数学手稿的热潮。马克思是从辩证法的观点出发认为导数就是$\frac{0}{0}$,他说，只有Δx严格为0时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$才是导数，而决不是什么趋于0,显然他不满意极限的理论。按照非标准分析的观点，导数是两个特定无穷小之比的“标准”部分，而从实数的观点来看，这里的$\Delta x,\Delta y$确实为0.辩证法可以指导或帮助数学研究，但不能取代数学研究。非标准分析是在数理逻辑基础上建立的严格数学，学习非标准分析需要坚实的数学基础，而决非介于哲学与数学之间的似是而非。

非标准分析始于超实数系的建立，但决非只限于微积分的非标准化，在涉及无限个元素（包括超有限）的数学领域都可有效地应用非标准分析的方法，从非标准分析近年来的进展看出，它在分析、微

分方程、拓扑、泛函、概率论、组合数学以及近代物理，经济数学都有很广泛的应用。

在非标准分析开创的头一、二十年里，人们为非标准分析的价值作过不少的争论，一个重要的问题是非标准分析能否得到新的“标准结果”？事实上，非标准分析只是在一个更大的论域上讨论数学，在标准论域上两者是一致的。有些结果曾首先被非标准方法所得到，例如无限维复Banach空间中关于有界线性算子的不变子空间的存在定理（见 7.3.29），而后来又被标准方法所证明。但是，我们要看到非标准分析之不同于标准分析的思路、研究途径与方法，非标准分析提供了更富有表现力，更直观，更简洁的证明方法，也就是更接近无穷世界的本质。

1975年，P.A.Loeb建立了内（或超有限）概率空间，在那里数学期望变为超有限和，随机微分方程被随机差分方程所代替，为随机分析提供了更丰富的理论框架。但我们总想把它转化到经典的概率空间上，其实“无穷”的概率空间本身就是一种抽象，为什么我们不能直接接纳非标准分析中的“无穷”呢？所以学习非标准分析必须改变关于“无穷”的固有观念。

P.Cartier在N.Bourbaki讨论班上指出，A.Robinson的书——非标准分析可能是本世纪的杰作之一，而Kurt.Gödel断言：“非标准分析必将成为未来世纪的分析学。”值此世纪之交，我们自然不愿意在这个领域又落后他人一个历史时期。本书正是基于这个目的，为国内的非标准分析研究增砖添瓦。全书共九章，前五章是非标准分析的基础，第六章关于拓扑，第七章关于泛函分析，第八章介绍Loeb概率空间，第九章讨论随机分析。

鉴于作者对非标准分析的学习与研究尚浅，错误与缺点在所难免，望同行与读者批评指正。本书得到国家自然科学基金的资助，特此鸣谢。

作者

1997年5月于长沙

目　录

第一章　超实数

§ 1.1 实数系

众所周知，数学分析是建立在实数域上的，而所谓实数域是一个代数结构，可以用下面的公理来描述：

设R是一个集合，如果

(1) 在集合R的元素间可以定义序“>”，使得它满足下面的公理1.1，1.2；

(2) 在集合R中可定义两种分别称之为加法“+”和乘法“·”的运算，使得对任意的 $x,y\in\mathbf{R}$，有 $x+y\in\mathbf{R}$，$x\cdot y\in\mathbf{R}$，且满足下面的公理2.1–2.5和公理3.1–3.6；

(3) **R满足阿基米德公理** 4.0；

(4) **R满足完备性公理** 5.0.

则称R是一个**实数域，或完备有序的阿基米德域**。

(1) **公理** 1.1 $\forall x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}$，以下三种关系

$$x>y,x=y,y>x$$

有且仅有一种关系成立；

(2) **公理** 1.2 若 $x>y$ 且 $y>z$，则 $x>z$；

(3) **公理** 2.1 $x+y=y+x$；

(4) **公理** 2.2 $(x+y)+z=x+(y+z)$；

(5) **公理** 2.3 存在$\mathbf{R}$中的唯一元素0,使得对每个$x \in \mathbf{R}, x+0=x$;

(6) **公理** 2.4 对每个$x \in \mathbf{R}$存在$-x \in \mathbf{R}$,使得$x+(-x)=0$;

(7) **公理** 2.5 若$x>y$,则对每个$z \in \mathbf{R}$有$x+z>y+z$;

(8) **公理** 3.1 $x \cdot y=y \cdot x$;

(9) **公理** 3.2 $(x \cdot y) \cdot z=x \cdot(y \cdot z)$;

(10) **公理** 3.3 存在$\mathbf{R}$中的元素1,且$1 \neq 0$,对每个$x \in \mathbf{R}$,有$x \cdot 1=x$;

(11) **公理** 3.4 对每个$x \in \mathbf{R}, x \neq 0$,都存在$\mathbf{R}$中的元素$1/x$,使得$x \cdot 1/x=1$;

(12) **公理** 3.5 $x \cdot(y+z)=x \cdot y+x \cdot z$;

(13) **公理** 3.6 若$x>0, y>0$, 则$x \cdot y>0$;

(14) **公理** 4.0 对任意的$x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$, 如$x>0$, 且$y>0$,则存在自然数$n$使得$n \cdot x>y$;

(15) **公理** 5.0 设对每个自然数n, $[a_n, b_n]$是$\mathbf{R}$中的闭区间, 且 $[a_n, b_n] \supset [a_{n-1}, b_{n-1}]$, 则至少存在一个元素$c \in \mathbf{R}$, 使得对一切自然数$n$,都有$c \in [a_n, b_n]$.

如果在集合$\mathbf{R}$仅规定了满足公理1.1,1.2的顺序关系“$>$”, 则称$\mathbf{R}$为一个**有序集**; $x>y$,也可写成$y<x$.$x \geqslant y$表示$x>y$或$x=y$. 规定了满足公理2.1–2.4,3.1–3.3以及公理3.5的运算关系“$+$”,“$\cdot$”的集合称为是**可换环**, 如果还满足公理3.4,则称之为**域**。在域中是没有零因子的, 也就是说若$a \cdot b=0$,则必$a=0$或$b=0$.事实上,若$a \neq 0$,则由公理3.4,$1/a \in \mathbf{R}$,于是

$$b=(1/a \cdot a) \cdot b=1/a \cdot(a \cdot b)=0$$

众知, 由阿基米德公理与完备性公理可以证明连续性定理: 即$\mathbf{R}$中任何有上界的非空子集必有上确界。这个命题等价于: 任何有下界的非空子集必有下确界。所以, 在 $\mathbf{R}$上连续性定理是成立的。

今后，我们用$\mathbf{R}$表示实数系，而$\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$,$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty, -\infty\}$,$\overline{\mathbf{R}_0^+} = \mathbf{R}_+ \cup \{0\} \cup \{\infty\}$,$\mathbf{N}$表示全体自然数，$\mathbf{N}^0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$.

为了建立非标准分析模型，首先要将实数系扩大成为一个新的数系,我们称之为**超实数系**。在这个超实数系中含有无穷小，无穷大作为其元素。无穷小是其绝对值小于任何正实数的数，而非零无穷小的倒数就是无穷大。按照Leibniz原则，新引进的元素必须服从实数的运算法则。从现在开始，我们始终贯穿这条线索来叙述问题。

为了引进无穷小，一个很自然的想法是将趋于0的数列(a_n)看作是新系里的无穷小，而把常数列(a)看成与a等同的数。具体地说，令

$$\mathbf{R}^{\mathbf{N}} = \{(a_n) \mid a_n \in \mathbf{R}\}$$

在$\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$上定义加法与乘法如下:

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n), \quad (a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$$

则易见$(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, +, \cdot)$是一个可换环，它满足公理2.1–2.4,3.1–3.3及3.5，其中加法零元为 (0),乘法单位元为(1),并以$\mathbf{R}$为子环。定义

$$|(a_n)| = (|a_n|), (a_n) > (b_n) \Longrightarrow \forall n \in \mathbf{N}, a_n > b_n$$

显然它满足公理 1.2,2.5及3.6.

但$\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$中的数$(1/n)$并不是无穷小，比如$(1/n) \not< (1/3)$.其实使这个不等式失效的n只有有限个,为此在$\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$中引进如下的**等价关系**：令

$$\mathcal{F}_r = \{A \in \mathcal{P}(I) \mid A^c \text{是有限集}\}$$

其中 A^c表示A的余集。

$\forall (a_n), (b_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$,定义等价关系:

$$(a_n) \sim_r (b_n) \Longleftrightarrow \{n \in \mathbf{N} \mid a_n = b_n\} \in \mathcal{F}_r$$

于是我们可以在$\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$中划分等价类,记(a_n)所在的等价类为$[a_n]$,令

$$\mathbf{R}^{\mathbf{N}}/\sim_r = \{[a_n] \mid (a_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}\}$$

并定义加法与乘法如下:

$$[a_n] + [b_n] = [a_n + b_n], \quad [a_n] \cdot [b_n] = [a_n \cdot b_n]$$

那么$(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}/\sim_r, +, \cdot, [0], [1])$是一个可换环, 并以$\mathbf{R}$为其子环, 又定义:

$$[a_n] > [b_n] \Longrightarrow \{n \in \mathbf{N} \mid a_n > b_n\} \in \mathcal{F}_r$$

如果(a_n)是一个趋于0的序列, 则对任意的$\epsilon > 0, \{n \in \mathbf{N} \mid |a_n| < \epsilon\} \in \mathcal{F}_r$,于是$|[a_n]| < [\epsilon]$,这样$[a_n]$就是一个无穷小。但是$\mathbf{R}^{\mathbf{N}}/\sim_r$不是一个域。事实上, 如

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{当 } n \text{ 为奇数;} \\ 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数.} \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} 0, & \text{当} n \text{为偶数;} \\ 1, & \text{当} n \text{为奇数.} \end{cases}$$

则$[a_n] \neq [0], [b_n] \neq [0]$,但$[a_n \cdot b_n] = [0]$.当然$\mathbf{R}^{\mathbf{N}}/\sim_r$也不是有序集, 为了消除上述缺点, 我们需要在$\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$中引入比$\sim_r$更“粗”的等价关系, 为此介绍超滤子的概念。

§ 1.2 超滤子

1.2.1 定义 设I为一个集合, 称 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$为$I$上的**滤子**(或**滤**), 如果

(1) $\mathcal{F}$对有限交封闭, 即$\forall A, B \in \mathcal{F}$, 则 $A \cap B \in \mathcal{F}$;

(2) $\mathcal{F}$对**超集运算**封闭, 即$\forall A \in \mathcal{F}, A \subseteq B$,则$B \in \mathcal{F}$;

(3) $\emptyset \notin \mathcal{F}, I \in \mathcal{F}$.

例1 $\mathcal{F}_r = \{A \in \mathcal{P}(I) \mid A^c$为有限集$\}$是$I$上的滤，称为Frechet滤。

由滤子的定义可知，如$\mathcal{F}$是一个滤，则对任一$A \in \mathcal{F}$，A 和它的余集A^c，至多有一个属于$\mathcal{F}$，当然也可能A, A^c两者都不属于$\mathcal{F}$.

1.2.2 定义 称$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$是$I$上的**超滤子**（即最大滤子），如果

(1) $\mathcal{F}$是滤子；

(2) 如$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_1$，且$\mathcal{F}_1$也是滤子，

则$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$.

例2 设$i \in I$，则

$$\mathcal{F}_i = \{A \in \mathcal{P}(I) \mid \{i\} \subseteq A\}$$

是I上的一个超滤子，称这种包含一个公共集的滤子为主滤。

关于超滤子的存在性，我们有如下的基本定理，它要用选择公理 或其等价形式Zorn引理来证明。

Zorn引理：设S是一个偏序集，如果它的任一个有序子集在S中有上界，则S必有一个极大元。

选择公理：如果对于某指标集A的每个成员a，X_a是非空集，则存在定义在A上的函数c，使得对一切$a \in A$，有$c(a) \in X_a$.

1.2.3 定理 如果$\mathcal{F}_1$是一个滤子，则存在超滤子$\mathcal{F}$，使得$\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}_1$.

证明 设$\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_1 \supseteq \mathcal{F}_1 \mid \mathcal{G}_1$是一个滤子$\}$，显然$\mathcal{G}$非空。如果$\mathcal{D}$是$\mathcal{G}$中的有序子集，令$\mathcal{G}' = \bigcup\{\mathcal{G}_1 \mid \mathcal{G}_1 \in \mathcal{D}\}$，则$\mathcal{G}' \supseteq \mathcal{F}_1$.往证$\mathcal{G}'$是滤子：

1)如$A \in \mathcal{G}', B \supseteq A$，则存在$\mathcal{G}_1 \in \mathcal{D}$，使得$A \in \mathcal{G}_1$，因为$\mathcal{G}_1$是滤子，$B \in \mathcal{G}_1$故$B \in \mathcal{G}'$.

2)如 $A, B \in \mathcal{G}'$ 则有 $A \in \mathcal{G}_1, B \in \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_1 \in \mathcal{D}, \mathcal{G}_2 \in \mathcal{D}$. 因 $\mathcal{D}$ 是有序集, 故 $A, B \in \mathcal{G}_1$ 或 $A, B \in \mathcal{G}_2$. 所以, $A \cap B \in \mathcal{G}_1$, 或 $A \cap B \in \mathcal{G}_2$. 从而, $A \cap B \in \mathcal{G}'$.

3)显然, $\emptyset \notin \mathcal{G}', I \in \mathcal{G}'$.

于是, $\mathcal{D}$ 在 $\mathcal{G}$ 中有上界, 由Zorn引理, $\mathcal{G}$ 有极大元 $\mathcal{F}$, 往证 $\mathcal{F}$ 是超滤子。事实上, 如滤子 $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$, 则 $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}_1$, 故 $\mathcal{F}' \in \mathcal{G}$. 但 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{G}$ 中的极大元, 所以 $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$. □

下面的定理刻划了超滤子的基本性质, 它也可作为超滤子的等价定义。

1.2.4 定理 如果 $\mathcal{F}$ 是一个滤子, 则它为超滤子的充要条件是 A 与 A^c 中有且仅有一个属于 $\mathcal{F}$.

证明 充分性: 如果 $\mathcal{F}$ 是滤子但不是超滤子, 于是必存在超滤子 $\mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{F}$, 从而有 $A \in \mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}$. 因 $A \notin \mathcal{F}$, 于是 $A^c \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_1$, 与 $A \in \mathcal{F}_1$ 矛盾。

必要性: 如果 $A \notin \mathcal{F}$, 令 $\mathcal{G} = \{X \subseteq I \mid A \cup X \in \mathcal{F}\}$, 易证 $\mathcal{G}$ 是滤子, 且 $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$. 既然 $\mathcal{F}$ 是超滤子, 故 $\mathcal{G} = \mathcal{F}$. 由 $\mathcal{G}$ 的构造, $A^c \in \mathcal{G} = \mathcal{F}$. 显然两者不能同时属于 $\mathcal{F}$. □

1.2.5 定义 称非空族 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(I)$ 为**滤子基**, 如果

(1) $\emptyset \notin \mathcal{G}$;

(2) $\forall A, B \in \mathcal{G}$ 有 $A \cap B \in \mathcal{G}$.

1.2.6 定理 如果 $\mathcal{G}$ 是滤子基, 则存在一个滤子 $\mathcal{F}$, 使得 $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{G}$.

证明 令 $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(I) \mid \exists C \in \mathcal{G}$, 使得 $A \supseteq C\}$, 显然 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, 易证 $\mathcal{F}$ 是滤子。 □

由此及定理1.2.3可知

1.2.7推论 如果$\mathcal{G}$是一个滤子基, 则存在超滤子$\mathcal{F}$使 $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{G}$.

下面将看到, 为了得到实数域的真扩充, 必须要用到所谓的自由超滤子。

1.2.8 定义 滤子$\mathcal{F}$称为是**自由滤子**的, 如果

$$\bigcap \mathcal{F} \triangleq \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$$

1.2.9 定理 超滤$\mathcal{F}$是自由的当且仅当$\mathcal{F}$不是主滤, 当且仅当$\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{F}$.

证明 第一个等价是明显的, 事实上$\mathcal{F}$为主滤$\Longleftrightarrow$存在$i \in I$,使对每个 $F \in \mathcal{F}$,有 $i \in F$,从而$\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.往证$\mathcal{F}$是自由的当且仅当$\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{F}$.

充分性是明显的, 因为Frechet滤$\mathcal{F}_r$是自由的, 由$\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{F}$可知$\bigcap \mathcal{F} \subseteq \bigcap \mathcal{F}_r = \emptyset$;

必要性: 要证$\forall n \in \mathbf{N}, i_1, \cdots, i_n \in I$, $I \setminus \{i_1, \cdots, i_n\} \in \mathcal{F}$.如不然, 则必存在 $n \in \mathbf{N}$, $i_1, \cdots, i_n \in I$,使$\{i_1, \cdots, i_n\} \in \mathcal{F}$,但$\mathcal{F}$是自由的超滤子, 必不是主滤, 因此对每个$i_k, k = 1, 2, \cdots, n$,必存在$F_k \in \mathcal{F}$,使得$i_k \notin F_k$,而

$$\{i_1, \cdots, i_n\} \subseteq I \setminus \bigcap_{k=1}^{n} F_k$$

所以$\bigcap_{k=1}^n F_k \notin \mathcal{F}$,与$\mathcal{F}$对有限交封闭矛盾。 □

由定理1.2.3可知存在I上的自由超滤子。

不要忘记, 我们之所以要引入超滤子是因为Frechet 滤$\mathcal{F}_r$划分等价类太“细”了, 或者说这样的等价类太“小”了, 致使$[a_n] \neq 0, [b_n] \neq 0$,但 $[a_n b_n] = 0$.用超滤子来划分 $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$就不会发生上述