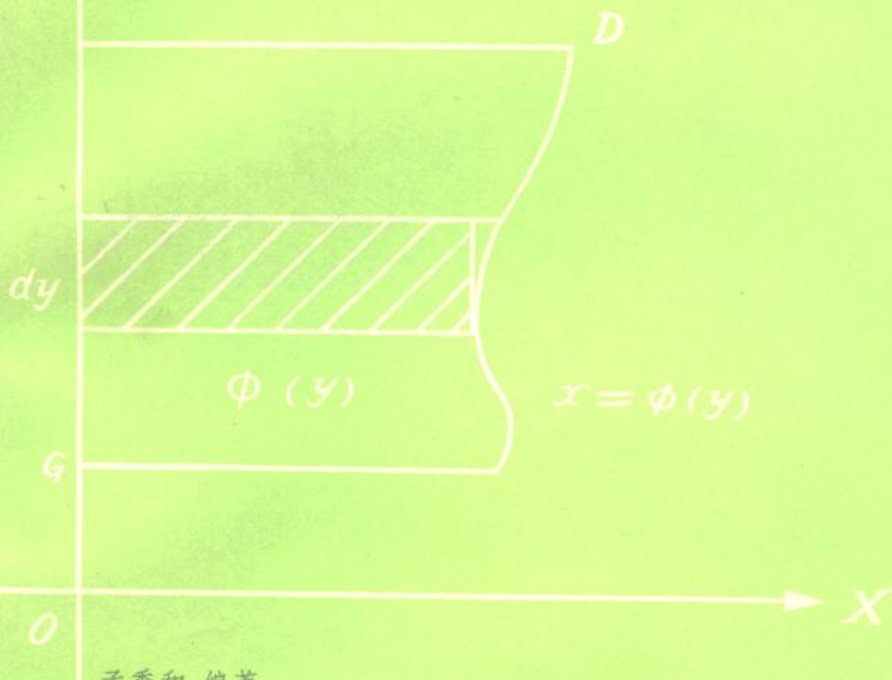


Y



孟季和 编著

四川省中小学教研室数学组 审

中学微积分教材教法

重 庆 出 版 社

中学微积分教材教法

孟季和 编著

四川省中小学教研室数学组 审

重 庆 出 版 社

一九八三年·重庆

内 容 提 要

本书是经四川省中小学教研室审订的中学教学参考书，是根据十年制学校高中数学第四册的内容和体系，参照六年制重点中学《微积分》的教学要求而编写的。编者重视了基本概念的介绍，对教材的重点、难点作了较详尽的分析；探讨了教法，提出了不少教学建议。为了帮助教师备课，本书适当扩大了教材的内容，对许多定理、公式补充了证明，按教材章节增添了许多类型的例题，注意了一题多解，并附有教材第四册的部分习题答案，对于教师分析教材、研究教法和查找资料都有帮助。

本书读者对象是中学数学教师和师范院校数学专业的学生，也可作高中学生和其它学习者自学辅导之用。

中学微积分教材教法

孟季和 编著

重庆出版社出版 (重庆李子坝正街102号)
四川省新华书店重庆发行所发行
重庆新华印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/32 印张10.5 插页2 字数215千

1983年12月第一版

1983年12月第一次印刷

科技新书目73—221

印数1—23,600

书号：13114·6

定价：0.95元

前 言

这是一本中学微积分教学参考书。在编排体系与知识深度方面和全日制十年制学校高中课本数学第四册是一致的，但内容上更丰富些，编写时，还参照了六年制重点中学《微积分》(征求意见稿)的部分教学要求。对于基本概念，尽量先从通俗具体的问题引入，然后明确地定义，并注意其应用。对于定理、公式，在课本知识范围内的，都给出了证明，从而加强了基础知识的阐述。为了对读者有所启发，巩固所学内容，提高解题能力，编入了较多的例题，并注意一题多解。书末附有高中数学第四册部分习题的答案。

在写法上，本书以讲课的方式叙述，力求深入浅出、通俗易懂。重视教材分析与教法探讨，对于教材中的重点、难点，作了详细的讲解。在处理具体内容时，把教材教法结合起来，将教法寓于教材的安排与讲述之中。

虽然已经出版的微积分书籍较多，但密切结合中学教学的参考书，目前还是不多的，本书就是根据这方面的需要所作的一种尝试。

本书的读者对象是中学数学教师和师范院校数学专业的学生。也可作高中学生的课外读物或自学者学习微积分的辅导材料。

在编写过程中，编者得到了四川省教育厅中小学教学研究
室数学组和温江师范专科学校的支持和鼓励。本书于1980
年写出初稿后，承刘明福、罗介玲、刘积全、刘志国等同志
审阅；1981年修改后，承程汉晋副教授审阅；1982年部分改
写后，又承刘明福、罗介玲、刘志国等同志复审。他们都提
出了许多改进意见；重庆出版社的编辑同志为本书的部分改
写提出了有益的建议，书中的插图是曾明锵同志绘制的；在
此一并表示衷心的感谢！

由于编者水平较低，经验不足，虽经几次修改，书中的
缺点错误仍恐难免，恳请读者提出批评和改进意见。

编著者

1982年11月24日

于温江师专数学科

目 录

绪 论	(1)
一、微积分研究的对象和使用的工具	(1)
二、在中学开设微积分的意义	(3)
三、教学目的要求和重点、难点	(6)
四、教材分析与教法探讨	(8)
第一章 数列极限与函数极限	(22)
一、数列的极限	(23)
§1.1 数列极限的概念	(23)
§1.2 数列极限的运算法则	(38)
二、函数的极限	(51)
§1.3 函数极限的概念	(51)
§1.4 函数极限的运算法则	(62)
§1.5 极限存在准则和两个重要极限	(73)
第二章 导数和微分	(88)
一、导数的概念	(89)
§2.1 增量及引进导数概念的例题	(89)
§2.2 导数的概念	(93)
§2.3 导数的几何意义	(101)
二、求导方法	(104)
§2.4 几个常见函数的导数	(104)

§2.5	导数的四则运算法则	(108)
§2.6	复合函数的导数	(116)
§2.7	反函数的导数	(127)
§2.8	对数函数与指数函数的导数	(130)
§2.9	三角函数与反三角函数的导数	(140)
§2.10	隐函数的导数	(153)
§2.11	二阶导数	(159)
三、	微分的概念与求法	(165)
§2.12	微分的概念与求法	(165)
第三章	导数和微分的应用	(175)
§3.1	函数的增减性	(175)
§3.2	函数的极值	(184)
§3.3	函数的最值	(193)
§3.4	微分在近似计算中的应用	(207)
第四章	不定积分	(213)
§4.1	原函数	(214)
§4.2	不定积分	(220)
§4.3	基本积分公式	(224)
§4.4	不定积分的运算法则	(228)
§4.5	直接积分法	(230)
§4.6	换元积分法	(234)
§4.7	分部积分法	(251)
第五章	定积分及其应用	(260)
一、	定积分的概念和计算	(262)
§5.1	定积分的概念	(262)

§5.2 微积分基本公式	(275)
二、定积分的应用	(287)
§5.3 平面图形的面积	(287)
§5.4 旋转体的体积	(295)
§5.5 旋转体的侧面积	(302)
附录：高中数学第四册部分习题答案	(311)

绪 论

一元微积分作为中学数学的教学内容，是解放以来的第一次。微积分属于高等数学的范畴，与初等数学有着质的差异，在认识上就必须有一个大的飞跃。还应看到，由于绝大多数中学数学教师缺少微积分教学的实践经验，必然会给教学增加一定的困难。因此，如何搞好中学微积分的教学，自然就成为一个大家共同关心的问题。

什么是微积分？为什么要在中学开设微积分？全日制十年制学校高中数学第四册的微积分内容、教学目的要求是什么？重点难点在哪里？该怎样理解教材和探讨教法？本书打算就这些问题谈一些粗浅看法，供中学微积分课教师研究、参考。

一、微积分研究的对象和使用的工具

数学和其他科学一样，随着生产实践和科学技术的需要而不断发展；反过来，数学的发展又能促进生产和科学的进步。古代生产水平低，科学不发达，所需要的数学知识简单；近代生产水平提高，科学技术进步，数学知识也日趋复杂。但大体上可以说，十七世纪以前的数学是常量数学，小学里

的算术、中学里的几何及代数中的大部分内容就是研究的常量和不变的图形。例如解方程时，方程的根是不变的；证明三角形全等时，三角形是固定的。这是常量数学即初等数学的特点。

十七世纪前期，法国数学家笛卡尔创立了坐标法，把变量引进了数学。十七世纪后期，英国数学家牛顿和德国数学家莱布尼茨创立了微积分。数学从研究常量和固定图形发展到研究变量和变化图形，研究对象的这种重大扩展，就标志着数学已进入了变量数学即高等数学的时代。

在研究方法上，二者也有根本性的区别。一般说来，初等数学的方法是静止的、孤立的，而高等数学的方法则是运动的、联系的，因而也是辩证的。但初等数学与高等数学并不是对立的，初等数学是学习高等数学的基础，常量和固定图形可以看作是变量和变化图形在某一点的取值和某一瞬间的照片。高等数学的一些思想、观点也经常渗透到初等数学的许多部分内。此外，中学里的解析几何及代数中关于函数的内容，本身就属于变量数学的范畴，所以它们是有密切联系的。

微积分是微分学和积分学的简称。是高等数学的基础。就其内容性质来说，是一门研究极限过程理论与变量计算方法的学科。

微积分作为变量的数学，它要研究现实世界中的运动变化现象，而这种现象在数学上是常用函数来表达或模拟的，因此微积分研究的主要对象是函数。对于运动变化现象，微积分不仅考察量变状态下的数量变化规律，而且还侧重于研

究质变状态下的数量变化规律。极限正是研究这种质变规律的工具。反映在理论上，纯微积分的计算，都是由无穷多道手续合成的。这是微积分与常量数学根本不同的地方。实现这种无穷多道手续的计算，要借助于极限理论，因此，微积分使用的基本工具是极限。所以我们可以说：微积分是以极限为基本工具，主要研究函数的微分法和积分法的理论及应用的学科。

微积分在研究运动变化现象时，采用“无限细分”与“无限积累”的处理方法，把要讨论的对象分成一系列无限变小的量，这种无限变小以零为极限的量就是无穷小量，所以微积分又叫做“无穷小分析”或“数学分析”。通常把微积分称为“数学分析”，还因为微积分的研究方法较少使用综合法，而主要是使用分析法；同时“数学分析”一词比“微积分”一词含义广泛，可以容纳更多的内容。从历史名称来看，牛顿的第一本微积分小册子《运用无穷多项方程的分析学》简称《分析学》；十九世纪二十年代，柯西的极限理论为微积分奠定了新的逻辑基础，他的《分析教程》也以“分析”命名，这些都可能与现在常把微积分叫做数学分析有关。

二、在中学开设微积分的意义

为什么要在中学里讲授微积分？这是教学中师生都应当明确的问题。

在中学开设微积分是提高中学数学程度、促进教材现代化的重要措施之一。其目的是为了适应“四化”的需要。微积

分的应用非常广泛，是进一步学习数学和其他自然科学以及掌握现代生产技术必须具备的数学知识，目前它的应用已经深入到了哲学、社会科学和许多经济领域。微积分是打开物理、力学、电学、电讯等科学大门的钥匙，是跨进函数论、微分方程、概率论和数理统计等重要数学分支的必备阶梯。它是现代数学的基础，是一切工程技术学科不可缺少的数学工具。微积分是划时代的科学。它的思想和方法对近代科学以及工程技术的发展产生了不可估量的作用。所以世界大多数国家认为，象微积分这样重要的学科，不让中学生了解和掌握一些初步知识，是不能容许的。国外有的科学家预言：“到2000年的时候，微分和积分运算，将和加减乘除运算一样，被人类所掌握。”微积分在理论上和应用上之所以如此重要，是因为我们生活在运动变化的宇宙之中，而它正是研究运动变化的数学工具。

微积分既是高等数学的基础，又直接应用于实际。在中学学习微积分对学生毕业后参加工作或继续学习都有好处。打开任何一本中级以上的技术书籍，都很容易看到其中用到微分或积分的地方。在中学学习了微积分初步知识，对于大部分毕业后不再升学的高中生来说，在参加现代化生产时，在阅读技术书籍时，在进一步自学数学、物理和其他现代科学技术时，都是很有用处的；对于毕业后升入理工科大学学习的学生来说，可以提早学习以微积分为基础的普通物理等重要课程。同时为学好高等数学打下了基础，因为有些理论，如函数极限，中值定理等等，需要有一个较长时间的酝酿领悟过程，才能较深入的理解掌握。在中学学习微积分

时，虽然不少地方是描述性的直观讲解，但毕竟能使学生获得一个比较粗浅的认识，为进一步学习高等数学中比较严密的理论，创造了有利的条件。

在中学开设微积分，对于学习传统的初等数学也是很有帮助的。传统初等数学中的许多问题，如求面积体积问题，判定函数的增减性，极大值极小值及其应用，函数图象的描绘，曲线的切线法线的求法，以及一些常用近似公式的推证等等，在微积分中都可找到简捷而具有普遍性的解决方法，显示了用变量数学的观点来分析研究常量数学，能更深刻地揭示出常量数学的规律的优越性。同时，学习微积分也为代数、三角、解析几何等提供了综合训练的新场所，从而加深它们之间的交融，有利于熟练基本知识，提高灵活运用和综合运用能力。

在传统的初等数学中虽然也充满着矛盾，但作为变量数学的微积分更富于辩证思想。正如恩格斯所说：“初等数学，即常数的数学，是在形式逻辑范围内活动的，至少总的说来是这样，而变数的数学——其中最重要的部分是微积分——本质上不外是辩证法在数学方面的运用”（《反杜林论》）。微积分不仅用到了形式逻辑，而且也用到了辩证逻辑。学习微积分有利于全面培养中学生的逻辑思维能力，使他们受到一定的唯物辩证思想的陶冶和训练，对于进一步学习哲学、树立辩证唯物主义的世界观也是大有裨益的。

早在半个多世纪前，西欧各国就在中学列入了微积分。美国、日本等也很早就在中学开设了微积分选修课。近二十年来，随着生产和科学技术飞跃发展，微积分的应用越来越

广泛，现在世界上绝大多数国家都在中学开设微积分了。苏联现行数学教学大纲规定在中学最后两年学习微积分。我国的中等专业学校绝大多数也开设微积分。解放前，有的普通中学在高中阶段也开设过微积分课程。所以，在中学学习微积分的初步知识，不仅是非常必要的，而且只要安排得当，也是切实可行的。

三、教学目的要求和重点、难点

在中学开设微积分，不是把大学的微积分课程照搬到中学来，而是只学习它的初步知识，即一元函数微积分中最基本最常用的内容，包括基本概念、计算方法和简单应用。目前在中学学习微积分初步，总的目的是：

1. 使学生初步理解极限、连续、导数、微分、不定积分和定积分等微积分中的最基本的概念，了解它们产生的一些实际背景。

2. 使学生掌握最基本的微分法和积分法。能较熟练地计算初等函数的导数和微分，会计算简单函数的积分。

3. 使学生了解微积分在实际中有广泛的应用，而且是研究传统数学的有力工具。能用所学知识解决一些简单的应用问题。

4. 使学生初步了解微积分的基本思想是实现由“均匀”到“非均匀”、由“直”到“曲”、由“不变”到“变”的转化。它的基本方法是极限法，即逼近法。并通过这些内容对学生进行辩证唯物主义方面的教育。

极限、导数、微分、原函数、不定积分、定积分等是最基本的概念；导数和积分的运算法则、复合函数的求导法、换元积分法、基本初等函数的导数表与基本积分表、牛顿—莱布尼茨公式等是最基本的运算；用导数讨论函数的增减性、求极值、用定积分求曲边图形的面积等是微积分的初步应用。这些都是教学中的重要内容。

由于学生习惯于用“静”的观点看问题，而微积分中的一些概念如极限、导数等，却要求能用“动”的观点去理解；定积分等概念，层次多、关系复杂，是学生从未遇到过的，这些都是学生在理解与掌握概念上的障碍。学习微分法与积分法的困难，首先在于公式的推导。学生还不习惯于从定义出发进行推导；不熟悉一般函数符号的运用；复合函数求导的困难在于分析函数的复合过程；换元积分法需要一定的灵活技巧也是一个难点。此外，初等数学，特别是基本初等函数的知识运用不熟练也带来不少困难。

目前在中学讲微积分，同在小学讲数学一样，在学生能初步理解概念的前提下，主要是讲基本计算方法和简单应用。应特别注意把握教学要求和教材程度，重视利用几何直观，不追求理论上的完整严密。为了适应目前中学的情况，对高中数学第四册的教材，编者作了许多考虑。例如关于函数极限和连续的概念没有给出中学生不易理解的“ $\varepsilon-\delta$ 定义”；关于定积分的概念，只对连续函数给出了一个“等分”定义，没有采用通常的一般性定义，因为这两个定义对我们所讲的黎曼积分来说是等价的，而“等分”定义更简单些。又如课本对多数定理，都给出了数学证明，而对少数定理略去了

证明。这里有几种情形：有的是证明较麻烦，中学生不易接受，如数列极限的四则运算定理，虽然可以证明，而不给出证明；有的是为了避免较繁难的推导，而附加条件使证明简化，如复合函数的求导法则，只是在附加了条件：中间变量的改变量 $\Delta u \neq 0$ 时，书上的证明才是成立的；有的是由于定义没有精确化，不能给出严格证明，如函数极限的四则运算定理等；有的是由于预备知识不够，或是涉及的知识超出了中学范围，如拉格朗日中值定理、重要极限 e 等，都只好略去证明。诸如这类地方，在教学中都不必向学生补充。对于概念可通过例子引进，加强直观描述，讲清概念间的区别联系以及它们的实际意义，在不违反科学性的条件下，力求把微积分讲得生动活泼，通俗易懂一些。对于略去证明的定理，着重讲解它的条件、结论、几何解释及其应用。这样处理，在目前是恰当的，有助于化难为易，增进学习兴趣。使学生感到微积分并不难学，从而获得较好的教学效果。

四、教材分析与教法探讨

这里先对全日制十年制学校高中数学第四册课本（以下简称课本）中的一些基本概念和重要内容作教材分析及教法探讨。有些内容这里虽未提及，但在本书后面有关章节中都有详细的处理及具体的讲法。

1. 极 限

（一）数列极限的概念

课本在7.4节中,以 $\left\{1 - \frac{1}{10^n}\right\}$ 、 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 为例引入数列极限,通过画图、列表、观察变化趋势,然后给出 $\varepsilon-N$ 定义,处理是完整严密的。教学中可以再多举几例:如 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 、 $\left\{\frac{(-1)^n}{2n}\right\}$ 、 $\left\{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ 等,并画出图形加强直观表示。还应举出一些极限不存在的数列如 $\{(-1)^n\}$ 、 $\{n\}$ 等,也画出图形,以“没有一定的变化趋势”来反衬“有确定的变化趋势”的收敛数列。反例有时比正面例子更能加深印象。

由于数列极限概念较难理解,学生有一个从感性认识到理性认识的过程,在教法上可以考虑分“三步走”。首先由例子得出对极限概念的直观描述;其次分析直观描述的关键,得出精确定义;然后用定义验证极限,从正、反两方面加深理解。这样做是因为直观描述是动态的:当 n 无限地增大,则 a_n 无限地趋近 A ,明显地看到 n 在“动”;而精确的 $\varepsilon-N$ 定义则是静态的:对任给的 $\varepsilon > 0$,总存在自然数 N ,当 $n > N$ 时,就有 $|a_n - A| < \varepsilon$ 。这时已看不出 n 有动的过程。从直观描述到精确定义分步走,正好体现了极限概念从动态到静态的过渡。从直观描述到 $\varepsilon-N$ 定义,要抓住两个关节点:(i)是把两个“无限地”用便于检验的数学语言来表达。“ n 无限增大”说成是“第 N 项以后的一切项,即 $n > N$ ”;“ a_n 无限地趋近于 A ”说成是“ a_n 与 A 之差的绝对值可以任意小,即 $|a_n - A| < \varepsilon$ ”。(ii)是要把思考的顺序颠倒过来。直观描述时,先说 n 无限增大,再说 a_n 无限地趋近于 A 。精确定义时,总是预先给出表示接近程度的 ε ,再来说 N 。为什么要把次序颠倒呢?仍然是