

# 费马大定理

一个困惑了世间智者 358 年的谜

[英] 西蒙·辛格著  
薛 密译

$x^n$

$\pi=3.14159$

$z^n$

X25

Z7D

23

34

WZ45

$Y^n$



上海译文出版社

0156

X57

443331

# 费马大定理

一个困惑了世间智者 358 年的谜

[英] 西蒙·辛格著 薛 密译



2



上海译文出版社

Simon Singh  
**FERMAT'S LAST THEOREM**  
**The story of a riddle that confounded the world's great  
minds for 358 years**

Fourth Estate Limited, London  
本书根据英国福斯埃斯特公司 1997 年版译出

Copyright ©1997 by Simon Singh  
Chinese language edition arranged with  
Christopher Little Literary Agency.  
Simplified Chinese Copyright 1998  
Shanghai Translation Publishing House

图字:09-1997-148 号

**费马大定理**  
——一个困惑了世间智者 358 年的谜  
〔英〕西蒙·辛格 著  
薛 密 译

---

上海译文出版社出版、发行  
上海延安中路 955 弄 14 号  
全国新华书店经销  
文华新技术公司排版  
上海市印刷七厂印刷

---

开本 850×1168 1/32 印张 9.75 插页 7 字数 215,000  
1998 年 2 月第 1 版 1998 年 8 月第 2 次印刷  
印数:10,001-17,000 册  
ISBN 7-5327-2141-8/K·067  
定价:17.50 元



皮埃尔·德·费马



索菲·热尔曼



莱昂哈德·欧拉



奥古斯汀·柯西



保罗·沃尔夫斯凯尔



大卫·希尔伯特

阿伦·图灵



库特·哥德尔



谷山丰



志村五郎

埃瓦里斯特·伽罗瓦





安德鲁·怀尔斯

## 序 言

在房间的另一头,我们终于见面了。房间并不拥挤,但大得足以在盛大的庆祝活动时容下整个普林斯顿大学数学系。在那个特殊的下午,那里并没有非常多的人,不过也使我无法断定哪一位是安德鲁·怀尔斯(Andrew Wiles)。片刻之后,我看准了一位看上去有点腼腆的男士,他正在听着周围人谈话,小口地抿着茶,沉浸在世界各地的数学家们大约每天下午4点都举行的例行聚会中。他立刻猜到了我是谁。

这是一个不寻常的周末,我遇见了一些当代最优秀的数学家,开始深入地了解他们的世界。但是尽管我千方百计地想找到安德鲁·怀尔斯,和他谈话,想说服他参与拍摄介绍他的成就的英国广播公司(BBC)的《地平线》纪录片,这却是我们的第一次会面。正是这个人最近宣布他已经找到了数学中的那只圣杯,他声称他已证明了费马大定理。在我们说话的时候,怀尔斯显得有点心烦意乱和沉默寡言。虽然他相当客气和友好,但很显然他宁愿我离他尽可能远一点。他非常坦率地解释说,他除了自己的工作外不可能再集中精力于别的事,而他的工作正处于关键时刻,不过或许以后,当眼前的压力解除后,他会乐意参与。我知道,并且他也知道我知道,他正面临着他毕生的抱负将崩溃的局面,他握着的圣杯正在被发现只不过是一只相当漂亮、贵重、但普通的饮器。在他宣布过的证明中他已经发现了一个缺陷。

费马大定理的故事是极不寻常的。到我第一次见到安德鲁·



怀尔斯的时候,我已经认识到它确实是科学或学术事业中一个最动人的故事。我看到过1993年夏天的头版新闻,当时这个证明将数学推上了世界各国报刊的头版。那个时候,我对费马大定理是怎么一回事只有一点模糊的记忆,但是明白它显然是非常独特的,具有《地平线》的专题影片所需的那种气息。接着的几个星期我用来和许多数学家谈话:那些与这个故事密切相关的,或者接近安德鲁的人;以及那些因直接见证了他们这个领域中的伟大时刻而激动不已的人。所有的人都慷慨地奉献出他们对数学史的真知灼见,他们将就着我仅有的那点理解力耐心地给我讲解有关的概念。很快我就搞清楚了这是一门世界上可能只有五六个人能够完全掌握的学问。有一阵子,我怀疑自己是否疯了,怎么会想去制作这样一部影片。但是从那些数学家那里,我也了解了丰富的历史知识,懂得了费马大定理对于数学以及它的实践者所具有的更深层次上的重要意义。这一点,我想正是这个真实的故事所要演绎的。

我了解到这个问题起源于古希腊时代,也了解到费马大定理可算是数论中的喜马拉雅山顶峰。我接触到了数学的艺术美,并开始欣赏把数学比喻成大自然的语言的說法。从怀尔斯的同代人那里,我领悟到他的工作所具有的把数论中最现代的技巧聚集起来应用于他的证明的非凡的力量。在他的普林斯顿的朋友们那里,我听说了怀尔斯在他孤独研究的岁月中取得的错综复杂的进展。我渐渐地勾勒出一幅怀尔斯和那驾驭着他生命的谜的不平凡的画面,但是我似乎注定见不到他本人。

虽然怀尔斯的证明中涉及到的数学是一些当今最艰难的数学,但是我发现费马大定理的美却是在于这样的事实,就是这个问题的本身特别的简单易懂,它是一个用每个中学生都熟悉的

话来表达的谜。皮埃尔·德·费马是属于文艺复兴时期传统的人,他处于重新发掘古希腊知识的中心,但是他却问了一个希腊人没有想到过要问的问题,其结果是诞生了一个世界上其他人最难以解答的问题。捉弄人的是,他还给后人留下了一个注记,暗示他已有了解答,不过没有写出这个解答。这场延续了3个世纪的追逐就是这样开始的。

这么长的时间跨度为这个难题的重要性奠定了基础。在任何学科中,很难想象有什么问题表达起来如此简单清晰却能够这么长时间地在先进知识的进攻面前屹立不动。想一下自17世纪以来对物理学、化学、生物学、医学和工程学的了解已经出现了多么大的飞跃。我们在医学上已经从“体液”进展到基因切片,我们已经识别出许多基本粒子,我们已经把人送上了月球,可是在数论中费马大定理仍然未被证明。

在我的研究过程中,有段时间我在探索:为什么费马大定理对不是数学家的人来说也是重要的以及为什么把它做成一个电视节目是有意义的。数学有各方面的实际应用,而就数论来说,别人告诉我它的最使人兴奋的用处是在晶体学、音响调节的设计以及远距离太空飞船的通讯中。这些似乎没有一个会吸引观众。真正能激发人们热情的正是数学家们自己,以及他们谈到费马时表现出来的那种深情。

数学是一种最纯粹的思维形式,对局外人来说,数学家似乎是属于另一个世界的人。在我与他们的讨论中,给我深刻印象的是他们的谈话中表现出来的惊人的精确性。很少有人立刻就回答我的问题,我常常不得不等待他们在脑海中把答案的精确结构组织好;不过,此后他们就会给你回答,讲得有条有理,非常仔细,超过我的期望。我曾就这一点与安德鲁的朋友彼得·萨纳

克探讨过,他解释说:数学家就是厌恶制造假的命题。当然,他们也凭借直觉和灵感,但是正式的命题必须是绝对的。证明是数学的核心,也是它区别于别的科学之处。别的科学有各种假设,它们为实验证据所验证直到它们被推翻,被新的假设替代。在数学中,绝对的证明是其目标,某件事一旦被证明,它就永远被证明了,不再有更改的可能。在费马大定理中,数学家们遇到了他们在证明方面最大的挑战,发现答案的人将会受到整个数学界特别的敬仰。

有人提供了奖赏,竞争也十分活跃,大定理有过一段涉及到死亡和欺诈的荒唐历史,它甚至刺激了数学的发展。就像哈佛大学的数学家巴里·梅休尔曾提到过的,费马使人们对那些与早期的证明尝试有关的数学领域增加了某种“敌意”。具有讽刺意义的是,结果正是这样的一个数学领域成了怀尔斯最后的证明中的关键。

通过逐步地了解这个陌生的领域,我渐渐地把费马大定理当作数学的中心,甚至相当于数学发展的本身来理解。费马是现代数论之父,自从他的时代以来,数学已经有了很大的发展和进步,并且形成了许多神秘的领域,在那里新的技术又孕育出新的数学领域,并成了它们自身中的一部分。随着几个世纪时光的流逝,大定理似乎越来越与数学研究的前沿无关,而越来越成为仅仅是一个使人好奇的问题。但是现在清楚了,它在数学中的中心地位从未失去过。

与数有关的问题,例如费马提出的这个问题,就像游乐场中的智力题,而数学家就像在解答智力题。对安德鲁·怀尔斯来说,这是一个非常特殊的智力题,是他一生的抱负。30年前,当他还是个小孩,在公共图书馆的一本书上碰巧发现了费马大定

理时,他就被这个问题吸引住了。他童年时代和成年时期的梦想就是解决这个问题。在他于1993年的那个夏天第一次宣布他的证明时,他在这个问题上的长达7年的全身心投入,以及难以想象的高度集中的精力和坚强决心终于有了结果。他用到的许多方法在他开始的时候尚未被创立。他也吸取了许多优秀数学家的工作成果,把各种想法贯通起来,创立了别人不敢尝试的概念。巴里·梅休尔评论说,在某种意义上每个人都在研究费马问题,但只是零星地而没有把它作为目标,因为这个证明需要把现代数学的整个力量聚集起来才能完全解答。安德鲁所做的就是再一次把似乎是相隔很远的一些数学领域结合在一起。因而,他的工作似乎证明了自费马问题提出以来数学所经历的多元化过程是合理的。

在安德鲁的费马大定理的证明中,核心是证明一个称为志村-谷山猜想的想法,该猜想在两个非常不同的数学领域之间建立了一座新的桥梁。对许多人来说,一个统一的数学是至高无上的目标,而这正是对这样一个世界的一次探索。所以,通过证明费马大定理,怀尔斯已经将战后时期的一些最重要的数论凝聚在一起,并且为建立在它上面的猜想金字塔奠定了基础。这不再只是解决长期存在的数学难题,而是在扩展数学王国的整个边界。这似乎就是自从费马的这个简单问题在数学的童年时期诞生以来一直等待着的时刻。

费马的故事已经以最为惊人的方式结束。对安德鲁·怀尔斯来说,这意味着事业上的孤军作战终于结束,这是一种几乎与数学研究不相容的方式。数学研究通常是一种合作性的行为,世界各地的数学研究所和大学数学系例行的下午茶会就是为交流想法提供的一段时间,在论文发表之前听取别人的意见已是

一项准则。一位在这个证明中起重要作用的数学家肯·里贝特半开玩笑地向我暗示说，正是因为数学家们感到不放心，才求助于这种同事间的支持方式。安德鲁·怀尔斯避开了这一切，对他的工作秘而不宣，一直到最后时刻。这也是对费马问题的重要性的一种度量。他真的有着一股驱使他一定要成为解决这个问题的人的激情，这种激情强烈到足以使他奉献出7年的生命并且秘密地坚守着他的目标。他深知无论这个问题看上去多么无关紧要，对费马大定理证明的竞争从未缓和过，他决不能冒险泄露他正在进行的工作。

经过几个星期对这个领域的调查之后我到了普林斯顿。数学家们的情绪非常强烈，我收集到了有关竞争、成功、孤立、天才、胜利、嫉妒、强大的压力、失败、甚至悲剧等各方面的背景材料。关键性的志村-谷山猜想的深处隐藏着谷山丰在日本的悲剧性的战后生活，我有幸从他的密友志村五郎那儿听了他的故事。从志村那里我也懂得了数学中对“完美”的看法，在那种境界中一切事情都很对头，因为它们完美的。那个夏天，数学界中充满了完美的感觉，在那个辉煌的时刻，所有的人都陶醉了。

在这一切都准备就绪的同时，人们对证明的可靠程度的少许怀疑像那个缺陷一样在1993年秋天逐渐显露出来，这一点安德鲁感觉到了。不知怎么回事，全世界都注视着他，他的同事们也要求他将证明公开，只有他知道该怎么办，他没有垮掉。他已经从隐居式地按照自己的步调研究数学突然地转向公开。安德鲁是一个非常不愿公开的人，他尽力使他的家庭免遭正围绕着他刮起的风暴的冲击。在普林斯顿的那整个一周中，我打过电话，在他的办公室里，在他的门阶上，还通过他的朋友留了纸条；

我甚至准备了英国茶叶和马麦脱酸制酵母作为礼物。但是他抵制了我的主动表示,直到我要离开的那天才出现了机会。我们进行了平静而紧凑的谈话,总共持续不到一刻钟。

在那天下午分手的时候,我们之间达成了一项默契。如果他设法补救了证明,那么他会来找我讨论影片的事;我准备等待。但是在晚上当我返回伦敦时,似乎感到电视节目的事已完蛋了。三百多年来,在众多尝试过的对费马大定理的证明中还没有一个人能补救出现过的漏洞。历史充满了虚假的断言,尽管我多么希望他会是一个例外,但是很难想象安德鲁不会是那片数学墓园中的另一块墓碑。

一年以后,我接到了那个电话。历经异乎寻常的数学上的曲折、真知灼见和灵感的闪现,安德鲁最终在他的专业生涯中解决了费马问题。此后又经过一年,我们找到了他能投入摄制工作的时间。这一次我邀请了西蒙·辛格(Simon Singh)和我一起制作这部影片,我们一起和安德鲁度过了这段时光,向他本人了解那7年的孤立研究以及之后的艰难痛苦的一年的完整情节。当我们拍摄时,安德鲁告诉了我们(他以前从未对人说过)他内心深处对他所完成的这一切的感受;30多年来他是如何念念不忘他的童年的梦想;他曾研究过的那么多数学是怎么不知不觉地聚集起来,成了他向主宰他的数学生涯的费马大定理挑战的工具;一切又是怎么会总是不一样的。他谈到了由于这个问题不再伴随着他而引起的失落感,也谈到由于他现在得到解脱而产生的振奋感。对这样一个其有关内容在技术上极难为外行听众理解的领域,我们的谈话中涉及情感的成分比我科学影片制作生涯中经历过的任何一次都要多。对安德鲁而言,这部影片是他生命中一个篇章的终结;而对我而言,能与它结下不解之缘

则是一种荣光。

这部影片在 BBC 电视台作为《地平线：费马大定理》节目播放。西蒙·辛格现在把那些深刻的见解和私下谈心，连同详尽的丰富多彩的故事和与之相关的历史和数学一起演绎成这本书，完整和富有启迪地记录了人类思维中最伟大的故事之一。

BBC 电视台《地平线》系列节目编辑

约翰·林奇

1997 年 3 月

## 前 言

费马大定理的故事与数学的历史有着千丝万缕的联系,触及到数论中所有重大的课题。它对于“是什么推动着数学发展”,或许更重要地“是什么激励着数学家们”提供了一个独特的见解。大定理是一个充满勇气、欺诈、狡猾和悲惨的英雄传奇的核心,牵涉到数学王国中所有的最伟大的英雄。

在皮埃尔·德·费马以今天我们所知的形式提出这个问题之前两千年,在古希腊的数学中就可找到费马大定理的起源。因此,它联系着毕达哥拉斯所建立的数学的基础和现代数学中各种最复杂的思想。在写这本书时,我选择了主要按年代顺序的结构方式,从叙述毕达哥拉斯兄弟会的大变革时代开始,以安德鲁·怀尔斯的寻求费马难题的解答的个人奋斗经历结束。

第一章叙述了毕达哥拉斯的故事,描述了毕达哥拉斯定理怎么会成为费马大定理的先驱。第二章讲述了从古希腊到17世纪法国的故事,正是在法国,费马制造了这个数学史上最深奥的谜。为了突出费马不寻常的性格和他对数学的贡献(他的贡献远不止大定理一项),我用了几页的篇幅描述他的生活以及他的别的一些卓越的发现。

第三章和第四章叙述了17、18世纪和20世纪早期证明费马大定理的一些尝试。虽然这些努力以失败告终,但是它们通向一座座神奇的数学技巧和工具的宝库,其中的一部分已经成为证明费马大定理的最终尝试中的组成部分。除了讲述数学外,我也将这些章节中的不少篇幅献给那些对费马的遗赠执著



追求的数学家们。他们的故事向人们展现了数学家是如何为寻求真理而牺牲一切的,以及几个世纪来数学是如何发展的。

本书的其余几章按年代顺序讲述了最近 40 年中使费马大定理的研究发生革命性变化的引人注目的重大事件。特别是第六章和第七章集中描写了安德鲁·怀尔斯的工作,他在最近 10 年中的突破性工作震惊了数学界。后面几章是根据与怀尔斯所作的广泛的交谈写成的,对于我来说,这是一次绝无仅有的机会亲耳聆听了一次最不平凡的 20 世纪知识之旅。我希望我能表达出怀尔斯经受 10 年严峻考验所需要的那种大无畏精神和创造性。

在讲述皮埃尔·德·费马的传说和他那使人困惑的难题时,我试图不借助于方程式来描述数学概念,但是不可避免地  $x$ ,  $y$  和  $z$  会不时地出现。当方程式真的在上下文中出现时,我尽量提供充分的解释使得即使不具有数学背景的读者也能理解它们的意义。对于那些懂得稍多数学知识的读者,我提供了一系列的附录来扩展书中的数学思想。此外,我还列出了供进一步阅读的书目,目的在于为非本行的读者提供关于特定的数学领域的更详细的资料。

如果没有众人的帮助和关心,本书是不可能完成的。我特别感谢安德鲁·怀尔斯,他在受到紧张压力的期间还不怕麻烦地与我们进行长时间的详细交谈。在我作为科学记者的 7 年经历中,从未遇见过任何人对自己的学科比他具有更深沉的爱和更投入。我永远感激怀尔斯教授愿意与我分享他的故事。

我也要感谢在写作过程中帮助过我并允许我与他们详谈的数学家们。他们中间一些人曾深入地研究过费马大定理,另一些是最近 40 年中重大事件的见证人。我向他们咨询和与他们