高等数学疑难题解400例

劉永然 胡海清 编

湖南科学技术出版社

高等数学疑难题解400例

瞿永然　胡海清编

湖 南 科 学 技 术 出 版 社

一九八〇年·长沙

期 限 表

到日期前将书

还

高等数学疑难题解400例

瞿永然 胡海清 编

责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版
（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行 湖南省新华印刷二厂印刷

*

1980年10月第1版 1981年4月第2次印刷
开本：787×1092毫米 1/32 印张：15.375 字数：314,000
印数：35.501——65.500
统一书号：13204·22 定价：1.60元

前　言

数学，这门基础学科，已经越来越渗透到各个领域，成为各种科学、技术、生产建设以至日常生活所不可缺少的有力武器。高等院校的学生，除少数专业外，都要不同程度地学习高等数学。解题是学习高等数学的一个十分重要的环节。为此，我们编写了《高等数学疑难题解400例》一书，试图给广大读者提供一些方便。基于这个思想，我们力求围绕高等数学的基本概念、基本理论和基本方法，安排内容，确定题解，既顾及到初学者和自学者的需要，又考虑在校学生对巩固和补充课堂知识的要求。所以在本书中，基本题和疑难题都兼而有之。我们想，这样做，将有助于对读者进行审题的思考方法和解题的基本技能的训练。需要说明的是，所谓“疑难”，主要是对初学者而言的。对于在数学上有一定造诣者来说，书中的一些题解无疑是浅了一些，有的题解甚至比较简单。但考虑这些题对初学者思考问题有启发作用，本书仍予以编入。

本书共分五章，以第二、三、四章为主体。最后一章级数和微分方程份量少些，这是因为这些内容已有书刊出版发行。本书内容的编排争取做到由浅入深，由易到难，由简到繁。由于多方面的原因，各部份内容的多寡、顺序及彼此衔接不尽合理，读者可根据实际需要，予以参考。

本书在编写过程中，参阅了国内外不少有关的图书资料，

从中汲取了丰富的营养。例如汤元吉先生等主编的《数学》共计二十四册，柳贤先生的译本《精选微积分学1284题与详解》等等，在拟题与解题方面，各有其独特之处。在本书选题时，我们择其一、二收入，与读者共飨。同时，在本书编写过程中，很多同志给我们以热情的指导和帮助。在此，谨致谢意！

由于本书篇幅有限，在内容上不能一一顾到，加之由于我们业务水平和实践经验有限，力不从心，书中一定会有不少缺陷甚至错误，恳请广大读者批评指正。

一九八〇年五月

目　　录

第一章　解析几何、线性变换

一　解析几何的一般问题

1.1　求使直线 $x\cos\theta+y\sin\theta=2$ 和椭圆 $x^2+3y^2=6$ 有公共点的 θ 的取值范围，这里 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

解　直线 $x\cos\theta+y\sin\theta=2$,　　(1)

当 $\sin\theta\neq0$ 时有 $y=-x\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}+\dfrac{2}{\sin\theta}$.　　(2)

由上式与椭圆 $x^2+3y^2=6$,　　(3)

得　$x^2+3\left(-x\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}+\dfrac{2}{\sin\theta}\right)^2=6$

上式两边乘 $\sin^2\theta$,

$$(\sin^2\theta+3\cos^2\theta)x^2-12x\cos\theta+12-6\sin^2\theta=0,$$

$$\therefore\quad(1+2\cos^2\theta)x^2-12x\cos\theta+6(1+\cos^2\theta)=0\quad(4)$$

直线和椭圆有公共点的条件是(4)的判别式 $D\geqslant0$，也即

$$\frac{D}{4}=(6\cos\theta)^2-6(1+2\cos^2\theta)(1+\cos^2\theta)\geqslant0,$$

$$2\cos^4\theta-3\cos^2\theta+1\leqslant0,$$

故必　$(2\cos^2\theta-1)(\cos^2\theta-1)\leqslant0$.

由于　$\cos^2\theta-1=-\sin^2\theta<0$,

$\therefore$　$2\cos^2\theta\geqslant1$,

故　$\cos\theta \leqslant -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

即　$\cos\theta \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

因此　$0 < \theta \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3}{4}\pi \leqslant \theta < \pi$.

当　$\sin\theta = 0$ 时，$\theta = 0$，π，则（1）是直线 $x = 2$ 或 $x = -2$。它们和椭圆有公共点，故所求范围是

$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4},\quad \frac{3}{4}\pi \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

1.2　设自圆外一已知点 $A(a_1, a_2)(a_1, a_2 \neq 0)$ 对圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 引二切线 t_1 及 t_2；其切点为 $B_1(x_1, y_1)$ 及 $B_2(x_2, y_2)$。试求经过 B_1 及 B_2 两点所作直线 g 的方程

解　可知切线 t_1 的方程式为：

$$xx_1 + yy_1 = r^2, \tag{1}$$

将 A 点坐标代入上式，可求得 B_1 点坐标为：

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{r^2 - a_2 y_1}{a_1}, \\ y_1 &= \frac{r^2 - a_1 x_1}{a_2}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

同理求得 B_2 的坐标为：

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{r^2 - a_2 y_2}{a_1}, \\ y_2 &= \frac{r^2 - a_1 x_2}{a_2}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

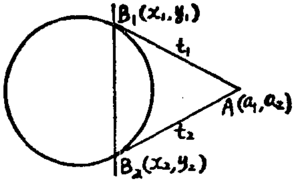
直线 B_1B_2 的方程式为

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1) \tag{4}$$

由（2）、（3）式可得：

$$y_1 - y_2 = \frac{a_1(x_2 - x_1)}{a_2},$$

$$x_1 - x_2 = \frac{a_2(y_2 - y_1)}{a_1},$$



所以 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{a_1(x_2 - x_1)a_1}{a_2 a_2(y_2 - y_1)}$，

即 $\frac{(y_1 - y_2)(y_2 - y_1)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_1)} = \frac{a_1^2}{a_2^2}$，

因此 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \pm\frac{a_1}{a_2}$. （5）

$+\frac{a_1}{a_2}$应舍去，否则与（1）矛盾，故只

选取 $-\frac{a_1}{a_2}$，代入（4）式则得：

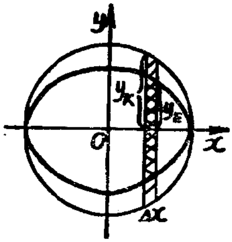
$$y - y_1 = -\frac{a_1}{a_2}(x - x_1),$$

即 $a_1 x + a_2 y = a_1 x_1 + a_2 y_1 = r^2$，

故 B_1B_2 直线（此弦称为 A 点的极线）的方程为：

$$a_1 x + a_2 y = r^2.$$

1.3 试将椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$（$a > b$）的面积分割为许多细长小面积，并以之与主圆之面积作一比较，求椭圆的面积。



解 对椭圆进行平行于坐标轴的分割。用影形部分代表这些长条，宽设为$\varDelta x$. 椭圆影形部分面积近似于长条矩形的面积 $2y_E \varDelta x$，相应于圆

的影长形条矩形面积为 $2y_K \Delta x$。这两个小面积之比是 $y_E : y_K$。

椭圆所有长条部分面积之和等于椭圆面积 F_E，圆之所有长条部分面积之和等于圆面积 F_K。

所以 $F_E : F_K = y_E : y_K$.

而 $$y_E = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

$$y_K = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

故 $$\frac{F_E}{F_K} = \frac{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b}{a},$$

$$F_E = \frac{b}{a} F_K.$$

由 $F_K = \pi a^2$ 可知 $F_E = \frac{b}{a}\pi a^2 = \pi ab$.

1.4　直线过 $(6, -2)$ 点，并且与两坐标轴围成的直角三角形面积为 3 个面积单位，求这直线的方程。

解1.　过 $(6, -2)$ 点的直线束为 $y + 2 = k(x - 6)$.

令　$x = 0$，得 $y = -6k - 2$.

令　$y = 0$，得 $x = \frac{2}{k} + 6$.

这就是说，此直线束在 y 轴和 x 轴上的截距分别为

$$-6k - 2 \text{和} \frac{2}{k} + 6.$$

根据三角形面积公式可得

$$\frac{1}{2}\left|\left(\frac{2}{k} + 6\right)\left(-6k - 2\right)\right| = 3,$$

即 $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{k}+6\right)\left(-6k-2\right)=3$ (1)

或 $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{k}+6\right)\left(-6k-2\right)=-3$ (2)

由方程(1)得

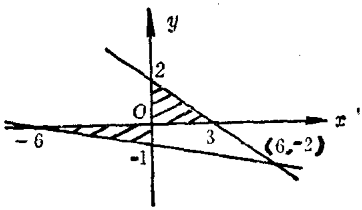
$$(3k+2)(6k+1)=0,$$

$$\therefore \quad k_1=-\frac{2}{3},\ k_2=-\frac{1}{6}.$$

方程(2)无实数解．因此所求直线有两条，它们的方程分别是

$$y+2=-\frac{2}{3}(x-6),$$

$$y+2=-\frac{1}{6}(x-6).$$



化简得

$$2x+3y-6=0,$$

$$x+6y+6=0.$$

解2． 用截距式表示所求直线方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

因直线过(6，-2)点，所以

$$\frac{6}{a}+\frac{-2}{b}=1,$$

也就是 $6b-2a=ab$.

又知所求直线与两坐标轴围成的直角三角形面积为3，所以 $ab=6$，故得

$$6b-2a=6,$$

即 $a-3b=-3$.

解方程组

$$\begin{cases}a-3b=-3,\\ ab=6,\end{cases}$$

得 $\begin{cases}a_1=3,\\ b_1=2,\end{cases}$ $\begin{cases}a_2=-6,\\ b_2=-1.\end{cases}$

因此所求直线方程为

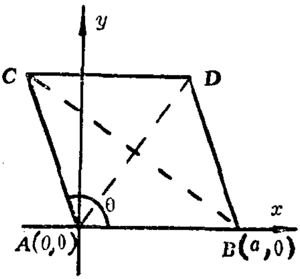
$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1 \text{ 和 } \frac{x}{-6}+\frac{y}{-1}=1.$$

化简得

$$2x+3y-6=0$$

和 $x+6y+6=0$.

1.5 试证菱形的对角线互相垂直.



证 选轴如图，使菱形二顶点为 $A(0,0)$ 及 $B(a,0)$，因为菱形为等边平行四边形，故 $AC=CD=BD=AB=a$.

在图中，我们有意不将 C 及 D 的坐标写出，其用意在使读者注意使 C 及 D 的坐标符合四边相等的原则，因为 $AC=a$，故 C 的坐标可以 a,θ（AC 的倾角）表出为：

$C(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$，同理 D 点的坐标为：

$D(a+a\cos\theta,\ a\sin\theta)$.

直线 AD 的斜率 $k_{AD}=\dfrac{a\sin\theta}{a+a\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ $\Big($由于 $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\tan\dfrac{\theta}{2}$，故 AD之倾角为$\dfrac{\theta}{2}$，因此菱形的对角线 AD 将内角 BAC 二等分$\Big)$

直线 BC 的斜率

$$k_{BC}=\frac{a\sin\theta}{a\cos\theta-a}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta-1}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta-1}\cdot\frac{\cos\theta+1}{\cos\theta+1}$$

$$=\frac{\sin\theta(\cos\theta+1)}{\cos^2\theta-1}=\frac{\sin\theta(\cos\theta+1)}{-\sin^2\theta}=-\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}.$$

因为 $k_{AD}=-\dfrac{1}{k_{BC}}$,

故两对角线互相垂直.

1.6 曲线 $xy=a^2$ 上一切线与坐标轴成一三角形，求此三角形面积.

解 如图，设切点为 $P(x_1,\ y_1)$，切线斜率为 k，则

$$k=y'=-\frac{a^2}{x_1^2}.$$

所以切线方程为

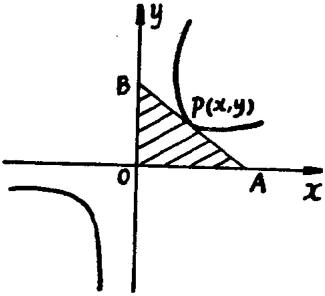
$$y-y_1=-\frac{a^2}{x_1^2}(x-x_1).$$

以 $x=0$ 代入，得 y 轴的截距 $=y_1+\dfrac{a^2}{x_1}$,

以 $y=0$ 代入，得 x 轴的截距

$$=x_1+\frac{x_1^2y_1}{a^2}$$

故$\triangle OAB$的面积等于：



$$\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{x_1^2y_1}{a^2}\right)\left(y_1+\frac{a^2}{x_1}\right)$$

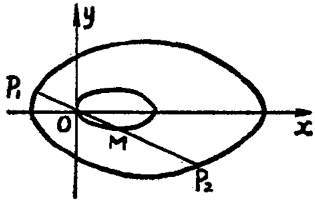
$$=\frac{1}{2}x_1y_1+\frac{1}{2}a^2+\frac{x_1^2y_1^2}{2a^2}+\frac{x_1y_1}{2}$$

$$=\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{2a^2}+\frac{a^2}{2}$$

$$=2a^2.$$

1.7　试证：过椭圆的一个焦点的诸弦中点的轨迹是一个椭圆，它的离心率和原椭圆的离心率相等。

证　取坐标如图所示，这椭圆的半长轴为 a，半短轴为 b，半焦距为 c，则椭圆方程为：



$$\frac{(x-c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

又过椭圆的左焦O所在的直线 P_1P_2 的方程设为：

$$y=kx,$$

所以弦 P_1P_2 的两端点的坐标应满足方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{(x-c)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, & (1)\\ y=kx, & (2)\end{cases}$$

用代入法，以(2)代入(1)，解得

$$\begin{cases} x_{1,2}=\dfrac{+b^2c\pm b\sqrt{c^2-a^2k^2-b^2}}{a^2k^2+b^2}, \\ y_{1,2}=\dfrac{+b^2ck\pm ak\sqrt{c^2-a^2k^2+b^2}}{a^2k^2+b^2}; \end{cases}$$

再设诸弦 P_1P_2 的中点坐标为(x',y')，则

$$x'=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{+b^2c}{a^2k^2+b^2}, \tag{3}$$

$$y'=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{+b^2c}{a^2k^2+b^2}\cdot k, \tag{4}$$

(4)÷(3)得：

$$\frac{y'}{x'}=\frac{\dfrac{+b^2c}{a^2k^2+b^2}\cdot k}{\dfrac{+b^2c}{a^2k^2+b^2}}=k,$$

从而 $$x'=\frac{+b^2c}{a^2\left(\dfrac{y'}{x'}\right)^2+b^2}=\frac{+b^2cx'^2}{a^2y'^2+b^2x'^2},$$

即 $$a^2y'^2+b^2x'^2=+\frac{b^2cx'^2}{x'},$$

也即 $$a^2y'^2+b^2x'^2=b^2cx',$$

变形为：$$\frac{\left(x'-\dfrac{c}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{c}{2}\right)^2}+\frac{y'^2}{\left(\dfrac{bc}{2a}\right)^2}=1.$$

将 x',y' 改为 x,y 的诸弦中点的方程为：

$$\frac{\left(x-\frac{c}{2}\right)^2}{\left(\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{bc}{2a}\right)^2}=1, \tag{5}$$

$\because \quad a>b \quad \therefore \frac{b}{a}<1$，因而$\frac{c}{2}>\frac{c}{2}\times\frac{b}{a}=\frac{bc}{2a}$，因此，（5）是一个椭圆，其半长轴为$\frac{c}{2}$，半短轴为$\frac{bc}{2a}$，半焦距为

$$\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{bc}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{c^2(a^2-b^2)}{4a^2}},$$

但是 $a^2-b^2=c^2$，所以半焦距为$\frac{c^2}{2a}$。因此诸弦 P_1P_2 中点M的椭圆的离心率为：

$$e=\frac{\frac{c^2}{2a}}{\frac{c}{2}}=\frac{c}{a},$$

这与已知椭圆的离心率恰好相等，故结论获证。

1.8 现有一圆锥系F其形式为

$$\frac{x^2}{s-1}+\frac{y^2}{s-3}=1,$$

这里s为一实参数，根据不同的s值说明方程式所定义之圆锥曲线的形式．并求证在通常情形下系中有一椭圆及一双曲线通过平面上任一点。

解 方程式为

$$\frac{x^2}{s-1}+\frac{y^2}{s-3}=1$$