复变函数奇点

谢力之　刘中兴　编

電子工業出版社

复变函数奇点

谢力之　刘中兴　编著

電子工業出版社

内 容 提 要

本书在复变函数、罗朗级数、奇点、留数等基本原理的基础上，着重于实践的应用进行讲解。每一章都由基本原理、典型例题、A型习题、B型习题四部分组成。此书不仅有助于理工科大学生学习《复函》课程，也可供工程技术人员，报考研究生的同志阅读。

复变函数奇点

谢力之　刘中兴　编著

责任编辑　宋玉昇

*

电子工业出版社出版（北京海淀区万寿路173信箱）

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

遂昌印刷厂印刷

*

开本：787×1092毫米1/32　印张：6.125　字数：130千字

1988年5月第一版　1988年5月第一次印刷

印数：1－5300册　定价：1.70元

统一书号：13290·556

前　　言

本书是为有志于进修《复变函数》的工程技术人员与在校理工科大学生而编写的。编写的宗旨是在基本原理基础上而着重于实践，这本书只介绍复变函数的奇点，每一章都由四部分（基本原理、典型例题、A型习题、B型习题）组成。

只要学习过高等数学与工程数学的同志，都可以学习此书，通过此书的学习可以检验与提高应用基本原理的能力，书中A型习题是体现基本内容，供在校的理工科大学生（包括电大、函大、职大、进院等）在学习《复函》时的参考；B型习题是体现进一步提高内容，供学习过《复函》的同志进一步学习，使之知识能融会贯通、熟能生巧的目的而选编的。为了便于读者自学，对于每一个习题都给予了解答，仅供参考。

本书的兄弟篇是作者另一本待出版的著作《复变函数映射》。这两本书合在一起将完整地反映了《复变函数》全部内容。

该书是由汉中师院谢力之副教授、北京物资学院刘中兴讲师合编的。由于编者水平所限，错误必然不少，恳切希望同志们给予批评指教。

编　　者

一九八七年

目　　录

第一章　罗朗级数

§1　基本原理

一、定义　称

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

为罗朗级数，其中

$$\sum_{n=-\infty}^{1} a_n (z-z_0)^n \quad 、\quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

分别为罗朗级数的主要部分、解析部分。

二、定理　在圆环：　$0 \leqslant r < |z-z_0| < R$内解析函数$f(z)$的充要条件是可以展为罗朗级数，即

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

其中　$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi$$

$r<\rho<R$

三、方法（求函数罗朗级数的方法）

（1）当$|z|<1$时，利用

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

及其导数表达式（如　$\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} n\ z^{n-1}$）

（2）利用一些熟知函数的泰勒展开式，如：

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n\quad,\ z\in C$$

$$\ln(1+z)=2k\pi i+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n},\ z\in|z|<1$$

（k为整数，以下同）

$$\sin z=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}z^{2k+1}\ ,\ z\in C$$

$$\cos z=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}z^{2k},\quad z\in C$$

$$(1+z)^{\alpha}=e^{2k\pi\alpha}\left[1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\right.$$

$$\left.\times z^2+\cdots\right],\quad z\in|z|<1$$

$$\operatorname{tg}z=z+\frac{1}{3}z^3+\frac{2}{15}z^5+\cdots,\quad z\in|z|<\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{ctg}z=\frac{1}{z}-\frac{z}{3}-\frac{z^3}{45}-\cdots$$

$$z\in|z|<\pi,\quad z\neq0$$

$$\operatorname{Arc}\sin z=k\pi+z+\frac{1}{2}\frac{z^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{z^5}{5}+\cdots,$$

$$z\in|z|<1,$$

$$\operatorname{Arctg}z=k\pi+z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\cdots$$

$$z\in|z|<1$$

（3）当$|z|>R$时：

对于$f(z)$可利用变换：　$z=\dfrac{1}{\xi}$

转化为$f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)$在$|\xi|<\dfrac{1}{R}$展为级数再还原。

§2 典型例题

例一 求函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$

分别在 $1<|z|<2$ 及 $2<|z|<+\infty$ 内展为罗朗级数

解 (1)当 $1<|z|<2$：

$$\because \quad \left|\frac{1}{z}\right|<1, \qquad \left|\frac{z}{2}\right|<1$$

$$\therefore \quad f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n}-\frac{1}{z}\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n}$$

$$=\cdots-\frac{1}{z^{2}}-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}-\frac{z}{2^{2}}-\frac{z^{2}}{2^{3}}-\cdots$$

(2)当 $2<|z|<+\infty$：

$$\because \quad \left|\frac{2}{z}\right|<1, \qquad \left|\frac{1}{z}\right|<\frac{1}{2}<1$$

$$\therefore \quad f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{2}{z}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}$$

$$=\frac{1}{z}\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^{n}-\frac{1}{z}\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n}$$

$$=\sum_{1}^{\infty}\frac{2^{n}-1}{z^{n+1}}$$

例二 求 $f(z)=\cos\dfrac{z}{z-1}$

在$z=1$处的罗朗级数

解 $f(z)=\cos\left(1+\frac{1}{z-1}\right)$

$$=\cos 1\cos\frac{1}{z-1}-\sin 1\sin\frac{1}{z-1}$$

$$=\cos 1\left[1-\frac{1}{2!}\frac{1}{(z-1)^2}+\cdots\right]$$

$$-\sin 1\left[\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!}\frac{1}{(z-1)^3}+\cdots\right]$$

$$=\cos 1-\sin 1\cdot\frac{1}{z-1}-\frac{\cos 1}{2!}$$

$$\times\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{\sin 1}{3!}\frac{1}{(z-1)^3}+\cdots$$

例三 求 $f(z)=\sin\frac{1}{1-z}$

在$1<|z|<\infty$ 内展为级数

解 作 $\xi=\frac{1}{z}$

$$f(z)=f\left(\frac{1}{\xi}\right)=\sin\frac{\xi}{\xi-1}$$

欲 $f\left(\frac{1}{\theta}\right)$在$0<|\xi|<1$内展为级数:

方法1: $\because$ $f\left(\frac{1}{\xi}\right)$在$\xi=0$解析,

$$\therefore\quad g(\zeta)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\sin\frac{\xi}{\xi-1}$$

可在$\xi=0$展为泰勒级数,

而$\because$ $g(0)=0$

$g'(0)=-1$

$$g''(0)=-2,$$
$$g'''(0)=-5,$$
$$\therefore\quad g(\xi)=-\xi-\xi^2-\frac{5}{6}\xi^3-\cdots$$

得 $f(z)=-\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{5}{6}\ \dfrac{1}{z^3}-\cdots$;

方法 2:

$$\because\ f\left(\frac{1}{\xi}\right)=\sin\frac{-\xi}{1-\xi}\qquad(|\xi|<1)$$
$$=-\sin(\xi+\xi^2+\xi^3+\cdots)$$
$$=-(\xi+\xi^2+\cdots)+\frac{1}{3!}(\xi+\xi^2+\cdots)^3$$
$$-\frac{1}{5!}(\xi+\xi^2+\cdots)^5+\cdots,$$

$$\therefore\ f(z)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}\left(1-\frac{1}{3!}\right)-\cdots,$$

$$|z|>1$$

例四 求多值函数

$$f(z)=\frac{\ln z}{z^2+1}$$

的解析分枝在$0<|z-i|<1$展为罗朗级数

解 $f(z)=\dfrac{1}{z-i}\ \dfrac{1}{2i+z-i}\ln[i+(z-i)]$

$$=\frac{1}{z-i}\ \frac{1}{2i}\ \frac{1}{1+\dfrac{z-i}{2i}}$$

$$\times\left[\ln i+\ln\left(1+\frac{z-i}{i}\right)\right],$$

$\because\ |z-i|<1$,有

$$\left|\frac{z-i}{2i}\right|<\frac{1}{2}<1, \quad \left|\frac{z-i}{i}\right|<1,$$

$$\therefore \quad f(z)=\frac{1}{2i(z-i)}\left[1-\frac{z-i}{2i}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{z-i}{2i}\right)^2-\cdots\right]\cdot\left[\ln i+\ln 1\right.$$

$$\left.+\frac{z-i}{i}-\frac{1}{2}\left(\frac{z-i}{i}\right)^2+\cdots\right]$$

$$=-\frac{i}{2}\left(\ln i+\ln 1\right)\frac{1}{z-i}-\frac{1}{4}\left(2-\ln i-\ln 1\right)$$

$$-\frac{i}{8}\left(4-\ln i-\ln 1\right)\left(z-i\right)-\cdots$$

若取主值： $\because \quad \ln i=\frac{\pi}{2}i, \quad \ln 1=0,$

$$\therefore \quad f(z)=\frac{\pi}{4}\frac{1}{z-i}-\frac{4-\pi i}{8}$$

$$-\frac{(8-\pi i)i}{16}(z-i)-\cdots$$

§3　A型习题

1． 求函数 $f(z)=\dfrac{e^z}{z(z^2+1)}$

在$0<|z|<1$的罗朗展开式

解 由 $|z|<1$， 有 $|z^2|<1$，

$$\therefore \quad f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+z^2}\cdot e^z$$

$$=\frac{1}{z}\left(1-z^2+z^4-\cdots\right)$$

$$\times\left(1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z}+1-\frac{1}{2}z-\frac{5}{6}z^2$$

$$+\frac{13}{24}z^3+\cdots$$

2. 将函数 $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$

分别在区域（1）$0<|z-i|<2$，（2）$2<|z-i|<+\infty$（3）$1<|z|<+\infty$ 内展为罗朗级数

解 （1）$\because$ $|z-i|<2$， 有 $\left|\frac{z-i}{2i}\right|<1$

$$\therefore\quad f(z)=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{2i}\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}$$

$$=\frac{1}{2i(z-i)}\left[1-\frac{z-i}{2i}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{z-i}{2i}\right)^2-\cdots\right]$$

$$=-\frac{i}{2}\left[\frac{1}{z-i}+\frac{i}{2}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\left(z-i\right)-\cdots\right];$$

（2）$\because$ $|z-i|>2$， 有 $\left|\frac{2i}{z-i}\right|<1$

$$\because\quad f(z)=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{z-i}\frac{1}{1+\frac{2i}{z-i}}$$

$$=\frac{1}{(z-i)^2}\left[1-\frac{2i}{z-i}\right.$$

$$-\frac{4}{(z-i)^2}+\frac{8i}{(z-i)^3}+\cdots\Bigg]$$

（3） ∵ $|z|>1$，有 $\left|\frac{1}{z}\right|<1$

知 $\left|\frac{1}{z^2}\right|<1$

$$\therefore\quad f(z)=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}$$

$$=\frac{1}{z^2}\left(1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}-\cdots\right)$$

3． 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$

分别在（1）$|z|<1$，（2）$0<|z-1|<1$，（3）$|z-1|>1$ 中展为级数

解 （1） ∵ $|z|<1$，有 $\left|\frac{z}{2}\right|<\frac{1}{2}<1$，

$$\therefore\quad f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}+\frac{1}{1-z}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\cdots\right]$$

$$+(1+z+z^2+\cdots)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2}z+\frac{7}{4}z^2+\cdots\right)$$

（2） ∵ $|z-1|<1$

$$\therefore\ f(z)=-\frac{1}{1-(z-1)}-\frac{1}{z-1}$$

$$= -\left[1+(z-1)+(z-1)^2+\cdots\right]-\frac{1}{z-1}$$

$$= -\frac{1}{z-1}-1-(z-1)-(z-1)^2-\cdots$$

（3） ∵ $|z-1|>1$，有 $\left|\frac{1}{z-1}\right|<1$

$$\therefore\quad f(z)=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}}-\frac{1}{z-1}$$

$$=\frac{1}{z-1}\left[1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\cdots\right]-\frac{1}{z-1}$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^3}+\frac{1}{(z-1)^4}+\cdots$$

4. 求 $f(z)=\sin\frac{z}{z-1}$

在$0<|z-1|<1$内展为罗朗级数

解 $f(z)=\sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right)$

$$=\sin 1\cos\frac{1}{z-1}+\cos 1\sin\frac{1}{z-1}$$

$$=\sin 1\cdot\left[1-\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^2+\cdots\right]+\cos 1\cdot\left[\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!}\times\left(\frac{1}{z-1}\right)^3+\cdots\right]$$

$$= \cdots - \frac{\cos 1}{3\,!} \cdot \frac{1}{(z-1)^3} - \frac{\sin 1}{2\,!}$$

$$\times \frac{1}{(z-1)^2} - \cos 1 \cdot \frac{1}{z-1} + \sin 1$$

5. 求 $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)(z-2)}$

在 $1 < |z| < 2$ 展开为罗朗级数

解 $\because$ $|z| > 1$、$|z| < 2$

$$\text{有} \left|\frac{1}{z^2}\right| < 1 \text{、} \quad \left|\frac{z}{2}\right| < 1$$

$$\therefore \quad f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} \cdot \frac{-1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2z^2}\left(1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} - \cdots\right)$$

$$\times\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \cdots\right)$$

$$= -\frac{1}{2z^2}\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^6} + \cdots\right)$$

$$-\frac{1}{2z}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^7} + \cdots\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^8} + \cdots\right)$$

$$-\frac{z}{2}\left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} - \frac{1}{2^9} + \cdots\right)$$

$$= \cdots - \frac{2}{5}\frac{1}{z^2} - \frac{1}{5}\frac{1}{z} - \frac{1}{10} - \frac{1}{20}z - \cdots$$

6. 求 $f(z) = \dfrac{1}{(z^5-1)(z-3)}$

在 $1 < |z| < 3$ 内展为罗朗级数

解 $\because \quad |z|>1$、$|z|<3$，

$$\text{有}\left|\frac{1}{z^5}\right|<1、\quad \left|\frac{z}{3}\right|<1$$

$$\therefore \quad f(z)=\frac{1}{z^5}\quad\frac{1}{1-\frac{1}{z^5}}\cdot\frac{-1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{z}{3}}$$

$$=\frac{-1}{3z^5}\left[1+\frac{1}{z^5}+\left(\frac{1}{z^5}\right)^2+\cdots\right]$$

$$\times\left[1+\frac{z}{3}+\left(\frac{z}{3}\right)^2+\cdots\right]$$

$$=-\frac{1}{3z^5}\left[\cdots+\frac{1}{z}\left(\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^9}+\cdots\right)\right.$$

$$+\left(1+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{3^{10}}+\cdots\right)$$

$$+\ z\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{3^{11}}+\cdots\right)$$

$$\left.+z^2\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{3^{12}}+\cdots\right)+\cdots\right]$$

$$=-\frac{1}{3z^5}\left(\cdots+\frac{3}{242}\,\frac{1}{z}+\frac{243}{242}+\frac{81}{242}z\right.$$

$$\left.+\frac{27}{242}z^2+\frac{9}{242}z^3+\frac{3}{242}z^4+\cdots\right)$$

7． 求函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z-i)}$

在i点的罗朗展开式，并指出收敛范围

解1° $\because \quad \dfrac{1}{z^2}=\dfrac{1}{(z-i+i)^2}$

$$=\frac{-1}{\left(1+\frac{z-i}{i}\right)^2}$$

$$= -1 + 2\cdot\frac{z-i}{i} - 3\left(\frac{z-i}{i}\right)^2$$

$$+ 4\left(\frac{z-i}{i}\right)^3 - \cdots$$

（其中$\left|\frac{z-i}{i}\right| < 1$，即$|z-i| < 1$）

$$\therefore \quad f(z) = \frac{1}{z-i}\left[-1 + 2\cdot\frac{z-i}{i}\right.$$

$$\left.- 3\left(\frac{z-i}{i}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= -\frac{1}{z-i} - 2i + 3\left(z-i\right)$$

$$+ 4i(z-i)^2 - \cdots$$

收敛范围是$0 < |z-i| < 1$；

$$2° \quad \because \quad \frac{1}{z^2} = \frac{1}{(z-i)^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{i}{z-i}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{(z-i)^2}\left[1 - 2\cdot\frac{i}{z-i}\right.$$

$$\left.+ 3\left(\frac{i}{z-i}\right)^2 - \cdots\right]$$

（其中 $\left|\frac{i}{z-i}\right| < 1$，即$|z-i| > 1$）

$$\therefore \quad f(z) = \frac{1}{(z-i)^3}\left[1 - 2i\cdot\frac{1}{z-i} - 3\cdot\frac{1}{(z-i)^2}\right.$$

$$\left.+ 4i\cdot\frac{1}{(z-i)^3} + \cdots\right]$$

收敛范围是 $|z-i| > 1$

8． 下列函数$f(z)$能否在指定点展为罗朗级数：

（1） $\ln(1+z)$，$z=-1$； （2） $\operatorname{ctg} z$，$z=\infty$