现代数学基础丛书

组合矩阵论

●柳柏濂 著

科学出版社

现代数学基础丛书

组合矩阵论

柳柏濂 著

科学出版社
1998

内 容 简 介

本书介绍近20年发展起来的一个新分支——组合矩阵论.内容包括矩阵和图的谱、矩阵的组合性质、非负矩阵的幂序列和组合矩阵分析等.本书是国内第一本介绍组合矩阵论的专著,从而填补了我国在这方面理论的空白.它在信息科学、经济数学、计算机网络以及并行计算等方面有重要的应用,从而本书是这几方面科学工作者极好的参考读物.

现代数学基础丛书
组合矩阵论
柳柏濂 著
责任编辑 刘嘉善 林 鹏

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
科地亚印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1996年3月第 一 版 开本:850×1168 1/32
1998年8月第二次印刷 印张:18 1/2
印数:1 601—3 600 字数:486 000

ISBN 7-03-004615-3/O·788

定价:37.00元

《现代数学基础丛书》编委会

序　言

最近我访问加拿大、美国等地归来，收到了柳柏濂教授寄来的新著《组合矩阵论》. 连日展阅，觉题材内容清新优美，喜不释手.

特别可贵的是，这是一本成果丰硕的创造性著作，其中论述了中国中青年学者对组合矩阵论的一系列最新贡献，包括著者本人与李乔、邵嘉裕二教授联合获得国家教委科技进步一等奖的合作成果. 无疑，这些成果在国际上是居于领先地位的.

矩阵之能作为表现并分析组合论及图论问题的工具，这个很自然的思想，起源甚早，但“组合矩阵论”作为一个新的数学分支，开始被世界数学界所注目，实应归功于 H. J. Ryser 于 1973 年所做的演讲和著作. 近年还出现了 Brualdi 和 Ryser 的专著. 但柳柏濂的这本著作包含有不少新的题材内容，具有很不相同的特色.

从这本新著可以看出，中国学者对发展“组合矩阵论”这一新分支居于特别重要的地位，而且还为今后的组合论研究工作者开辟出一些很有前途的新方向，故本人乐意为这本新著作序，并希望今后还将见到这本书的英译本能早日问世.

徐利治

1994 年 2 月 16 日于大连理工大学

数学科学研究所

前　　言

组合矩阵论是一个近年来兴起而且发展迅速的一个数学分支．它用矩阵论和线性代数来证明组合性定理及对组合结构进行描述和分类．同时，也把组合论的思想和论证方法用于矩阵的精细分析及揭示阵列的内在组合性质．

组合矩阵论不仅与众多的数学领域 (数论、线性代数、图论和概率论等) 有密切的联系，而且在信息科学、社会学、经济数学和计算机科学等许多方面都有具体的应用背景．

从美国数学家 H. J. Ryser 1973 年 1 月，在题为"组合矩阵论"的讲演中，第一次提出这个数学分支开始，到最近 R. A. Brualdi 和 H. J. Ryser 的第一本专著《组合矩阵论》 (Combinatorial matrix theory) 问世，其间只不过 20 年，在国内外数学杂志上，组合矩阵论的新成果，新问题，新概念，新方法不断涌现，显示了这个数学新分支的强大生命力和应用前景．特别值得指出的是，在这一数学理论的创建和发展中，留下了很多中国学者领先性工作的记录．

在本书中，主要介绍了矩阵和图的谱 (第一章), 矩阵的组合性质 (第二章), 非负矩阵的幂序列 (第三章), 组合理论的矩阵方法 (第四章) 和组合矩阵分析 (第五章) 等主要内容．在叙述中，我们假定读者已具备了线性代数、图论、数论的某些基本知识, 对矩阵论中的一些在每一本专著几乎都能找到的定理 (如非负矩阵的 Perron-Frobenius 定理) 我们不作详细证明．

本书的写作，一方面希图向读者介绍组合矩阵论这一迅速崛起的数学分支，另一方面，希望吸引更多的学者参加这一理

论的研究，因此，本书的选材，大多数是这一理论近年来日趋活跃的课题. 在概述课题的研究进展时，我们对中国学者包括作者本人的工作，给予足够的注视，这也是本书与近年出版的第一本专著《组合矩阵论》(Brualdi and Ryser) 不同的另一特色.

1988 年作者在美国 Wisconsin 大学 R. A. Brualdi 教授的指导下开始对组合矩阵论的学习和研究. 从此，作者萌发了写作本书的计划. 回国后，在写作此书的过程中，得到了我的导师徐利治教授，钟集教授的热情鼓励，得到了我的师长和朋友，李乔教授，李炯生教授，邵嘉裕教授，徐明曜教授，张福基教授，张克民教授，毛经中教授，张谋成教授的帮助. 李乔教授和邵嘉裕教授与作者合作的获国家教委科技进步一等奖的成果充实了本书的内容，他们的成果给本书提供了借鉴. 徐利治教授在百忙中为本书撰写序言，对我无疑是一个扶掖和鞭策.

作者的多年研究，得到国家自然科学基金的资助，本书的出版，得到华南师范大学的支持.

我的研究生程波，周波，许亚武诸同志为本书作了大量的文字校正工作.

没有我的领导，师长，朋友，学生的支持和帮助，这本书是不可能完成的. 在此，向他们表示深切的谢意.

可以肯定，本书的写作跟不上学科发展的速度，成果更新的频密. 鉴于作者水平所限，书中错误之处在所难免，希望能够得到更多专家，读者的批评和指正.

最后，我还应该说一句不是多余的话：感谢我的妻子莫慧女士多年来对我的事业的无私奉献和支持，她不谙数学，但是，她知道，她的丈夫正在数学这块田地上默默地耕耘.

柳柏濂

1994. 3. 于广州

目　　录

第一章　矩阵和图的谱

§1.1　矩阵特征值的重数

$m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$, $a_{ij}\in C$, 当 $m=n$ 时，称为 n 阶方阵.

$(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$, $i=1,2,\cdots,m$, 称为 A 的行向量.

$(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj})^T$, $j=1,2,\cdots,n$, 称为 A 的列向量.

λ 称为 n 阶方阵 A 的特征值，如果存在非零 n 维列向量 X, 使得

$$AX=\lambda X. \tag{1.1.1}$$

X 称为 A 的一个与特征值 λ 相应的特征向量.

由 (1.1.1) 式，我们知道，λ 是下列多项式的根，

$$\chi_A(\lambda)=\det(\lambda I_n-A),$$

这里，I_n 是 n 阶单位方阵. $\chi_A(\lambda)$ 称为 A 的特征多项式. 易知，$\chi_A(\lambda)$ 是关于 λ 的 n 次多项式.

由高斯定理，特征方程

$$\chi_A(\lambda)=0$$

有 n 个根，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 因为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 不一定互异，我们把重集 $\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$ 称为方阵 A 的谱 (spectrum). 记为 spec A 或

$$\text{spec } A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_s \end{pmatrix},$$

这里，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 互异，m_i 是 λ_i 的重数 (即 λ_i 是 $\chi_A(\lambda) = 0$ 的 m_i 重根). $\sum_{i=1}^{s} m_i = n$.

对于每一个特征值 λ_i, m_i 称为 λ_i 的代数重数. 而 λ_i 所对应的所有特征向量加上零向量构成一个线性子空间，称为与 λ_i 相应的根子空间. 这即 (1.1.1) 所决定的齐次方程组的解空间，易知，它的维数是 n-rank $(\lambda_i I_n - A)$, 这称为特征值 λ_i 的几何重数.

例 1.1.1

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\det(\lambda I_3 - A) = -(2-\lambda)(1-\lambda)^2,$$

$$\text{spec } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_1 = 2$, 代数重数是 1, 几何重数是 1 (rank $(2I_3 - A) = 2$).

$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 代数重数是 2, 几何重数是 1 (rank $(I_3 - A) = 2$).

例 1.1.2

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\det(\lambda I_3 - A) = (\lambda+1)(\lambda-2)^2,$$

$$\operatorname{spec} A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_1 = -1$ 的代数重数是 1, 几何重数是 1 ($\operatorname{rank}(-I_3-A) = 2$).

$\lambda_2 = 2$ 的代数重数是 2, 几何重数是 2 ($\operatorname{rank}(2I_3 - A) = 1$).

例 1.1.3 Jordan 块

$$J_m(k) = \begin{pmatrix} k & 1 & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \text{\Large 0} & & \ddots & k \end{pmatrix}_{m\times m},$$

$$\det(\lambda I_m - J_m(k)) = (\lambda - k)^m,$$

$$\operatorname{spec} J_m(k) = \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix}.$$

k 的代数重数是 m, 几何重数是 1.

从上面例中，可以看到： λ_i 的代数重数不小于它的几何重数. 下面，我们将要从理论上阐明这一点.

通过对例 1.1.1 和例 1.1.2 的考察，我们知道，在例 1.1.1 中， A 不能相似于一个对角形矩阵. 而例 1.1.2, 中虽然特征方程亦有重根，但却能相似于一个对角形矩阵. 换言之，设对角形矩阵

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $x_A(\lambda)$ 的 n 个根. 则在例 1.1.2 中, 存在一个可逆阵 P, 使

$$P^{-1}AP = \Lambda. \tag{1.1.2}$$

然而，对于例 1.1.1 我们为什么却不能找到这样可逆阵 P 呢？

由线性代数，我们知道：A 的 n 个特征值对应有 n 个特征向量，这 n 个特征向量可构成矩阵 P, 使 $AP = P\Lambda$. 由于特征向量非唯一的，P 也当然非唯一的.

现在的问题是：P 是否可逆？如果 P 是可逆，(1.1.2) 式成立，使有 A 与 Λ 相似. 于是，问题便追溯到，是否能选择特征向量 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_n$, 使它们线性无关.

当 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是互异时，我们容易看出，$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_n$ 线性无关.

当 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 非互异，即有重根时，例 1.1.1 和例 1.1.2 表明，选择线性无关的 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_n$ 不一定总是可能的.

那么，什么条件下，这种选择是可能的呢？我们有下面一个著名的定理 (见文献 [1]).

定理 1.1.1 设 n 阶方阵 A 有 k 个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$, 则 A 必相似于下列对角分块矩阵

$$\begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \ddots & D_k \end{pmatrix}, \tag{1.1.3}$$

其中，$D_i = J_{n_{i1}}(\lambda_i)\dot{+}J_{n_{i2}}(\lambda_i)\dot{+}\cdots\dot{+}J_{n_it_i}(\lambda_i)$ ($\dot{+}$ 表示直和), (1.1.3) 称为 A 的 Jordan 标准形. 它的所有 Jordan 块 $J_{n_{ij}}(\lambda_i)$ 由 A 的初等因子唯一确定 (初等因子的概念参见 [1]). 即，两个方阵相似充要条件是它们有相同的 Jordan 标准形.

现在，我们可以进一步阐述 λ_i 的代数重数与几何重数如何刻划矩阵的相似关系了.

从线性代数知，在相似变换下，矩阵的特征多项式不变，从而谱，最小 特征值的代数重数与几何重数也是不变量.

由定理 1.1.1, 我们还知道：

特征值 λ_i 的代数重数是 $n_{i1}+n_{i2}+\cdots+n_{it_i}$, 几何重数是 t_i, 于是， λ_i 的代数重数 $\geq$ 几何重数， $i=1,2,\cdots,k$.

(1.1.3) 的对角线上的元素，恰是 A 的全部特征值. 特别地，当所有特征值互异时，A 便相似于一个对角形矩阵. 这就意味着，λ_i 的代数重数等于它的几何重数，或 $\sum\limits_{i=1}^{k} t_i = n$, 我们便回答了 A 满足什么条件 (充要条件) 才能相似于对角形矩阵 Λ 的问题. 用此条件，可对例 1.1.1 和 1.1.2 加以验证.

A 相似于 (1.1.3), A 的最小多项式 $m_A(\lambda)$ 可以容易写出来. 由例 1.1.3 知，Jordan 块 $J_{n_{ij}}(\lambda_i)$ 的特征多项式是 $(\lambda-\lambda_i)^{n_{ij}}$ $(i=1,2,\cdots,k; j=1,\cdots,t_i)$. 由定理 1.1.1, 两个方阵相似当且仅当它们有相同的初等因子. A 的最小多项式 $m_A(\lambda)$, 就是对每一个 λ_i, 把次数最高的初等因子相乘，即 $m_A(\lambda)=\prod\limits_{i=1}^{k}(\lambda-\lambda_i)^{\alpha_i}$

其中 $\alpha_i = \max\limits_{1\le j\le t_i}\{n_{ij}\}$. 显然，当每个 λ_i 的几何重数 $t_i = 1$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ 时，便有 $\chi_A(\lambda) = m_A(\lambda)$. 由线性代数可知，$m_A(A) = 0$ 并且 $m_A(\lambda)|\chi_A(\lambda)$.

§1.2 矩阵和图

在考察矩阵 A 的谱所表现出来的组合性质之前，先研究一下图与矩阵的联系.

一个有向图 $D = (V, X)$, V 为标号顶点集， X 为弧集 (在这里，允许有重弧). 对 $v_i, v_j \in V$, 弧 $x = (v_iv_j)$ 表示由 v_i 指向 v_j 的一条弧， x 称为 v_i 的出弧或 v_j 的入弧， v_i 的出 (入) 弧的条数，称为 v_i 的出 (入) 度，记为 $d^+(v_i)(d^-(v_i))$. $m\{v_i, v_j\}$ 表示顶点 v_i 到 v_j 的弧的条数 $(m\{v_i, v_j\} \ge 0)$. 特别地 $m\{v_i, v_i\}$ 表示点 v_i 上环 (loop) 的个数. 设 $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, D 的邻接矩阵 (adjacency matrix) $A(D) = (a_{ij})_{n\times n}$, 其中 $a_{ij} = m\{v_i, v_j\}$. 若 D 是无向图，则有弧 (v_iv_j) 当且仅当有弧 (v_jv_i). 显见，图 D 和它的邻接矩阵是一一对应的，当 D 是无向图时， $A(D)$ 是对称矩阵.

如无特别声明, 我们考虑的有向图 $D(V, X)$ 是 $m\{v_i, v_j\} \le 1$ 的图， $\forall v_i, v_j \in V$. 而图 G 表示图论中研究的简单图.

于是，有向图 $D(V, X)$, $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 就和一个 n 阶邻接矩阵 —(0,1) 矩阵 $A(D) = (a_{ij})$ 建立起一一对应关系. 这里,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (v_iv_j) \in X, \\ 0 & \text{否则}. \end{cases}$$

易见，我们给出一个 (0,1) 方阵 A, 也对应于一个有向图 $D(A)$, $D(A)$ 叫 A 的伴随有向图 (associated diagraph). 于是，我

们建立起矩阵 A 和有向图之间的一个一一对应.

下面给出了一个 (0,1) 矩阵和它的伴随有向图.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

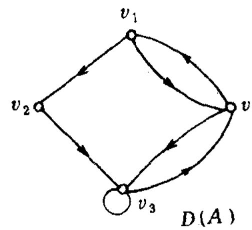

图 1.2.1

在非负矩阵论的研究中，矩阵表现出来的组合性质，仅与矩阵元素分布的零壹模式有关，而与元素数值的大小无关. 因此，当我们研究非负矩阵的组合性质，我们可以把一个非负矩阵转化为一个 (0,1) 矩阵来研究. 从代数结构的观点来看，这种 (0,1) 矩阵就是布尔矩阵 (Boole), 它们按通常方式定义矩阵运算时，矩阵中的元素 0, 1 的加法 “+” 和乘法 “·” 按下表所示的布尔方式进行：

+	0	1
0	0	1
1	1	1

·	0	1
0	0	0
1	0	1

显然，n 阶布尔方阵一共有 2^{n^2} 个. 如果记这个集合为 $\boldsymbol{B}_n$, 则 $\{\boldsymbol{B}_n, \cdot\}$ 就构成一个半群.

由此，我们可以通过 (0, 1) 矩阵，从而通过有向图去研究非负矩阵的组合性质. 下面的特征，可以相应地作出等价的刻划. 这里，我们假设读者已经熟悉图论的一些基本概念，或可参见 J. A. Bondy 和 U. S. R. Murty 的《图论及其应用》一书 (中译本，科学出版社， 1984).