粘性不可压缩流体动力学的数学问题

[苏] O.A.拉德任斯卡娅 著 张开明 译

上海科学技术出版社

粘性不可压缩流体动力学的数学问题

［苏］O. A. 拉德任斯卡娅　著
张开明　译
郭柏灵　管楚诠　校

上海科学技术出版社

Математические Вопросы Динамики Вязкой
Несжимаемой Жидкости
О. А Ладыженская
Издательство «Наука», Москва, 1970

ZF61/10

粘性不可压缩流体动力学的数学问题

〔苏〕O. A. 拉德任斯卡娅 著
张开明 译
郭柏灵 管楚诠 校

上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路450号)
新华书店上海发行所发行 江苏泗阳印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 8.875 字数 192,000
1963年2月第1版 1985年8月第2版 1985年8月第2次印刷
印数 3,401—7,200
统一书号：13119.494 定价：1.80元

第二版 中译本序

O. A. 拉德任斯卡娅所著《粘性不可压缩流体动力学的数学问题》(«Математические Вопросы Динамики Вязкой Несжимаемой Жидкости»)一书的第一版早已由张开明同志译为中文，于1963年由上海科学技术出版社出版，对我国流体力学和微分方程的发展已经起了一定作用。可惜坊间早已脱销，读者每致向隅。

该书在1969年时有了新版，由于新版改进很多，内容倍增，所以上海科技出版社仍请张开明同志重新译出，再经郭柏灵、管楚诠两同志校阅后付梓。

诚如作者自己所说，老版对广义解在什么条件下成为古典解这一既有理论价值又有实际意义的问题，很少涉及，而新版则整章予以论证。其他重要增新之处还多，恕不一一列举。

但最重要的增补，则是新版增加了一个附录，内容是引进了一个新的推广的纳维-司托克斯(Navier-Stokes)方程。我们知道古典的纳维-司托克斯方程是在速度梯度很小时推导出来的，而新的方程则可在放弃这个限制的条件下成立。这是一个了不起的成就，引起了世界学术界的重视。我希望我国学者十分重视这个附录，并从中受益。

保尔·拉法格在他的《忆马克思》一文中说：马克思认为，一种科学只有在成功地运用了数学时，才算达到真正完善的地步。刚性力学可以说早已达到了完善的地步，人们一直期望

着整个力学成为一个完善的科学，但是流体力学内部各种矛盾却不断发生(这是好事)。特别是在今天数学以非同寻常的速度和规模同时浸入科学各部门的时候，这种期望就形成了一种压力。

希望我国青年学者能较过去对本书第一版的注意力增加几倍的努力对待这个新的版本，从而来实现这个期望。

吴新谋

1983年春于北京

原书第一版前言

本书的目的是向数学工作者和流体力学工作者介绍一些关于线性化了的，和一般的非线性的纳维-司托克斯方程边值问题的可解性和解的稳定性方面迄至目前的研究成果。所得到的一系列结果原则上都表达成简单而又完全的形式，以便在这本篇幅不大的书中作出比较完整的叙述。读者在阅读此书时，仅需具备古典分析和泛函分析的基本知识。

作者感谢我的年青同事们——沙罗尼可夫 (В.А.Солоников)，哥罗夫金 (К. К. Головкин)，特别是奥斯哥尔科夫 (А. П. Осколков)和伊凡诺夫 (А. В. Иванов)，他们帮助整理了本书的手稿。

O.A. 拉德任斯卡娅

1959 年 12 月于列宁格勒

原书第二版前言

在本书的第一版中主要是要获得纳维-司托克斯方程边值问题和初边值问题的所谓广义解。至于在怎样的情况下，这些解成为古典解的讨论占据很少的篇幅，基本上只给出了怎样根据书中所述的定理来研究这个问题的方法，并且引进了一系列最终的结果。在这一版中有专门的章节来讨论这个问题(遗憾的是，使本书的篇幅增加了)。此外，改进了第六章的编排，这一章是讨论一般的非线性的不定常问题(尤其是改进了关于解的先验估计的引理中的常数，引进了更多的各种情况的可解性，以及成立唯一性定理的各种函数族)。书中还包含了第一版出版后出现的一系列新的结果，并增加了用有限差分法求解的有关结果。在第四章和第五章中也补充了一些段落。

在本书的最后给出了一个“附录”，其中引进了一些新的推广的纳维-司托克斯方程。我们觉得，这些新的方程在速度梯度较大时更好地描述了粘性流体的运动过程。对这些新的方程成功地严格证明了纳维-司托克斯方程所描述(但至今尚未证明)的各种性质。

O.A. 拉德任斯卡娅

1969年于列宁格勒

绪　论

理论流体动力学在很久以前就吸引了各种不同专业的学者们的注意。由于可实验观察，基本方程比较简单和问题有明确的提法，有希望对于流体介质中产生的动力学现象获得完整的量的描述。但是实际上问题并不那么简单。至今还没有完全成功地解决下面两个基本的原则问题：1）附加了边界条件和初始条件后流体动力学方程是否存在唯一的解；2）这些方程的解究竟以如何程度精确地描述了实际的流动。在流体动力学中所积累的丰富理论和实验资料，对于在流体中所产生的现象作严格的数学分析，看来还是不够的。流体动力学中大量的自相矛盾的说法[注] 标志了从它产生以来所经历的漫长而困难的路程。

最初的一个长时期是与理想不可压缩流体的所谓势流的研究联系在一起的。这是相当广泛的一类流动，而研究这类流动的数学工具几乎是完备了的（复变函数论）。但是欧拉-达朗贝尔关于作用在被势流绕流的物体上的合力为零的著名矛盾指出了理想流体理论的缺陷。正象理想流体理论中其他一系列的自相矛盾的说法一样，要想排除这个矛盾的任何企图都是徒劳的。那时已经建立了粘性流体的数学模型及其基本的纳维-司托克斯 (Navier-Stokes) 方程。这个数学模型，就象做错了事的小孩一样，必须解释在理想流体理论中所积累的一切不合理的现象（产生升力，正面阻力，湍流的形迹及其

[注] 在皮尔可夫的书[29] 中给出了关于这些矛盾的详细的分析. （原书的参考文献将苏联以外作者的著作另外编号，本译本采取统一编号. ——译者注）

他等等)。但是面对着向它提出的许多要求，小孩暂时是沉默的。其中大部分的问题它是不能完全确切地回答是或不是，因为纳维-司托克斯方程的绕流问题甚至对于最简单的有限尺寸的物体也是不能确切地求解的。与理想流体不同，对于纳维-司托克斯方程，不存在满足附加条件的势流。已经找到的准确解很少。而且这些解差不多都不具有问题的非线性特征(它们对应的纳维-司托克斯方程中的非线性项都是零)。

但是就是这样一点点关于纳维-司托克斯方程的认识，以及大量的实验及近似计算，表现了在粘性流体的数学模型和实际现象之间的一系列不相符合之处。这就产生了对于粘性流体的一些自相矛盾的说法。我们下面只举出其中的两个。

第一个矛盾是，已知对于任意雷诺数 R，纳维-司托克斯方程在轴对称无限长的管道(假定是沿着 x 方向)中的唯一可能解是

$$v_x = a^2(c^2 - r^2),\ v_r = v_\varphi = 0,$$

其中 c 是管道半径，而 a 是自由参数。但是对应于此解的流动(布阿塞依尔流)当雷诺数不超过某个临界值时是观察得到的，而当雷诺数越过这个临界值时流动变为湍流。

第二个矛盾是在科特流中表现出来的，即处于两个同轴的转动圆柱面之间，关于绕柱轴旋转不变及沿柱轴平移不变的定常流。这种对称的解对一切雷诺数 R 都是存在的，但是观察到的仅是在小雷诺数时的，在大雷诺数时虽仍是层流，但不是对称流。这里与最根本的见解发生了抵触，即对称的原因应该得出对称的结果。(注意，在这两个矛盾中，所观察到的流动在管道的无限远端点并不是布阿塞依流和科特流，即当 $|x| = \infty$ 时满足其他的边界条件。)

关于第二个矛盾，在文献[7]中给出了一个有趣的结果。

这就是，无限长的涡线与平面相互作用的问题当R不超过某个数R_1时存在唯一的具有对称性的解，并且具有问题中给定的特性。当R大于某个数$R_2>R_1$时，这样的解就不存在。

但是，这些矛盾和粘性流体中的另外一些矛盾在司托克斯建立的粘性不可压缩流体的数学模型的范围内找到了足够满意的解释。这就是，纳维-司托克斯方程是非线性的。已知对于非线性方程的不定常问题在整个区间$t\geqslant 0$中是可能不存在好的解的。在有限时间后解可能或者"趋向无限大"或者"发散"，失去了正则性，不再满足微分方程，开始分支。即使对于一切$t\geqslant 0$解是存在的，那么当保持边界条件及外力作用时它也可能不趋向于定常问题的解[注1]。定常的边值问题（见非线性椭圆型方程的边值问题以及与此相联系的几何和力学问题）对于包含在方程中的参变量的一些值可以存在唯一的解，对于另外一些值可以有好几个解，而对于第三类值又可以没有解。

从纳维-司托克斯方程的边值问题和前面的议论的对照中很自然地得出这样的结论：由于纳维-司托克斯方程的非线性性质，其定常问题当R小于某个R_1时有唯一的解；当$R_2>R>R_1$时可能有若个解；而当$R>R_2$时一个解也没有[注2]。上面所述的[7]中的结果好象证实了这个论点（事实上，其中仅仅指出不存在具有被研究者所指定的那种对称性的解，这种对称性是从所给问题对应的对称性出发的，这个问题是否存在不对称的解，尚未知晓。我认为是存在的）。不定常问题

[注1] 当$t\to\infty$时. ——译者注

[注2] 显然，这样来解释所说的矛盾是不能令人满意的，因为我们注意到，临界值R的量是依赖于实验条件的，在精密的实验过程中这个量可以大大地增加.

的解甚至在光滑的初始条件及光滑的外力作用下也可能随时间的不断增加愈来愈减少其正则性，而过渡到“非正则的”、“湍流的”状态，发生分支了。并且，事实上出现解的这样或那样的分支已经依赖于纳维-司托克斯方程存在没有涉及到的其他的原因。

但是，纳维-司托克斯方程对于描述真实流体的运动究竟给出了什么呢？检查这一问题的唯一的途径，首先是要对流体动力学中纳维-司托克斯方程提出的边值问题的可解性作严格的数学分析。这样的分析对于不可压缩流体比较容易得到。对于不可压缩流体成功地获得了一系列完整的结果。本书将要阐述这些结果。这里不再详细谈论其内容，只是大体上说一下书中所证明的定理的基本概况。

对于定常的边值问题证明了，对任意雷诺数 R 至少存在一个“好”解（对应于层流），只要对于充满流体的区域 Ω 的边界 S 的每一个孤立的部分 S_h 满足条件

$$\int_{S_h} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS=0. \qquad (*)$$

如果三维空间 E_3 中的区域 Ω 包含无限远点，那么要补充条件：当 $|x|\to\infty$ 时 $\boldsymbol{v}\to\boldsymbol{v}^\infty$。而边界 S_h，以及已知值 $\boldsymbol{v}|_{S_h}$ 和外力 $\boldsymbol{f}$ 都不一定是光滑的。对于有界区域和小雷诺数，边值问题的解是唯一的和稳定的。

关于不定常的初值——边值问题证明了，如果问题所给数据都不依赖于笛卡尔坐标中的一个坐标的话，那么这样的问题是“整体”唯一可解的。这也适用于下面的情况：1）该问题关于某个轴具有轴对称性，且充满流体的区域 Ω 不包括这个轴；2）对于柯西问题，向量 $\boldsymbol{v}$ 在圆柱坐标 (r,φ,z) 中的分量 (v^r,v^φ,v^z) 与 φ 无关，即 $v^\varphi\equiv0$。在一般的三维情况，证明了在

光滑的初始数据附近的初边值问题是唯一可解的，一般说来也就是在时间 t 变化小的区间 $[0, T]$ 中唯一可解。量 T 是由问题所给数据的相应的范数所确定。如果这些范数都小于某个数，那么 $T=\infty$。关于是否存在"整体的"唯一可解性，即当问题所给数据任意光滑和区域 Ω 任意大小时，对任意的 T 是否唯一可解，这个问题尚未解决。关于这个问题的研究有各种结果，这里给出其中的三个：

1）霍普夫证明了，初边值问题至少存在一个"整体"的所谓"弱"解(这个结果早于我们前面所说的结果)。这个解 v 具有 $L_2(Q_T)$ 中的导函数 v_x，并且 $\sup_{0<t<T}\|v(x,t)\|_{L_2(\Omega)}<\infty$。后来证明了（见 [$6_7$, 23_4]），这个解 v 也有属于 $L_{5/4}(Q_T)$ 的 v_t 和 $v_{x_ix_j}$。但是，正象我们在第 6 章 §7 所指出的(也可参考 [15_6])，霍普夫的"弱"解类太广了，以致破坏了唯一性定理。而在我们研究的"广义解"类中，尤其是在古典解类中，初边值问题的唯一性定理总是成立的。

2）如果初边值问题在问题所给的某些数据下在区间 $[0,T]$ 中有"好"解存在，那么对于所有接近于这些数据的给定值在区间 $[0,T]$ 中也有同样的解存在。

3）如果 v 是一般的三维的初边值问题在 $L_{q,r}(Q_T)$ 类中的广义解，而 q 和 r 是满足条件 i) $\frac{1}{r}+\frac{3}{2q}\leqslant\frac{1}{2}$，$r\in[2,\infty)$，$q\in[3,\infty)$ 或 ii) $q>3, r=\infty$，那么它在这个类中是唯一的，并且解的光滑度随问题所给数据的光滑度的增加而无限地增加，光滑的阶数是一致的。要证明"整体的"可解性，只要能获得所有可能的解的一种范数 $\|v\|_{q,r,Q_T}$ 用问题所给数据来表达的先验估计就行了。

关于不定常问题的解在有限和无限的时间区间中的稳定

性，证明了下面的定理。若外力随着时间逐渐消失，而边界条件对应于静止状态（$v|_S=0$），则运动将不依赖于其初始状态如何而逐渐消失。若外力的值 $f(x,t)$ 当 $t\to\infty$ 时趋近于某个定常的值 $f_0(x)$，而 $f_0(x)$ 对应的边值问题对不大的雷诺数 R_0 有解 $v_0(x)$，那么对应于任何初始状态 $v(x,0)$ 的不定常问题的解 $v(x,t)$ 当 $t\to\infty$ 时趋近于（并且很快地趋于）$v_0(x)$。如果雷诺数 R_0 很大，那么不能期待解 $v(x,t)$ 当 $t\to\infty$ 时趋向于某个确定的极限。

在时间 t 的有限区间中存在着解 $v(x,t)$ 关于初始值 $v(x,0)$ 及外力 $f(x,t)$ 的连续依赖性（对于平面平行流这样的区间是任意的，而对于任意的三维流则是固定的）。所有这些结果将在最后二章中叙述。

在讨论非线性的纳维-司托克斯方程之前先研究线性化的情况。这些研究表明，线性化方程的边值问题总是唯一可解的，并且，对应于定常问题的算子的性质与拉普拉斯算子的性质非常接近。而不定常问题的算子的性质很象热传导算子的性质，但又有本质的差异。

所获得的结果断定，当雷诺数不超过某个极限值时利用纳维-司托克斯方程来描述粘性流体的运动是合适的。这些结果也部分地否定了上面所述的关于纳维-司托克斯方程解的性质的假定，从而促使人们去寻找对在真实流体中所观察到的现象的其他的解释，尤其是对粘性流体的一些著名矛盾的解释。在这些解释中，看来不能忽略一点，即经过长时间的大的外力 f 的作用，对于解 $v=(v_1,v_2,v_3)$ 来说量 $D_x^m v_k$ 可能变得相当大，以致从麦克斯韦-波尔兹曼统计方程导出纳维-司托克斯方程时所作的关于这些量相当小的假定将不满足，同样，司托克斯理论的其他假定：运动粘性系数和热状态的不变性，

离开真实的情况也是很远的。因此在经典的纳维-司托克斯理论的范围内未必可以解释从层流到湍流的过渡。

请读者注意下列这些未解决的问题，我觉得这些问题是很重要也是很有趣的：

1）一般的三维初边值问题是否在某个广义函数类中有"整体的"唯一可解性，而不必假设问题中已知函数和充满流体的区域很小？

2）如果边界值 v_s 不满足条件（*），一般的非线性定常问题在多连通区域中是否对一切雷诺数 R 都存在好的解（层流）？这样的问题当雷诺数很大时可能存在不止一个解（见本书第一版英文版前言及 [25_4]）。自然可以期待，在大雷诺数时定常问题在有界的单连通区域中的解也是不唯一的（这时条件（*）是不可压缩性方程的推论）。但是据我所知，还没有例子证实这一点。

3）在本书第5章中证明了，对任意雷诺数 R，无界区域 Ω 中定常的绕流问题在具有有限狄利克莱积分的函数类中是可解的。在三维的情况指出了，当 $|x|\to\infty$ 时解 $v(x)$（在有限距离的所有点 x，$v(x)$ 是光滑的向量函数）一致收敛于预先确定的值 v^∞。对于二维情形这个问题还未解决。另一方面，在作者们的一系列工作中，主要是在工作 [$6_{5,8}$] 中证明了定常绕流问题的解在另一个较窄的函数类中的存在性，并指出这个解当 $|x|\to\infty$ 时有确定的渐近性。

这个重要结果目前只是在小雷诺数的情况下证明的，有趣的是要把这个结果推广到一切雷诺数 R，并且阐明，在具有有限狄利克莱积分的解类中是否存在这种渐近性。

4）当粘性系数 ν 趋于零时，纳维-司托克斯方程初边值问题的解是否趋向于相应的理想流体的初边值问题的解？即

使对平面平行流的情况搞清楚这个问题也好，对平行流证明各种问题的“整体的”唯一可解性（见本书第6章及[62，42_1，$25_{2,3}$]）。对柯西问题这个问题已解决（见[15_9]，[15_5]在美国出版的第2版，[6_4]）。

本书叙述的基本上都是作者本人和作者参加的研究工作。除去第3章用位势理论的方法研究定常的线性化的司托克斯问题，那是阿德奎斯特（Odqvist）、李赫铁斯坦（Лихтенштейн）和沙罗尼可夫（Солонников）的工作；第5章第4节关于对定常的非线性问题解的狄利克莱积分的有效估计是从莱锐和霍普夫的工作导出的；第6章第7节介绍了霍普夫关于一般非线性问题弱解的存在性。除此以外，不加证明地引进了一系列定理，涉及线性化不定常初边值问题解的微分性质对问题中已知量的最精确的依赖性。这些定理主要是由沙罗尼可夫利用他和葛罗夫金（Головкин）发展的三维不定常流体动力学位势理论所证明的。这个理论以及在他们之前由莱锐在30年代所建立的关于二维空间变量的同样的位势理论，在书中都没有叙述。这部分是由于其复杂性，部分是由于上面所述的关于非线性问题可解性的一系列结果在以前曾用其他比较简单的方法获得过。

在书的末尾（见附录）引进了一些比纳维-司托克斯方程更为复杂的方程，我觉得这些方程较好地描述了大雷诺数R时的流体运动。当小雷诺数时它们很接近纳维-司托克斯方程。对这些方程，其初边值问题“整体的”唯一可解性和定常的边值问题的可解性对任意雷诺数都是成立的。

为了使读者熟悉研究和解边值问题的各种方法，在每一章都叙述了各自的方法，但要注意，这些方法经过某些必要的变形，可能可以应用于研究其他章节的问题。象迦辽金方法

和有限差分方法可以成功地应用于书中研究的所有问题的解。位势理论方法和莱锐-邵德尔关于全连续变换的不动点定理也是这样。但是，对一个问题我们使用一种能又快又容易达到目的的方法，而对另一个问题则用另一种方法。按照这个原则,对每一个问题（即每一章）都选择了比较漂亮和比较方便的方法。

最后，请注意我所有关于边值问题（定常的和不定常的）可解性的研究的一个重要特点。我首先推广问题的解的概念,引进所谓“问题的广义解”、这种对给定问题的推广不是唯一的，但完全决定于广义解所属的那个泛函空间。然而我认为,只能允许这样的推广,即要保持古典解所具有的唯一性定理（例如，对初边值问题的唯一性)。这种广义解的光滑性随问题所给数据的光滑性的增加而改善，特别，当自由项、初始条件、边值条件和所绕物体的边界具有一定的光滑性时,广义解就成为古典解。

我根据二个原则引进广义解：1）对每一个所研究的问题存在这样的推广,其中存在性和唯一性(如果古典解有唯一性的话）定理可以十分简单地予以证明[注]； 2)当问题所给数据的光滑性不够,古典解不存在,而广义解可以存在。

书中主要集中于在选定的广义解类中证明解的存在性和唯一性。至于广义解的光滑性对问题所给数据的光滑性的依赖性（特别是搞清楚何时广义解成为古典解)，我觉得对流体力学来说不是很重要的,因而在书中处于次要的位置。

〔注〕 一般讲来，这种推广不是唯一的，因为“简单”的准则是相当主观的．当然我是从我个人的爱好来选择的．

目　　录